УДК 629.191 **DOI** 10.15622/sp.2019.18.5.1239-1263

В.И. Миронов, Ю.В. Миронов, Д.К. Хегай

ОПТИМАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОРБИТЫ КОСМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ ПО УГЛОВЫМ ИЗМЕРЕНИЯМ НАЗЕМНЫХ ОПТИКО-ЭЛЕКТРОННЫХ СТАНЦИЙ

Миронов В.И., Миронов Ю.В., Хегай Д.К. **Оптимальное определение орбиты космических объектов по угловым измерениям наземных оптико-электронных станций.**

Аннотация. Успешное решение задач практической космонавтики во многом обеспечивается современными достижениями в области измерительной и вычислительной техники, а также совершенством методов первичной и вторичной обработки траекторных измерений. Поэтому в перспективных программах освоения космического пространства и развития космической техники большое внимание уделяется совершенствованию существующих и разработки новых алгоритмических и технических средств навигационного обеспечения полетов космических объектов в интересах расширения возможностей и повышения эффективности систем автономной навигации космических аппаратов, а также наземных и перспективных орбитальных систем контроля космического пространства. В настоящее время ведется активная работа по модернизации и развитию перспективных комплексов специализированных оптико-электронных средств для мониторинга околоземного космического пространства на основе проводимых угловых измерений. Рассматривается применение вариационного подхода для решения задач статистического оценивания параметров траектории движения орбитального объекта по результатам угловых измерений, проводимых наземными оптико-электронными средствами, которые входят в состав современной системы контроля космического пространства. Приводятся модели и алгоритмы определения оценок параметров орбиты, реализующие вариационный вариант метода максимального правдоподобия, а также результаты тестовых расчетов, связанные с итерационным решением двухточечной краевой задачи вариационного оценивания.

Основная цель численных расчетов — исследование сходимости предлагаемого алгоритма оценивания, а также влияния ошибок измерений на смещение получаемых оценок относительно их точных значений.

Приведенные в статье результаты моделирования соответствуют условиям орбитального движения космического аппарата METEOR PRIRODA и получены с использованием эфемеридных данных каталога NORAD в TLE-элементах.

Ключевые слова: статистическое оценивание, космический аппарат, нелинейные динамические системы, критерий максимального правдоподобия, оптические угловые измерения.

1. Введение. Задачи оценивания параметров орбитального движения космических объектов (КО) по результатам измерений широко применяются на практике. Наиболее сложные задачи оценивания приходится решать, в частности, при навигационно-баллистическом обеспечении полетов космических аппаратов (КА), при разработке систем автономной навигации, а также в наземных и перспективных орбитальных системах контроля космического пространства.

В силу указанных причин в работах последних лет вопросам совершенствования методов определения орбит КО продолжает уделяться большое внимание. Принципиально для решения этих задач могут применяться как методы обработки навигационных измерений по полной выборке [1-5], так и методы динамической фильтрации [3], основанные на применении известного фильтра Калмана и его модификаций. Возможности и целесообразность применения того или иного подхода во многом определяется спецификой решаемых задач, составом измерений, а также требованиями, предъявляемыми к точности, надежности и оперативности решения соответствующих навигационных задач.

Применительно к задачам определения орбит КО по результатам угловых измерений наземных оптико-электронных станций (ОЭС), как показывают результаты исследований и накопленный опыт, использование алгоритмов традиционного линеаризованного фильтра Калмана не обеспечивает требуемой эффективности. Это объясняется существенной нелинейностью задачи оценивания, обусловленной нелинейностью динамической модели объекта наблюдения и модели угловых измерений, которая приводит к изменению закона распределения ошибок при дискретной обработке измерений, и влиянием других факторов [3, 5]. Отмечено, что в рассматриваемом классе задач определения орбит лежащие в основе рекуррентных алгоритмов байесовские условные функции плотности вероятностей могут существенно отличаться от гауссовской. Указанные факторы часто приводят к повышенным ошибкам определения параметров орбит и даже к расходимости вычислительного процесса оценивания.

В последние годы вопросы разработки новых типов нелинейных фильтров Калмана для определения орбит КО по результатам обработки угловых измерений рассматривались, в частности, в работах [6-13]. Основное направление этих работ состоит в стремлении учесть негауссовский характер этой проблемы при помощи плотности вероятностей функций, которые являются более общими, чем распределение Гаусса.

Так, в [9] для обеспечения точности и надежности динамической фильтрации угловых измерений предложено использовать распределение Мизеса. В работе [10] для решения задач нелинейной фильтрации предлагается использовать модель полиномиального хаоса. Однако осталось неясным, как можно ввести полиномы хаоса в рекурсивный алгоритм оценивания. В [7, 8, 11-13] исследована возможность применения Гауссовых смесей различной степени сложности. В работах [11, 12] предложены специальные процедуры, позволяющие контролировать точность аппроксимации условной байесовской плотности вероятности. Этот методический подход получил дальнейшее развитие в [6] и [13] в части обобщения результатов, полученных в [11] и [12]. К указанному направлению исследований относится и работа [14], в которой используются дополнительно мягкие ограничения на допустимую область при формировании Гауссовых смесей.

Предложенные в рассмотренных выше работах методические средства расширяют возможности динамической фильтрации. Однако они не позволяют во всех случаях получать надежный результат и не решают проблему точности и надежности навигационных определений применительно к рассматриваемому классу задач оценивания в целом [3, 5].

Ряд исследований, проведенных в последние годы, посвящены проблематике создания орбитальных систем оптического наблюдения космического пространства в интересах обеспечения астероидной и кометной безопасности Земли, а также развитию наземной сети ОЭС станций для определения орбит элементов космического мусора и прогнозирования опасных ситуаций, связанных с возможным столкновением с действующими КА [5, 18-20].

Особую значимость в решении проблем построения системы контроля орбит космического мусора имеет работа [5], в которой рассмотрен весь комплекс вопросов, связанных с состоянием и перспективами развития наземной сети ОЭС, организации и методического обеспечения процессов определения орбит элементов космического мусора в околоземном космическом пространстве. При этом особо отмечается роль методов статистической обработки по полной выборке измерений в рассматриваемых задачах определения орбит.

В [18] представлена концепция космической системы обнаружения опасных небесных тел. Предложен вариант компоновки КА с использованием малоразмерной платформы, а также даны предварительные оценки основных параметров системы. В [19] исследованы различные варианты организации космического патруля для обнаружения и каталогизации опасных для Земли КО. В их основе лежит идея создания «оптического барьера» с помощью телескопов, размещенных на гелиоцентрической орбите. В [20] проведен анализ характеристик точности определения орбит, рассчитанных по коротким дугам наблюдений. При этом ставилось условие, что длина дуги наблюдений должна обеспечить уверенную классификацию орбит малых небесных тел, которая позволила бы выделить потенциально опасные тела, угрожающие столкновением.

Работа [21] посвящена анализу влияния различных возмущающих факторов на высокоточный прогноз орбит КО. Проведена систематизация возмущений для высокоорбитальных и низкоорбитальных КО. Дана оценка их степени влияния и разработаны модели возмущений, обеспечивающие существенное повышение точности прогноза эфемерид. Полученные результаты имеют немаловажное значение для обеспечения точности навигационных определений траекторий движения орбитальных объектов, а также для надежного прогнозирования возможных столкновений функционирующих КА с элементами космического мусора.

На основании проведенного выше анализа можно сделать вывод, что в настоящее время основными методами определения орбит КА являются методы, реализующие совместную обработку результатов наблюдений по полной выборке. Они широко освещены в отечественной и зарубежной литературе и успешно решают широкий круг важных и сложных прикладных задач. Однако вопросы улучшения их точностных и вычислительных характеристик продолжают оставаться актуальными.

Созданная методология базируется на непосредственном применении в динамических задачах оценивания условий метода максимального правдоподобия (ММП) и метода наименьших квадратов. По смыслу они представляют собой необходимые условия оптимальности, характерные для прямых методов оптимизации.

Вместе с тем необходимо отметить, что методы теории оптимальной обработки измерений, как и методы теории оптимального управления, могут строиться и развиваться на основе использования различных форм и принципов формирования условий оптимальности — как прямых, так и вариационных. Вариационные условия оптимальности создают новую базу для решения данного класса задач.

Каждая форма условий оптимальности имеет свою область наиболее рационального применения. Теоретический анализ и накопленный опыт практического применения методов теории оптимального управления убедительно показывает, что там, где удается реализовать вариационные условия оптимальности (принцип максимума), обеспечиваются лучшие точностные и вычислительные характеристики алгоритмов по сравнению с алгоритмами управления, основанными на прямых методах оптимизации. Поэтому можно ожидать, что разработка и применение вариационного подхода к задачам определения орбит КО по угловым измерениям ОЭС также позволит обеспечить необходимые вычислительные и точностные характеристики соответствующих алгоритмов.

Вопросы теоретического обоснования и применения указанного вариационного подхода к задачам статистического оценивания нелинейных динамических систем рассматривались в работах авторов [22, 23].

Данная статья посвящена вопросам применения указанного вариационного подхода к решению задач оценивания параметров траектории движения орбитального объекта по результатам угловых измерений, проводимых наземными ОЭС, с использованием критерия максимального правдоподобия. Приводятся модели динамики КО, модели измерений, соответствующие системы сопряженных дифференциальных уравнений краевой задачи, алгоритм определения оценок параметров орбиты, а также результаты тестовых расчетов применительно к условиям полета КО МЕТЕОР – ПРИРОДА (по международной классификации — METEOR PRIRODA).

Характеристики сходимости итерационных процессов вариационного оценивания параметров орбиты КО во многом зависят от точности определения начального приближения неизвестного вектора кинематических параметров. Для получения практически приемлемых результатов здесь могут быть использованы приближенные численно-аналитические решения, которые приведены в работах [4, 24, 25], полученные применительно к условиям движения КО в центральном гравитационном поле Земли по трем или четырем измерительным точкам. Этот вопрос кратко рассматривается ниже в пункте 5.

2. Общая постановка задачи и вариационные условия оптимальности оценок. Рассмотрим задачу оценивания параметров движения динамического объекта, которая заключается в наилучшем в некотором смысле определении n-мерного вектора его исходного состояния $\overline{x}_0$ на заданный начальный момент времени $t = t_0$ по результатам измерений, проводимых в N точках t_i, заданных на интервале измерений $\tau = T - t_0$, где T — конечный момент интервала измерений.

Пусть динамика объекта описывается векторным дифференциальным уравнением:

$$\dot{\overline{x}} = \overline{\varphi}(\overline{x}, t), \quad \overline{x}(t_0) = \overline{x}_0, \quad t \in [t_0, T]. \tag{1}$$

Измерениям подвергается m-мерный вектор:

$$\overline{\psi}(t) = \overline{\psi}\left[\overline{q}(t)\right].$$

Измеренное значение вектора $\overline{\psi}$ в момент t_i обозначим как $\overline{y}(t_i) = \overline{y}_i$, и представим модель измерений в виде:

$$\overline{y}(t_i) = \overline{\psi}[\overline{x}(t_i)] + \overline{\delta}_i;$$
$$i = 1(1)N; \quad t_i \in [t_0, T].$$

Здесь $\overline{\delta}_i$ — m-мерный вектор случайных ошибок измерений, стохастическое изменение которого зададим некоторым многомерным непрерывным дифференцируемым распределением $f(\overline{\delta}_i, \overline{\alpha}_i)$ с параметрами $\overline{\alpha}_i$, отличающемся в общем случае от нормального распределения.

Требуется найти такую оценку вектора $\overline{x}_0$, которая обеспечивает экстремальное значение функционала:

$$I = \sum_{i=1}^{N} \rho_i \left\{ \overline{y}(t_i), \overline{\psi}[\overline{x}(t_i), \overline{c}_1],\ \overline{\alpha}_{\mathrm{i}} \right\}, \tag{2}$$

где

$$\rho_i = \ln f_i \left\{ \overline{y}(t_i) - \overline{\psi}[\overline{x}(t_i), \overline{c}_1], \overline{\alpha}_i \right\};\ \ i = 1(1)N.$$

Данный функционал является логарифмической функцией правдоподобия. Предполагается выполнение известных условий наблюдаемости.

В работе [22] показано, что задача определения оптимальной оценки вектора $\overline{x}_0$ и порождаемой ей оптимальной траектории $\overline{x}(\overline{x}_{\mathbf{0}}, t)$ сводится к решению двухточечной краевой задачи для канонической системы:

$$\dot{\overline{x}} = \frac{\partial H}{\partial \overline{\lambda}};\ \dot{\overline{\lambda}} = -\frac{\partial H}{\partial \overline{x}},$$

где $H = \overline{\lambda}^{\mathrm{T}} \overline{\varphi}(\overline{x}, t)$ — гамильтониан системы; $\overline{\lambda}$ — n-мерная вектор-функция сопряженных переменных с промежуточными и граничными (краевыми) условиями:

$$\overline{\lambda}(t_i^+) = \overline{\lambda}(t_i^-) + \frac{\partial \rho}{\partial \overline{x}}[\overline{y}_i, \overline{\psi}(\overline{x}_i), t_i];$$
$$\overline{\lambda}(t_0) = 0;\ \ \overline{\lambda}(T) = 0.$$

В совокупности эти соотношения характеризуют вариационные условия оптимальности оценок. Таким образом, рассматриваемую задачу можно интерпретировать как двухточечную краевую задачу с промежуточными ограничениями на сопряженный вектор $\overline{\lambda}$.

Труды СПИИРАН. 2019. Том 18 № 5. ISSN 2078-9181 (печ.)
ISSN 2078-9599 (онлайн), www.proceedings.spiiras.nw.ru

При нормальном законе распределения ошибок измерений $N(0, K_{\delta_i})$ с нулевым вектором математического ожидания и корреляционной матрицей K_{δ_i} необходимо найти такую оценку вектора $\bar{x}_0$, которая обеспечивает минимальное значение функционала:

$$J = \sum_{i=1}^{N} \left\{ \bar{y}(t_i) - \bar{\psi}[\bar{x}(t_i)] \right\}^T K_{\delta_i}^{-1} \left\{ \bar{y}(t_i) - \bar{\psi}[\bar{x}(t_i)] \right\}. \tag{3}$$

В этом случае краевая задача вариационного оценивания представляется следующими уравнениями и условиями:

$$\dot{\bar{x}} = \frac{\partial H}{\partial \bar{\lambda}}; \;\; \dot{\bar{\lambda}} = -\frac{\partial H}{\partial \bar{x}}; \tag{4}$$

$$\begin{gathered} \bar{\lambda}(t_i^+) = \bar{\lambda}(t_i^-) + \frac{\partial \bar{\psi}_i^T}{\partial \bar{x}_i} K_{\delta_i}^{-1} \left\{ \bar{y}_i - \bar{\psi}[\bar{x}(t_i)] \right\}; \;\; i = 1(1)N; \\ \bar{\lambda}(t_0) = 0; \;\; \bar{\lambda}(T) = 0. \end{gathered} \tag{5}$$

Для решения данной краевой задачи заметим, что оптимальная оценка вектора параметров движения объекта $\bar{x}_0$ является корнем уравнения:

$$\bar{\lambda}(\bar{x}_0, T) = 0, \tag{6}$$

заданного неявно на процедурах интегрирования системы (4).

Здесь $\bar{\lambda}(\bar{x}_0, T)$ есть значение сопряженного вектора, определенное для конечного момента времени $t = T$ -мерного интервала.

Для решения указанного уравнения могут быть использованы различные численные методы, такие как метод Ньютона и другие. Вычислительная схема метода Ньютона имеет вид:

$$\begin{gathered} \bar{x}_{0_{i+1}} = \bar{x}_{0_i} - \left[\frac{\partial \bar{\lambda}(\bar{x}_0, T)}{\partial \bar{x}_0} \right]_i^{-1} \bar{\lambda}(\bar{x}_{0_i}, T); \\ \det \left[\frac{\partial \bar{\lambda}(\bar{x}_{0_i}, T)}{\partial \bar{x}_{0_i}} \right] \neq 0, \end{gathered} \tag{7}$$

где i — номер итерации.

Для вычисления матрицы частных производных, входящей в (7), можно использовать численный метод конечных разностей.

Перейдем к непосредственному рассмотрению вопросов применения данного вариационного подхода к решению задач определения параметров траектории орбитального объекта по результатам угловых измерений, проводимых наземными ОЭС.

3. Математические модели краевой задачи вариационного определения параметров траектории орбитального объекта по результатам угловых измерений, проводимых наземными оптико-электронными средствами. Для реализации изложенного выше вариационного подхода к определению параметров траектории орбитального объекта по результатам угловых измерений, проводимых наземными ОЭС, необходимо, прежде всего, конкретизировать основные математические модели, входящие в постановку краевой задачи оценивания. Поэтому рассмотрим уравнения движения КО, математические модели измерений, а также сопряженную систему дифференциальных уравнений.

Уравнения движения КО. При решении задач определения параметров траектории орбитального объекта по результатам угловых измерений, проводимых наземными ОЭС, будем использовать относительную гринвичскую систему координат (ГСК) $Oxyz$ с началом в центре масс Земли, плоскость (xy) совпадает с плоскостью экватора, ось x направлена в нулевой (Гринвичский) меридиан, ось z — по вектору угловой скорости вращения Земли, а ось y дополняет систему до правой.

Уравнения движения КО могут быть представлены с любой требуемой степенью сложности в зависимости от применяемых моделей действующих сил. Это не является ограничивающим фактором для применения вариационного варианта ММП для статистической обработки измерений. Если ограничиться учетом второй зональной гармоники в разложении геопотенциала, то уравнения движения КО можно представить в следующем удобном для программирования виде [1]:

$$\begin{gathered}
\dot{x} = V_x; \quad \dot{y} = V_y; \quad \dot{z} = V_z; \\
\dot{V}_x = (\Omega_3^2 - A)x + 2\Omega_3 V_y - S\rho V V_x; \\
\dot{V}_y = (\Omega_3^2 - A)y + 2\Omega_3 V_x - S\rho V V_y; \\
\dot{V}_z = (2BC - A)z - S\rho V V_z,
\end{gathered} \tag{8}$$

где

$$A = B[\alpha_{00} + C(D-1)];\ \ B = \frac{1}{r^2}\frac{R_Э}{r};$$

$$C = \frac{3}{2}\alpha_{20}\left(\frac{R_Э}{r}\right)^2;\ \ D = 5\left(\frac{z}{r}\right)^2;$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};\ \ r_1 = \sqrt{x^2 + y^2};$$

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2};\ \ \alpha_{00} = \frac{\mu}{R_Э};\ \ \alpha_{20} = -\frac{c_{20}}{R_Э^3};$$

x, y, z, V_x, V_y, V_z — составляющие векторов координат и скорости КА в ГСК; S — баллистический коэффициент; ρ — плотность воздуха; μ, c_{20} — параметры модели ГПЗ; $R_Э$ — экваториальный радиус Земли.

При расчете силы сопротивления воздуха принимается, что атмосфера вращается вместе с Землей. Влияние ветра на движение КА не учитывается. При таких допущениях $V_{отн} = V$.

Модель измерений. Модели измерений представляют собой математические зависимости между измеряемыми и текущими кинематическими параметрами движения КО, а также ошибками измерений.

Независимым измерениям с помощью ОЭС наземного измерительного пункта (ИП) подвергается двумерный вектор:

$$\bar{\psi}(t) = \bar{\psi}\left[\bar{q}(t)\right], \tag{9}$$

где

$$\begin{gathered} \bar{\psi}(t) = \left[A(t), \gamma(t)\right]^T;\ \ \bar{q}(t) = \left[\bar{r}(t), \bar{V}(t)\right]^T; \\ \bar{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)]^T;\ \ \bar{V}(t) = [V_x(t), V_y(t), V_z(t)]^T; \end{gathered} \tag{10}$$

$A(t)$ — азимут объекта; $\gamma(t)$ — угол места объекта; $\bar{r}(t)$, $\bar{V}(t)$ — векторы координат и скорости КО в ГСК соответственно.

Измерительные ОЭС имеют соответствующие географические координаты точек стояние в ГСК: широту $B_П$, долготу $L_П$ и высоту $h_П$.

Измеренные значение вектора $\bar{\psi}_i$ в моменты t_i обозначим через $\bar{y}_i$ и представим модель измерений в виде:

$$\begin{aligned} &\bar{y}(t_i) = \bar{\psi}[\bar{q}(t_i)] + \bar{\delta}_i; \\ &i = 1(1)N; \;\; t_i \in [t_1, t_N], \end{aligned} \tag{11}$$

где N — число измерительных точек; t_1 — момент первого измерения, $t_1 \geq t_0$; t_N — момент последнего измерения, $t_N > T$.

$\bar{\delta}_i$ — m-мерный вектор случайных ошибок измерений.

Будем полагать, что $\bar{\delta}_i$ подчиняется нормальному закону распределения с нулевым математическим ожиданием и корреляционной матрицей K_{δ_i}:

$$\delta_i \to N(0, K_{\delta_i}),$$

где

$$K_{\delta_i} = \begin{bmatrix} \sigma^2_{A_i} & K_i \\ K_i & \sigma^2_{\gamma_i} \end{bmatrix}.$$

Здесь σ_{A_i} и σ_{γ_i} — среднеквадратические ошибки измерений азимута и угла места КО в соответствующие моменты измерений t_i, $i = 1(1)N$, K_i — корреляционные моменты ошибок измерений.

Приведем расчетные соотношения, определяющую связь измеряемых угловых параметров A, γ с кинематическими параметрами траектории КА и координатами ОЭС, заданными в ГСК.

Обозначим через $\bar{\rho} = [\xi, \eta, \zeta]^T$ вектор координат КО, определяемый в топоцентрической измерительной системе координат (ИСК) $O_П \xi, \eta, \zeta$. В этой системе точка $O_П$ находится в точке расположения измерительного пункта, ось $O_П \xi$ направлена на северный полюс Земли по касательной к меридиану точки $O_П$, ось $O_П \eta$ — по внешней нормали к земному эллипсоиду, а ось $O_П \zeta$ дополняет систему до правой. Тогда расчетные значения измеряемых параметров $\bar{\psi}_i(t) = \bar{\psi}\left[\bar{q}(t_i)\right]$, входящие в оптимизируемый функционал и в формулы определения скачков сопряженных переменных (5), будут вычисляться путем интегрирования уравнений движения в ГСК на моменты t_i по следующим формулам:

$$A = \operatorname{arctg}\frac{\zeta}{\xi};\;\; 0^\circ \le A \le 360^\circ;$$
$$\gamma = \operatorname{arsin}\frac{\eta}{D};\;\; -90^\circ \le \gamma \le 90^\circ; \tag{12}$$
$$D = \sqrt{(x-x_П)^2 + (y-y_П)^2 + (z-z_П)^2},$$

где $x_П, y_П, z_П$ — координаты пункта наблюдения, определяемые по формулам:

$$x_П = \left(r_B + h_П\right)\cos B_П \cos L_П;$$
$$y_П = \left(r_B + h_П\right)\cos B_П \sin L_П;$$
$$z_П = \left(r_B(1-\alpha) + h_П\right)\sin B_П; \tag{13}$$
$$r_B = \frac{a_e}{\sqrt{1-e^2\cdot\sin^2(B)}},$$

где $x_П, y_П, z_П$ — координаты пункта наблюдения в ГСК; $B_П, L_П$ — геодезические широта и долгота измерительного пункта соответственно; $h_П$ — высота пункта наблюдения над поверхностью общего земного эллипсоида; α — коэффициент полярного сжатия Земли; a_e — большая полуось Земного эллипсоида; e — эксцентриситет земного эллипсоида.

Входящие в формулы (12) величины ξ, η, ζ вычисляются по формулам:

$$\begin{bmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{bmatrix} = \Lambda\begin{bmatrix}x-x_П\\ y-y_П\\ z-z\end{bmatrix};$$
$$\Lambda = \begin{bmatrix}-\sin B_П\cos L_П & -\sin B_П\sin_П & \cos B_П\\ \cos B_П\cos L_П & \cos B_П\sin L_П & \sin L_П\\ -\sin L_П & \cos B_П & 0\end{bmatrix}. \tag{14}$$

Согласно условию (5), определяющему скачки сопряженных переменных в моменты измерений, при решении навигационной задачи на основе вариационных условий оптимальности необходимо определять матрицу частных производных $\dfrac{\partial\overline{\psi}(\overline{q})}{\partial\overline{q}}$ от измеряемых параметров $\overline{\psi}$ по текущим кинематическим параметрам движения КО $\overline{q}$ для вычисления скачков сопряженного вектора в каждой измерительной точке по следующему алгоритму:

$$\frac{\partial\overline{\psi}(\overline{q})}{\partial\overline{q}} = \left(\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial\overline{r}}, \frac{\partial\overline{\psi}}{\partial\overline{V}}\right), \tag{15}$$

где

$$\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial\overline{r}} = \frac{\partial\overline{\psi}}{\partial\overline{\rho}} \cdot \Lambda; \quad \frac{\partial\overline{\psi}}{\partial\overline{V}} = 0.$$

В этом выражении матрица $\dfrac{\partial\overline{\psi}}{\partial\overline{\rho}}$ определяется путем дифференцирования элементов вектора измеряемых параметров $\overline{\psi}$ по элементам вектора $\overline{\rho} = [\xi, \eta, \zeta]^T$ в топоцентрической ИСК.

Сопряженная система дифференциальных уравнений. Для решения навигационной задачи с использованием вариационных условий оптимальности необходимо конкретизировать вид системы дифференциальных уравнений, описывающих поведение сопряженного вектора $\overline{\lambda}$.

Если поведение исходной динамической системы описывается уравнениями общего вида (1), то сопряженные уравнения в системе (4) принимает следующий общий вид:

$$\dot{\overline{\lambda}} = -\left(\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial\overline{x}}\right)^T \overline{\lambda}. \tag{16}$$

В этом уравнении вектор $\overline{\varphi}$ соответствует вектору правых частей уравнений движения (8).

При записи сопряженной системы дифференциальных уравнений (16) необходимо учитывать возможность ее упрощения с точки зрения полноты учета малых возмущений, входящих в уравнения движения (8), на ограниченных мерных интервалах. К ним относятся сопротивление атмосферы и возмущающее ускорение, обусловленное влиянием сжатия Земли.

Труды СПИИРАН. 2019. Том 18 № 5. ISSN 2078-9181 (печ.)
ISSN 2078-9599 (онлайн), www.proceedings.spiiras.nw.ru

В известной работе В. С. Новоселова [26] было показано, что при решении задач оптимального управления на базе принципа максимума для уравнений движения объекта с малым параметром допустимо упрощать сопряженную систему уравнений без существенной потери точности с точки зрения достижения экстремального значения минимизируемого функционала. При этом уравнения движения КО сохраняют свой вид (8), в которых учитываются указанные возмущения.

Если при составлении сопряженной системы дифференциальных уравнений в уравнениях (8) пренебречь возмущающим влиянием атмосферы, то уравнения (16) можно представить следующим образом:

$$
\begin{gathered}
\dot{\lambda}_1 = -(\Omega_3^2 - A)\lambda_4 - PE_\lambda x + 10BC\frac{xz}{r^2}\lambda_6; \\
\dot{\lambda}_2 = -(\Omega_3^2 - A)\lambda_5 - PE_\lambda y + 10BC\frac{yz}{r^2}\lambda_6; \\
\dot{\lambda}_3 = -(2BC - A)\lambda_6 - PE_\lambda z + 10BC\frac{z^2}{r^2}\lambda_6 + F_\lambda; \\
\dot{\lambda}_4 = -\lambda_1 + 2\Omega_3\lambda_5;\ \ \dot{\lambda}_5 = -\lambda_2 - 2\Omega_3\lambda_4;\ \ \dot{\lambda}_6 = -\lambda_3,
\end{gathered}
\tag{17}
$$

где

$$
\begin{gathered}
P = 3A + 2BC(2D - 1); \\
Q = 2BCD; \\
E_\lambda = \frac{x\lambda_4 + y\lambda_5 + z\lambda_6}{r^2}; \\
F_\lambda = QE_\lambda\frac{r^2}{z}.
\end{gathered}
$$

Особенностью этой системы сопряженных дифференциальных уравнений (17) состоит в том, что она строго учитывает сжатие ГПЗ. Данная система получена, согласно (16), путем дифференцирования правых частей уравнений движения (8) по элементам вектора фазового состояния КО x, y, z, V_x, V_y, V_z, а также простых алгебраических преобразований, связанных с приданием системе (17) наиболее компактной формы, удобной для программирования и экономичной в вычислительном отношении при проведении расчетов.

Если при составлении сопряженных систем дифференциальных уравнений дополнительно пренебречь влиянием сжатия ГПЗ, то уравнения (17) значительно упрощаются. В данном случае $\alpha_{20} = 0$ и выполняются следующие соотношения:

$$C = 0;\ \ A = \alpha_{00} B;\ \ P = 3A;\ \ Q = 0.$$

Поэтому сопряженная система (17) принимает более простой вид:

$$\begin{gathered}
\dot{\lambda}_1 = -(\Omega_3^2 - B\alpha_{00})\lambda_4 - 3B\alpha_{00}E_\lambda x;\\
\dot{\lambda}_2 = -(\Omega_3^2 - B\alpha_{00})\lambda_5 - 3B\alpha_{00}E_\lambda y;\\
\dot{\lambda}_3 = B\alpha_{00})\lambda_5 - 3B\alpha_{00}E_\lambda z;\\
\dot{\lambda}_4 = -\lambda_1 + 2\Omega_3\lambda_5;\ \ \dot{\lambda}_5 = -\lambda_2 - 2\Omega_3\lambda_4;\ \ \dot{\lambda}_6 = -\lambda_3.
\end{gathered} \tag{18}$$

4. Краевая задача вариационного оценивания. На основании изложенного в пунктах 2 и 3 решения навигационной задачи в ГСК с использованием вариационных условий оптимальности сводится к решению двухточечной краевой задачи для П-системы из двенадцати нелинейных дифференциальных уравнений (8) и (17) либо (18). При использовании сопряженной системы (18) полная система дифференциальных уравнений, подлежащая совместному интегрированию в ходе решения краевой задачи, дается следующими соотношениями:

$$\begin{gathered}
\dot{x} = V_x;\quad \dot{y} = V_y;\quad \dot{z} = V_z;\\
\dot{V}_x = (\Omega_3^2 - A)x + 2\Omega_3 V_y - S\rho V V_x;\\
\dot{V}_y = (\Omega_3^2 - A)y + 2\Omega_3 V_x - S\rho V V_y;\\
\dot{V}_z = (2BC - A)z - S\rho V V_z;\\
\dot{\lambda}_1 = -(\Omega_3^2 - B\alpha_{00})\lambda_4 - 3B\alpha_{00}E_\lambda x;\\
\dot{\lambda}_2 = -(\Omega_3^2 - B\alpha_{00})\lambda_5 - 3B\alpha_{00}E_\lambda y;\\
\dot{\lambda}_3 = B\alpha_{00})\lambda_5 - 3B\alpha_{00}E_\lambda z;\\
\dot{\lambda}_4 = -\lambda_1 + 2\Omega_3\lambda_5,\ \ \dot{\lambda}_5 = -\lambda_2 - 2\Omega_3\lambda_4;\ \ \dot{\lambda}_6 = -\lambda_3.\\
\lambda_s(t_0) = 0;\ \ \lambda_s(T) = 0;\ \ s = 1, 2, ..., 6.
\end{gathered} \tag{19}$$

Здесь в уравнениях движения, описывающих поведение фазовых координат x, y, z, V_x, V_y, V_z , полностью учитываются как сжатие ГПЗ, так и влияние атмосферы.

 Труды СПИИРАН. 2019. Том 18 № 5. ISSN 2078-9181 (печ.)
ISSN 2078-9599 (онлайн), www.proceedings.spiiras.nw.ru

В моменты измерений t_i сопряженный вектор $\overline{\lambda} = [\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_6]$ претерпевает скачкообразные изменения:

$$\overline{\lambda}(t_i^+) = \overline{\lambda}(t_i^-) + \Delta\overline{\lambda}(t_i), \tag{20}$$

где

$$\Delta\overline{\lambda} = \frac{\partial\overline{\psi}_i^T}{\partial\overline{q}_i} K_{\delta_i}^{-1} \left\{ \overline{y}_i - \overline{\psi}[\overline{q}(t_i)] \right\}.$$

Для рассматриваемого выше состава измерений значения $\overline{\psi}[\overline{q}(t_i)]$ определяются по формулам (12), а элементы матрицы частных производных от измеряемых параметров по текущим элементам траектории — согласно (15).

В ходе решения краевой задачи необходимо определить неизвестный вектор исходного состояния $\overline{q}_0$ на заданный момент t_0 по известным краевым условиям для сопряженного вектора $\overline{\lambda}(t_0) = 0$ и $\overline{\lambda}(T) = 0$. Для решения этой задачи, как отмечено в пункте 2, могут применяться метод Ньютона (7), его модификации и другое.

5. Определение начального приближения для итерационного определения орбиты. Характеристики сходимости итерационных процессов вариационного оценивания параметров орбиты КО во многом зависят от точности определения начального приближения неизвестного вектора кинематических параметров. Начальные условия при итерационном решении задачи оценивания определяются в зависимости от того, имеются ли данные о конкретном КО в каталоге или он является новым. В первом случае для определения НУ необходимо проинтегрировать уравнение движения от момента времени, соответствующего данным каталога, до момента входа КО в зону видимости ОЭС или до начала момента времени принятого мерного интервала. Во втором случае для определения начального приближения могут быть, в частности, использованы приближенные алгоритмы, приведенные в работах [4, 24, 25], полученные применительно к условиям движения КО в центральном гравитационном поле Земли по трем или четырем измерительным точкам.

Различные алгоритмические способы решения данной задачи подробно рассмотрено в известной монографии М. Ф. Субботина [4]. Наиболее распространенным является метод Гаусса, который приводит к итерационному решению известного уравнения Лагранжа относительно дальности от измерительного пункта до КО. Для ускорения расчетов по методу Гаусса в этой работе, в частности, рекомендуется использовать приближенные формулы Гиббса.

Метод Гаусса широко применяется в астрономии для определения орбит астероидов и комет на гелиоцентрических орбитах. В этом случае сложно указать как дальности до наблюдаемых объектов, так и параметры их орбит. Однако, когда речь идет о системах контроля околоземного космического пространства, это не так. Практический интерес для таких систем представляют объекты искусственного происхождения, находящиеся на околокруговых и эллиптических геоцентрических орбитах.

Поэтому при разработке методов определения орбит таких КО необходимо учитывать имеющиеся реальные ограничения на топоцентрические дальности:

$$D_{\min} < D_i < D_{\max},$$

где $D_{\min}$ = 120 км, $D_{\max}$ = 50000 км и более.

Эти ограничения на топоцентрическую дальность определяются характеристиками орбит реально существующих КО. Их учет позволяет получить приближенные оценки дальности от измерительного пункта до КО. Методика использования метода Гаусса для определения начальных параметров движения КО по геоцентрическим орбитам изложена в [24]. Она предусматривает варьирование неизвестного значения начальной дальности в указанном диапазоне ее изменения при решении уравнений Лагранжа.

В настоящее время известно несколько модификаций метода Гаусса, которые используют одну и ту же процедуру для получения начального приближения и различаются в основном алгоритмами, используемыми в итерационных процедурах уточнения начального приближения. Такие модифицированные алгоритмы приведены в указанных выше работах [24, 25].

Из работ последних лет, связанных с данной проблематикой, отметим также работы [15-17]. В [15] и [16] рассмотрена задача начального определения орбиты КО по результатам оптических измерений, получаемых на совокупности коротких дуг, которые относят друг от друга на различные промежутки времени. В работе [17] предложена вероятностное определение начальной орбиты КО с использованием гауссовской смешанной модели.

Таким образом, в настоящее время имеется целый ряд алгоритмов приближенного определения начальных условий для оценивания параметров орбитального движения КО по оптическим измерениям, которые могут обеспечить надежную сходимость вычислительного процесса решения рассматриваемой задачи в ее строгой нелинейной постановке.

6. Общий алгоритм решения краевой задачи вариационного оценивания. Общая последовательность вычислений при решении краевой задачи вариационного оценивания параметров орбитального движения КО состоит в следующем.

1. По предварительно определенному начальному значению неизвестного вектора фазового состояния КО $\overline{q}_0 = [\overline{r}_0, \overline{V}_0]^T$ и по начальным условиям для сопряженных переменных $\overline{\lambda}_0 = \overline{\lambda}(t_0) = 0$ совместно интегрируются основная и сопряженная системы дифференциальных уравнений П-системы (19) на принятом мерном интервале $t \in [t_0, T]$.

В ходе интегрирования в моменты измерений t_i, $i = 1(1)N$, по формулам (20) учитываются скачки сопряженных переменных $\Delta\lambda(t_i)$.

2. По результатам интегрирования дифференциальных уравнений, входящих в (19), вычисляются вектор состояния $\overline{q}(\overline{q}_0, T)$ и невязка для сопряженных переменных в конечный момент времени $\overline{\lambda}(\overline{q}_0, T)$.

3. Методом конечных разностей вычисляется значение и, затем, обращается матрица частных производных от сопряженных переменных в конечный момент времени T по определяемым начальным условиям $\left[\dfrac{\partial\overline{\lambda}(\overline{q}_0, T)}{\partial\overline{q}_0}\right]_s$.

4. Реализуется вычислительная схема метода Ньютона по формуле (7) и определяется уточненное значение неизвестного вектора параметров движения $\overline{q}_0$.

5. Проверяются заданные условия окончания итерационного процесса по точности решения. Если точностные требования не выполняются, то вычислительный процесс повторяется, начиная с пункта 1, при новых уточненных начальных условиях. Этот процесс повторяется итерационно, пока не будет достигнута требуемая точность расчета.

7. Результаты тестовых расчетов. Приведем некоторые результаты тестовых расчетов, связанных со статистическим оцениванием параметров орбиты по угловым измерениям ОЭС по приведенному в пункте 4 вариационному алгоритму метода максимального правдоподобия, применительно к КО МЕТЕОР – ПРИРОДА. Предполагалось, что ОЭС находится в районе горогда Кисловодск с геодезическими координатами $B_П = 43.91°$, $L_П = 42.72°$.

Основная цель численных расчетов заключалась в исследовании сходимости указанного выше алгоритма оценивания, а также влияния ошибок измерений на смещение получаемых оценок относительно «истинных» (точных) значений.

Исходные данные определялись по каталогу NORAD США в TLE-элементах [5] на дату 19.01.2017 года и время 03 часа 28 минут 59.82 секунд. Эти данные преобразовывались в прямоугольные элементы ГСК. Далее по полученным начальным условиям путем численного интегрирования уравнений движения решалась задача определения временных и кинематических параметров нахождения КО в зонах видимости заданной ОЭС. При этом были учтены требуемые условия освещенности КО (условия проведения измерений в ночное время), а также допустимые условия по углу возвышения КО над горизонтом ОЭС, который составлял 12º.

Для проведения тестовых расчетов была выбрана зона видимости КО МЕТЕОР – ПРИРОДА на дату 22.01.2017 года со временем входа в зону видимости 02 часа 47 минут 13 секунд и временем выхода из зоны 02 часа 53 минут 30 секунд. Таким образом, мерный интервал составил 377 секунд.

В качестве точных значений эфемерид КО принимались значения вектора состояния КО в ГСК, полученного на момент входа в указанную зону видимости.

На следующем этапе формировался массив угловых квазиизмерений. Для этого, во-первых, определялась расчетная траектория движения КО в зоне видимости на мерном интервале по параметрам которой производился расчет значений азимута и угла места на мерном интервале с дискретностью измерений 1 с. Для учета ошибок измерений проводилось статистическое моделирование выборки случайных измерений согласно нормальному закону их распределения с заданными значениями среднеквадратических отклонений $\sigma_A = 1''$ и $\sigma_\gamma = 1''$.

Сформированный массив случайных измерений на мерном интервале $T = 377$ с подвергался статистической обработке путем численного решения краевой задачи вариационного оценивания (19), (20) методом Ньютона (7) с использованием модели угловых измерений (12).

С целью проверки области сходимости решения выбирались достаточно грубые начальные приближения $\bar{q}_{00}$. Они отличались от точных значений $\bar{q}_0$ на 50 км по элементам вектора координат и на 50 м/с по проекциям вектора скорости. Итерационный процесс прекращался после выполнения пяти итераций.

Результаты расчетов приведены в таблицах 1 и 2.

Таблица 1. Результаты оптимального оценивания

Параметры оценивания	x_0, км	y_0, км	z_0, км	V_{x0}, км/с	V_{y0}, км/с	V_{z0}, км/с
Точные значения	4643.812	3641.892	3561.745	-2.08926	-3.64065	6.43072
Начальное приближ-е	4593.812	3591.892	3511.745	-2.13926	-3.69065	6.38072
Оптимальн. оценки	4643.826	3641.896	3561.736	-2.08929	-3.64069	6.43077
Ошибки оценивания	0.013	0.005	-0.009	-0.00004	-0.00004	0.00005

Таблица 2. Сходимость вычислительного процесса

Номер итерации	Ошибки оценивания					
	δx_0, м	δy_0, м	δz_0, м	δv_{x0}, м/с	δv_{y0}, м/с	δv_{z0}, м/с
0	50000	50000	50000	50	50	50
1	12451	4970	-9102	-031.79	-46.56	51.13
2	2085	997	-900	-4.42	-6.52	7.53
3	8	26	82	0.11	0.16	-0.11
4	30	-13	22	0.07	0.12	-0.13
5	10	5	-9	-0.04	-0.04	0.05

В таблице 1 даны точные значения параметров начального фазового состояния КА в абсолютной геоцентрической системе координат, принятое начальное приближение элементов уточняемого вектора, полученные в результате вариационной обработки измерений оптимальные оценки, а также характеристики точности оценивания.

В таблице 2 представлены значения абсолютных ошибок навигационного оценивания по итерациям. Анализ показывает, что в рассмотренных условиях достаточно проведения трех или четырех итераций. При выполнении четырех итераций абсолютные ошибки оценок вектора начального состояния КО не превышают 30 м по элементам вектора координат и 0.13 м/с по элементам вектора скорости. Максимальные относительные ошибки составляют по координатам не более $0.6 \cdot 10^{-5}$, а по элементам вектора скорости не более $0.3 \cdot 10^{-4}$.

Эти данные свидетельствуют о достаточно высокой точности и скорости сходимости вычислительного процесса даже при больших отклонениях начального приближения от точного значения оцениваемого вектора фазового состояния КО.

8. Заключение. В заключении отметим, что предлагаемые методические средства могут быть использованы при разработке и модернизации алгоритмов оптимального статистического оценивания параметров состояния различных типов КО в составе автоматизированных комплексов обработки наблюдений и, в частности, при решении задачи определения параметров орбитального движения КО по угловым измерениям ОЭС, входящих в состав автоматизированной системы предупреждения об опасных ситуациях в околоземном космическом пространстве [12]. Они могут также применяться для решения задач тестирования приближенных алгоритмов навигационного оценивания и для выбора эффективной программы измерений.

В целом исследования показали, что вариационный подход является вполне работоспособным дополнением к существующей методологии навигационного определения параметров движения КО, основанной на прямом применении метода максимального правдоподобия. Предложенные алгоритмы могут применяться как самостоятельно, так и параллельно с алгоритмами прямого подхода для контроля правильности вычислений и обеспечения надежности результатов оценивания, что особенно важно в условиях массовых расчетов, проводимых в системе контроля космического пространства.

Литература

1. *Агаджанов П.А., Дулевич В.Е., Коростелева А.А* Космические траекторные измерения // М.: Советское радио. 1969. 504 с.
2. *Нариманова Г.С. Тихонравов М.К.* Основы теории полета космических аппаратов // М.: Машиностроение. 1972. 608 с.
3. *Эльясберг П.Е.* Определение движения по результатам измерений // М.: Наука. 1976. 416 с.
4. *Субботин М.Ф.* Введение в теоретическую астрономию // М.: Наука. 1968. 800 с.
5. *Макарова Ю.Н.* Мониторинг техногенного засорения околоземного пространства и предупреждение об опасных ситуациях, создаваемых космическим мусором: Монография // М.: ЦНИИмаш. 2015. 244 с.
6. *Psiaki M.L.* Gaussian-Mixture Kalman Filter for Orbit Determination Using Angles-Only Data // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2017. vol. 40. no. 9. pp. 2341–2347.
7. *DeMars K.J., Bishop R.H., Jah M.K.* Entropy-Based Approach for Uncertainty Propagation of Nonlinear Dynamical Systems // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2013. vol. 36. no. 4. pp. 1047–1057.
8. *DeMars K.J., Jah M.K.* Probabilistic Initial Orbit Determination Using Gaussian Mixture Models // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2013. vol. 36. no. 5. pp. 1324–1335.
9. *Horwood J.T., Poore A.B.* Gauss von Mises Distribution for Improved Uncertainty Realism in Space Situational Awareness // SIAM/ASA Journal of Uncertainty Quantification. 2014. vol. 2. no. 1. pp. 276–304.
10. *Jones B.A., Doostan A., Born G.H.* Nonlinear Propagation of Orbit Uncertainty Using Non-Intrusive Polynomial Chaos // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2013. vol. 36. no. 2. pp. 430–444.
11. *Bayramoglu E., Ravn O.* A Novel Hypothesis Splitting Method Implementation for Multi-Hypothesis Filters // 2013 10th IEEE International Conference on Control and Automation (ICCA). 2013. pp. 574–579.

12. *Psiaki M.* Gaussian Mixture Nonlinear Filtering with Resampling for Mixand Narrowing // IEEE Transactions on Signal Processing. 2016. vol. 64. no. 21. pp. 5499–5512.
13. *Psiaki M.L., Schoenberg J.R., Miller I.T.* Gaussian Sum Reapproximation for Use in a Nonlinear Filter // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2015. vol. 38. no. 2. pp. 292–303.
14. *Psiaki M.L., Weisman R.M., Jah M.K.* Gaussian Mixture Approximation of Angles-Only Initial Orbit Determination Likelihood Function // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2017. vol. 40. no. 11. pp. 2807–2819.
15. *Lei X. et al.* A geometrical approach to association of space-based very short-arc LEO tracks // Advances in Space Research. 2018. vol. 62. no. 3. pp. 542–553.
16. *Cail H. et al.* Improved tracklet association for space objects using short-arc optical measurements // Acta Astronautica. 2018. vol. 151. pp. 836–847.
17. *DeMars K.J., Jah M.* Probabilistic Initial Orbit Determination Using Gaussian Mixture Models // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2013. vol. 36. no. 5. pp. 1324–1335.
18. *Шугаров А.С. и др.* О концепции экономичной космической системы обнаружения опасных небесных тел // Космические исследования. 2015. Т. 53. № 2. С. 95–104.
19. *Ахметшин Р.З.* Космический патруль: варианты схемы оптического барьера // Космические исследования. 2013. Т. 51. № 4. С. 274–286.
20. *Нароенков С.А., Шустов Б.М., Емельяненко В.В.* О длине дуги наблюдения малого тела солнечной системы, достаточной для классификации его как опасного // Космические исследования. 2013. Т. 51. № 5. С. 372–379.
21. *Марков Ю.Г. и др.* Анализ влияния различных возмущающих факторов на высокоточный прогноз орбит космических аппаратов // Космические исследования. 2016. Т. 54. № 2. С. 164–172.
22. *Миронов В.И., Миронов Ю.В.* Комплексное оценивание параметров состояния нелинейных динамических систем на основе вариационного подхода // Труды СПИИРАН. 2008. Вып. 7. С. 222–229.
23. *Mironov V., Mironov Y., Sokolov B., Yusupov R.* Variational maximum-likelihood method and its application in the aerospace navigation // Information technology and management science. 2013. vol. 16. no. 1. pp. 27–32.
24. *Самотохин А.С., Хуторовский З.Н.* Метод первоначального определения параметров околоземных орбит по трем угловым измерениям // Препринты Института прикладной математики им. МВ Келдыша РАН. 2014. № 0. С. 44–31.
25. *Шеффер В.А.* Вычисление промежуточной возмущенной орбиты по трем и более положениям малого тела на небесной сфере // Астрономический вестник. 2013. Т. 47. С. 40–52.
26. *Новоселов В.С.* Аналитическая теория оптимизации в гравитационных полях // ЛГУ. 1972. 317 с.

Миронов Вячеслав Иванович — д-р техн. наук, профессор, ведущий научный сотрудник, лаборатория информационных технологий в системном анализе и моделировании, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации Российской академии наук (СПИИРАН). Область научных интересов: фундаментальные и прикладные исследования проблем комплексного моделирования, теория оптимального наблюдения и управления динамическими процессами, вычислительная математика, баллистика космических полетов, методы навигации и управления движением ракет-носителей и космических аппаратов, статистический анализ характеристик сложных технических систем. Число научных публикаций — 350. mironuv@yandex.ru; 14-я линия В.О., 39, 199178, Санкт-Петербург, Российская Федерация; р.т.: +7(812)328-3337; факс: +7(812)328-4450.

Миронов Юрий Вячеславович — д-р техн. наук, доцент, ведущий специалист, отдел системного проектирования, АО "Научно-инженерный центр Санкт-Петербургского электро-технического университета"(АО "НИЦ СПб ЭТУ"). Область научных интересов: баллистика космических полетов, методы навигации и управления движением ракет-носителей и космических аппаратов, теория статистического оценивания, вычислительная математика. Число научных публикаций — 150. mironoww.yuriy@yandex.ru; ул. Политехническая, 22, лит. Н, 194021, Санкт Петербург, Российская Федерация; р.т.: +7(812) 703-7583; факс: +7(812) 703-7584.

Хегай Дмитрий Климович — канд. техн. наук, доцент, директор департамента, Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики (Университета «ИТМО»). Область научных интересов: ракетно-космические технологии, космические инфотелекоммуникационные технологии, оптоэлектронные технологиие, экспериментальные исследования в космосе. Число научных публикаций — 70. hdk_ifmo@mail.ru; ул. Политехническая, 49, 197101, Санкт Петербург, Российская Федерация; р.т.: +7(812) 437-1831; факс: +7(812) 498-1070.

DOI 10.15622/sp.2019.18.5.1239-1263

V.I. MIRONOV, Y.V. MIRONOV, D.K. KHEGAY

OPTIMAL DETERMINATION OF SPACE OBJECTS ORBIT BY ANGULAR MEASUREMENTS OF GROUND-BASED OPTOELECTRONIC STATIONS

Mironov V.I., Mironov Y.V., Khegay D.K. **Optimal Determination of Space Objects Orbit by Angular Measurements of Ground-Based Optoelectronic Stations**

Abstract. The successful solution of practical cosmonautics problems is largely achieved by contemporary advances in measurement and computing technology, as well as by improvements in methods of primary and secondary processing of trajectory measurements. Therefore, in long-range programs of space exploration and space technology development, much attention is paid to improving existing and developing new algorithmic and technical means of navigation support for flights of space objects with the purpose to expand capabilities and increasing the efficiency of autonomous navigation systems of spacecraft, as well as ground-based and perspective orbital systems of space monitoring. Currently, active work is underway to modernize and develop promising complexes of specialized optoelectronic devices for monitoring near-Earth space based on angular measurements. The article considers the application of the variational approach for solving problems of statistical estimation of the trajectory parameters of the orbital object by angular measurements, which were carried out by ground-based optoelectronic means that are part of the modern space control system. Models and algorithms for determining estimates of orbital parameters that implement the variational version of the maximum likelihood method are presented, as well as the results of test calculations related to iterative solution of the two-point boundary value problem of variational estimation. The main purpose of the numerical calculations is a study of convergence of the proposed estimation algorithm, as well as the impact of measurement errors on the displacement of the obtained estimates relative to their exact values. The simulation results, presented in the article, correspond to the conditions of the orbital motion of METEOR PRIRODA spacecraft and were obtained using the ephemeris data of the NORAD catalog in TLE-elements.

Keywords: Statistical Estimation, Spacecraft, Nonlinear Dynamical Systems, Maximum Likelihood Criterion, Optical Angular Measurements.

Mironov Vyacheslav Ivanovich — Ph.D., Dr.Sci., Professor, Leading Researcher, Laboratory of Information Technologies in System Analysis and Modeling, St. Petersburg Institute for Informatics and Automation of the Russian Academy of Sciences (SPIIRAS). Research interests: fundamental and applied researches in complex modeling; the theory of optimal observation and control of dynamic processes; computing mathematics; the ballistics of space flight; statistical analysis of complex technical systems. The number of publications — 350. mironuv@yandex.ru; 39, 14-th Line V.O., 199178, St. Petersburg, Russian Federation; office phone: +7(812)328-3337; fax: +7(812)328-4450.

Mironov Yuri Vyacheslavovich — Ph.D., Dr.Sci., Associate Professor, Leading Researcher, Department of System Design, JSC "R&EC ETU". Research interests: ballistics of space flights, methods of navigation and control of the motion of carrier rockets and space vehicles, the theory of statistical estimation, computational mathematics. The number of publications — 150. mironoww.yuriy@yandex.ru; 22, лит. H, Politechnicheskaya str., 194021, St. Petersburg, Russian Federation; office phone: +7(812) 703-7583; fax: +7(812) 703-7584.

Khegay Dmitry Klimovich — Ph.D., Associate Professor, Department Director, ITMO University (Saint Petersburg National Research University of Information Technologies, Mechanics and Optics). Research interests: space-rocket technology, space info-telecommunications technologies, optoelectronic technology, experimental research in space. The number of publications — 70. hdk_ifmo@mail.ru; 49, Kronverksky pr., 197101, St. Petersburg, Russian Federation; office phone: +7(812) 437-1831; fax: +7(812) 498-1070.

References

1. Agadzhanov P.A., Dulevich V.E., Korostelev A.A. *Kosmicheskie traektornye izmerenija* [Space trajectory measurements]. M.: Sov. radio. 1969. 504 p. (In Russ.).
2. Narimanov G.S., Tihonravova M.K. *Osnovy teorii poleta kosmicheskih apparatov* [The fundamentals of the theory of flight of space vehicles]. M.: Mashinostroenie. 1972. 608 p. (In Russ.).
3. Jel'jasberg P.E. *Opredelenie dvizhenija po rezul'tatam izmerenij* [Determination of motion from measurements]. M.: Nauka. 1976. 416 p.
4. Subbotin M.F. *Vvedenie v teoreticheskuju astronomiju* [Introduction to theoretical astronomy]. M.: Nauka. 1968. 800 p. (In Russ.).
5. Makarova Ju.N. *Monitoring tehnogennogo zasorenija okolozemnogo prostranstva i preduprezhdenie ob opasnyh situacijah, sozdavaemyh kosmicheskim musorom* [Monitoring technogenic pollution of near-Earth space and warning about dangerous situations created by space debris]. M.: CNIImash. 2015. 244 p. (In Russ.).
6. Psiaki M.L. Gaussian-Mixture Kalman Filter for Orbit Determination Using Angles-Only Data. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics.* 2017. vol. 40. no. 9. pp. 2341–2347.
7. DeMars K.J., Bishop R.H., Jah M.K. Entropy-Based Approach for Uncertainty Propagation of Nonlinear Dynamical Systems. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 2013. vol. 36. no. 4. pp. 1047–1057.
8. DeMars K.J., Jah M.K. Probabilistic Initial Orbit Determination Using Gaussian Mixture Models. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics.* 2013. vol. 36. no. 5. pp. 1324–1335.
9. Horwood J.T., Poore A.B. Gauss von Mises Distribution for Improved Uncertainty Realism in Space Situational Awareness. *SIAM/ASA Journal of Uncertainty Quantification.* 2014. vol. 2. no. 1. pp. 276–304.
10. Jones B.A., Doostan A., Born G.H. Nonlinear Propagation of Orbit Uncertainty Using Non-Intrusive Polynomial Chaos. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics.* 2013. vol. 36. no. 2. pp. 430–444.
11. Bayramoglu E., Ravn O. A Novel Hypothesis Splitting Method Implementation for Multi-Hypothesis Filters. 2013 10th IEEE International Conference on Control and Automation (ICCA). 2013. pp. 574–579.
12. Psiaki M. Gaussian Mixture Nonlinear Filtering with Resampling for Mixand Narrowing. *IEEE Transactions on Signal Processing*. 2016. vol. 64. no. 21. pp. 5499–5512.
13. Psiaki M.L., Schoenberg J.R., Miller I.T. Gaussian Sum Reapproximation for Use in a Nonlinear Filter. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 2015. vol. 38. no. 2. pp. 292–303.
14. Psiaki M.L., Weisman R.M., Jah M.K. Gaussian Mixture Approximation of Angles-Only Initial Orbit Determination Likelihood Function. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics.* 2017. vol. 40. no. 11. pp. 2807–2819.
15. Lei X. et al. A geometrical approach to association of space-based very short-arc LEO tracks. *Advances in Space Research*. 2018. vol. 62. no. 3. pp. 542–553.
16. Cail H. et al. Improved tracklet association for space objects using short-arc optical measurements. *Acta Astronautica.* 2018. vol. 151. pp. 836–847.
17. DeMars K.J., Jah M. Probabilistic Initial Orbit Determination Using Gaussian Mixture Models. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics.* 2013. vol. 36. no. 5. pp. 1324–1335.

18. Shugarov A.S. et al. [On the concept of an economical space system for detecting dangerous celestial bodies]. *Kosmicheskie Issledovaniya – Cosmic Research.* 2015. Issue 53. vol. 2. pp. 95–104. (In Russ.).
19. Ahmetshin R.Z. [Space Patrol: Optical Barrier Options]. *Kosmicheskie Issledovaniya – Cosmic Research.* 2013. Issue 51. vol. 4. pp. 274–286. (In Russ.).
20. Naroenkov S.A., Shustov B.M., Emel'yanenko V.V. [On the length of the arc of observation of a small body of the solar system, sufficient to classify it as dangerous]. *Kosmicheskie Issledovaniya – Cosmic Research.* 2013. Issue 51. vol. 5. pp. 372–379. (In Russ.).
21. Markov Ju.G. et al. [Analysis of the influence of various disturbing factors on the high-precision prediction of spacecraft orbits]. *Kosmicheskie Issledovaniya – Cosmic Research.* 2016. Issue 54. vol. 2. pp. 164–172. (In Russ.).
22. Mironov V.I., Mironov Ju.V. [Complex estimation of the state parameters of nonlinear dynamical systems on the basis of the variational approach]. *Trudy SPIIRAN – SPIIRAS Proceedings.* 2008. vol. 7. pp. 222–229. (In Russ.).
23. Mironov V., Mironov Y., Sokolov B., Yusupov R. Variational maximum-likelihood method and its application in the aerospace navigation. *Information technology and management science*. 2013. vol. 16. no. 1. pp. 27–32.
24. Samotohin A.S., Hutorovskij Z.N. [Method of initial determination of parameters of near-earth orbits with three angular measurements]. *Preprinty Instituta prikladnoj matematiki im. M.V.Keldysha RAN Keldysh Institute of Applied Mathematics.* 2014. vol. 0. pp. 44–31. (In Russ.).
25. Sheffer. V.A. [Calculation of the intermediate perturbed orbit in three or more positions of a small body on the celestial sphere]. *Astronomicheskij vestnik – Solar System Research.* 2013. vol. 47. pp. 40–52. (In Russ.).
26. Novoselov, V.S. *Analiticheskaya teoriya optimizacii v gravitacionnyh polyah* [Analytical theory of optimization in gravitational fields]. LGU. 1972. 317 p. (In Russ).