

Э.Я. РАПОПОРТ, Ю.Э. ПЛЕШИВЦЕВА
**МЕТОД МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ
УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ
ПАРАМЕТРАМИ**

Рапопорт Э.Я., Плешивцева Ю.Э. Метод многокритериальной оптимизации управляемых систем с распределенными параметрами.

Аннотация. Предлагается конструктивный метод многокритериальной оптимизации процессов управления детерминированными и не полностью определенными управляемыми системами с распределенными параметрами, описываемыми линейными многомерными уравнениями в частных производных параболического типа с внутренними и граничными управляющими воздействиями в условиях заданной точности приближения конечного состояния объекта к требуемому пространственному распределению управляемой величины. Предлагаемый в статье подход базируется на однокритериальной версии в виде минимаксной свертки нормализуемых критериев качества и последующем переходе к эквивалентной форме типовой вариационной задачи с ограничениями. Анализ проводится применительно к детерминированной модели объекта, описываемой бесконечной системой дифференциальных уравнений относительно временных мод разложения управляемой величины в ряд по собственным функциям начально-краевой задачи. Дальнейшие процедуры предварительной параметризации управляющих воздействий на основе аналитических условий оптимальности и редукции к задачам полубесконечного программирования позволяют найти искомые экстремали с использованием их чебышёвских свойств и фундаментальных закономерностей предметной области в типичных для приложений условиях оценки в равномерной метрике точности приближения конечного состояния объекта к требуемому. Полученные результаты распространяются на задачи программного управления по принципу гарантированного результата ансамблями траекторий движения объекта в условиях интервальной неопределенности параметрических характеристик распределенной системы и множественных внешних возмущений. Приводится представляющий самостоятельный интерес пример решения предлагаемым методом задачи многокритериальной оптимизации передовой технологии индукционного нагрева металлических полуфабрикатов перед последующей обработкой давлением. В качестве компонент векторного критерия оптимизации рассматриваются расход энергии на нагрев, потери металла на термохимические взаимодействия и точность достижения заданной конечной температуры нагрева.

Ключевые слова: многокритериальная оптимизация, системы с распределенными параметрами, управляемые системы, полубесконечная оптимизация, равномерные приближения, альтернативный метод, интервальные неопределенности, принцип гарантированного результата.

1. Введение. Характерные требования к оценке эффективности функционирования сложных технических систем по целому ряду конфликтующих друг с другом показателей качества приводят к актуальной задаче многокритериальной оптимизации (ЗМО) искомых управляющих воздействий (УВ) в подобных условиях неопределенности целей управления [1-5]. При этом отбор

приемлемых вариантов производится на парето-эффективном множестве решений (ПЭМР), не улучшаемых ни по одному из критериев без ухудшения показателей по какому-либо из остальных. Для определения ПЭМР в настоящее время используются два основных подхода, базирующихся на предварительной параметризации искомым УВ [1-9].

Во-первых, в целях непосредственного построения ПЭМР эффективным оказывается применение различных модификаций генетических алгоритмов, отличающихся друг от друга способами агрегирования популяций для частных критериев эффективности в сочетании с современными методами численного моделирования оптимизируемых процессов [5, 6]. Этот подход успешно реализован на практике, в частности в сложных ЗМО интегрированного проектирования объектов технологической теплофизики с распределенными параметрами [6-10].

Во-вторых, используется традиционная технология различных вариантов однокритериальной свертки взвешиваемых компонентов векторной целевой функции с последующим построением ПЭМР, которому принадлежат все решения соответствующих однокритериальных задач при варьировании весовых коэффициентов в пределах типового симплекса [1-4].

ЗМО в реальных условиях неполной определенности исходных данных могут быть решены на основе указанных подходов различными методами. В том числе путем формирования критериев оптимальности в терминах функций принадлежности в рамках теории нечетких множеств [11] или в форме математического ожидания при заданной функции плотности распределения вероятности неопределенной величины [12]; путем получения недостающей информации методами регрессионного анализа [2]; решением ЗМО в условиях ограниченной неопределенности по принципу гарантированного результата [4].

После построения ПЭМР возникает самостоятельная проблема выбора в пределах множества Парето единственной альтернативы при наличии значительного числа возможных вариантов. В частности, при переходе к относительным оценкам предварительно нормализуемых равнозначных составляющих векторного критерия качества с последующим использованием их минимаксной (или максиминной) свертки с единичными весовыми коэффициентами решение соответствующей однокритериальной задачи заведомо является парето-эффективным и отвечает искомому альтернативному варианту решения ЗМО по принципу гарантированного результата [2, 3].

Искомые УВ при этом непосредственно задаются в параметризованной форме в ЗМО проектных решений или статических режимов работы объекта, которые в результате сводятся к типовым задачам математического программирования (ЗМП) с учетом заданных ограничений [2-4].

При многокритериальной оптимизации динамических процессов предварительная процедура параметризации УВ требует применения известных аналитических условий оптимальности и представляет собой отдельную достаточно сложную задачу [13, 14]. Трудности перехода к ЗМП в динамических ЗМО в условиях необходимости использования прямых решений системы дифференциальных уравнений модели объекта с параметризованными УВ резко возрастают с повышением порядка этих уравнений и приобретают принципиальный характер применительно к бесконечномерным объектам с распределенными параметрами (ОРП). В этом случае ЗМО сводятся вместо типовых задач к специальным задачам полубесконечной оптимизации с бесконечным числом ограничений на конечное состояние ОРП в характерной ситуации его оценки в равномерной метрике на множестве определения пространственных аргументов управляемых величин [8, 13, 14].

В настоящей работе предлагаются постановки и конструктивный способ решения отличающихся указанными затруднениями малоисследованных многокритериальных задач оптимального управления ОРП, в значительной степени опирающийся на разработанный ранее авторами альтернативный метод параметрической оптимизации управляемых процессов [8, 13, 14].

2. Задача многокритериального управления детерминированными моделями объекта с распределенными параметрами.

Пусть управляемая функция состояния $Q(X, t)$ объекта с распределенными параметрами описывается в зависимости от времени $t \in (0, t^*)$ и пространственных координат $X \in V$; $X = (x_i)$, $i = \overline{1, m}$;

$1 \leq m \leq 3$ в пределах заданной односвязной области V m -мерного евклидова пространства E^m с кусочно-гладкой границей S линейным неоднородным уравнением в частных производных параболического типа с постоянными во времени коэффициентами:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \sum_{i=1}^m a_i(X) \frac{\partial^2 Q}{\partial x_i^2} + \sum_{i=1}^m b_i(X) \frac{\partial Q}{\partial x_i} + c(X)Q + g_V(X)u_V(t) + g_{V1}(X)\eta_1(t), \quad (1)$$

с начальными и граничными условиями:

$$\begin{aligned} Q(X, 0) &= f(X), \quad X \in V \cup S; \\ \frac{\partial Q}{\partial N} + \beta Q &= g_S(X)u_S(t) + g_{S1}(X)\eta_2(t), \quad X \in S; \end{aligned} \quad (2)$$

и сосредоточенными внутренними $u_V(t)$ или (и) граничными $u_S(t)$ управляющими воздействиями при изначально фиксируемых функциях $g_V(X)$, $g_S(X)$ их пространственного распределения. Здесь N – вектор внешней нормали к S ; $\beta = \text{const} \geq 0$; t^* — конечный момент процесса управления; дифференциальный оператор в правой части (1) самосопряженный; функция $f(X) \in L_2(V)$ и коэффициенты $a_i(X), b_i(X), c(X)$ являются известными достаточно гладкими функциями своих аргументов, причем не все $a_i(X)$ в (1) одновременно равны нулю; $\eta_1(t), \eta_2(t)$ — аддитивные по отношению к $u_V(t)$ и $u_S(t)$ кусочно-непрерывные возмущения с заданным характером $g_{V1}(X)$ и $g_{S1}(X)$ их зависимости от X .

Управляющие воздействия $u(t) \in \{u_V(t), u_S(t)\}$ должны быть подчинены ограничениям:

$$u_{\min} \leq u(t) \leq u_{\max}, \quad t \in [0, t^*], \quad (3)$$

с известными предельно допустимыми значениями u_{\min} и u_{\max} .

Рассмотрим далее ЗМО детерминированной модели ОРП (1)-(3) при $\eta_1(t) = \eta_2(t) = 0$ в (1), (2).

Применение к уравнениям (1), (2) метода конечных интегральных преобразований приводит к описанию модели ОРП бесконечной системой обыкновенных дифференциальных уравнений относительно временных мод $\bar{Q}_n(t)$ — коэффициентов разложения $Q(X, t)$ в сходящийся в среднем ряд по ортогональной с весом $r(X)$ системе собственных функций $\phi_n(X)$ [15]:

$$\frac{d\bar{Q}_n}{dt} = -\mu_n^2 \bar{Q}_n + k_{Vn} u_V(t) + k_{Sn} u_S(t), \quad n = 1, 2, \dots; \quad \bar{Q}_n(0) = \bar{f}_n, \quad (4)$$

$$Q(X, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{Q}_n(t) \phi_n(X). \quad (5)$$

Здесь μ_n^2 — собственные числа, и

$$\begin{aligned} \bar{f}_n &= \int_V f(Y)\phi_n(Y)r(Y)dY; \bar{k}_{Vn} = \int_V g_V(Y)\phi_n(Y)r(Y)dY; \\ \bar{k}_{Sn} &= \int_S g_S(Y)\phi_n(Y)r(Y)dS(Y). \end{aligned} \quad (6)$$

Рассмотрим $q > 1$ различных частных задач оптимального управления объектом (4)-(5) с интегральными критериями качества:

$$I_p(u) = \int_0^{t^*} f_{0p}(\bar{Q}_p, u)dt \rightarrow \min_{u \in \Omega_p}, p = \overline{1, q}, \bar{Q}_p = (\bar{Q}_{pn}(t)), \quad (7)$$

с заданными подынтегральными достаточно гладкими функциями f_{0p} своих аргументов (задачи на максимум $I_p, p \in \{\overline{1, q}\}$ приводятся к минимизации $-I_p$). Задачи (7) формулируются в условиях ограничений на управляющие воздействия, отвечающих требованиям обеспечения допустимой точности ε_{0p} приближения $Q_p(X, t^*)$ к заданному пространственному распределению $Q^{**}(X) = Q_c = const$, которая оценивается в равномерной метрике применительно к представляющим наибольший интерес ситуациям в прикладных задачах и определяет целевое множество достижимых конечных состояний ОРП [13, 14]:

$$\Omega_p = \{u : \Phi_p(u) \leq \varepsilon_{0p}, u \in [u_{\min}, u_{\max}]\}; \quad (8)$$

$$\Phi_p(u) = \max_{X \in V} |Q_p(X, t^*) - Q_c| = \max_{X \in V} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \bar{Q}_{pn}(t^*)\phi_n(X) - Q_c \right|. \quad (9)$$

Здесь в (7)-(9) \bar{Q}_p — вектор модальных переменных $\bar{Q}_{pn}(t)$ управляемой величины $Q_p(X, t^*)$ и $\varepsilon_{0p} \geq \varepsilon_{p \inf} \geq 0$, где $\varepsilon_{p \inf}$ — точная нижняя граница достижимых значений ε_{0p} [13].

При необходимости оценки качества процесса управления одновременно по всем q показателям эффективности I_p в (7) может быть сформулирована на основании (7)-(9) многокритериальная задача [1-5]:

$$I_{\Sigma} \rightarrow \min; I_{\Sigma} = (I_p(u)), p = \overline{1, q}, \quad (10)$$

$$\Omega_{\Sigma} = \{u : \Phi_{\Sigma}(u) \leq \varepsilon_0, u \in [u_{\min}, u_{\max}]\}, 0 \leq \varepsilon_{\inf} \leq \varepsilon_0 \leq \max_p \varepsilon_{0p};$$

$$\Phi_{\Sigma}(u) = \max_{X \in V} |Q(X, t^*) - Q_c| = \max_{X \in V} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \overline{Q}_n(t^*) \phi_n(X) - Q_c \right| \quad (11)$$

минимизации q критериев I_p согласно (10) с учетом ограничения (11) на априори фиксируемую по условиям выполнения неравенств $\varepsilon_0 \leq \max_p \varepsilon_{0p}$ величину ε_0 погрешности равномерного приближения $Q(X, t^*)$ к Q_c при управлении объектом (4). Здесь исключается тривиальный случай совпадения решений u_p^* задач (7)-(9) по каждому из критериев I_p для всех $p = \overline{1, q}$.

Общая теория управления не содержит методов решения ЗМО управляемых бесконечномерных объектов вида (4), (10), (11) с ограничением на оцениваемую в равномерной метрике точность приближения конечного состояния управляемой величины к требуемому. В настоящем разделе статьи предлагается новый конструктивный способ решения такой задачи.

2.1. Эквивалентная форма детерминированной однокритериальной задачи оптимального управления. Не влияющий на результат решения задачи (10)-(11) переход от I_p к относительным равнозначным оценкам [2, 3]:

$$\lambda_p(u) = \frac{I_p(u) - I_p^*}{I_p^0 - I_p^*}; 0 \leq \lambda_p(u) \leq 1; p = \overline{1, q}, \quad (12)$$

приводит (в отличие от типовой формы с весовыми коэффициентами) к минимаксной свертке ЗМО (10)-(11) следующего вида:

$$\lambda(u) = \max_{p \in \{\overline{1, q}\}} \lambda_p(u) \rightarrow \min, \quad u \in \Omega_{\Sigma} \quad (13)$$

точка оптимума которой:

$$u^{**} = \arg \min_{u \in \Omega_{\Sigma}} \left[\max_{p \in \{\overline{1, q}\}} \lambda_p(u) \right], \quad (14)$$

априори принадлежит множеству Парето исходной ЗМО и может рассматриваться в качестве искомого оптимального управления в

исходной задаче [2, 3]. В выражении (12) I_p^* — минимальная величина I_p , достигаемая при управлении u_p^* в условиях (8):

$$I_p^* = \min_{u \in \Omega_p} I_p(u); u_p^* = \arg \min_{u \in \Omega_p} I_p(u); \lambda_p(u_p^*) = 0, \quad (15)$$

и I_p^0 — «наихудшее» значение $I_p(u)$ на множестве Ω_p .

Минимаксная задача (13) эквивалентна обычной однокритериальной задаче с интегральным функционалом качества:

$$I = \frac{1}{t^*} \int_0^{t^*} \lambda^0 dt = \lambda^0 \rightarrow \min; \lambda^0 = const, \quad (16)$$

ограничениями:

$$\lambda_p(u) \leq \lambda^0, p = \overline{1, q}, \quad (17)$$

и минимизируемым параметром λ^0 , вводимым согласно уравнению:

$$d\lambda^0/dt = 0. \quad (18)$$

В итоге исходная ЗМО (10)-(11) сводится без каких-либо погрешностей в рамках рассматриваемых моделей к отысканию решения u^{**} задачи (16)-(18) с одним критерием оптимальности I в условиях заданных ограничений (11) и (17).

Введем в рассмотрение описываемые уравнениями

$$dz_p/dt = f_{0p}; z_p(t^*) = I_p(u); p = \overline{1, q} \quad (19)$$

новые переменные $z_p(u); p = \overline{1, q}$, в терминах которых ограничения (17) принимают следующий вид:

$$\frac{z_p(t^*) - I_p^*}{I_p^0 - I_p^*} \leq \lambda^0, p = \overline{1, q}. \quad (20)$$

Дополнив модель объекта (4) уравнениями (18), (19), приходим теперь к следующей эквивалентной форме задачи (16)-(18).

Необходимо определить стесняемое условиями (3) управляющее воздействие $u^{**}(t)$, которое переводит объект

управления (4), (18), (19) в требуемое согласно (11), (20) конечное состояние при минимальном значении критерия оптимальности (16).

На задачу (11), (16), (20) оптимального управления бесконечномерным объектом (4), (19) распространяется принцип максимума Понтрягина.

Базовое условие:

$$H(\bar{Q}^{**}(t), u^{**}(t), \bar{\Psi}^{**}(t)) = \max_{u \in [u_{\min}, u_{\max}]} H(\bar{Q}^{**}(t), u(t), \bar{\Psi}^{**}(t)), t \in (0, t^*) \quad (21)$$

достижения максимума функции Понтрягина [16]:

$$\begin{aligned} H(\bar{Q}(t), u(t), \bar{\Psi}(t)) = & -\lambda^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n(t) (-\mu_n^2 \bar{Q}_n + k_{vn} u_v(t) + k_{sn} u_s(t)) + \\ & + \sum_{p=1}^q \tilde{\Psi}_p f_{0p}, \end{aligned} \quad (22)$$

в оптимальном процессе $(\bar{Q}^{**}(t), u^{**}(t), \bar{\Psi}^{**}(t))$, где вектор сопряженных переменных $\bar{\Psi}(t) = (\tilde{\Psi}_p, p = 1, q; \Psi_n(t), n = 1, 2, \dots)$ описывается уравнениями:

$$\frac{d\tilde{\Psi}_p}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial z_p} = 0, p = 1, q; \frac{d\Psi_n}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \bar{Q}_n}, n = 1, 2, \dots \quad (23)$$

и, как правило, позволяет найти $u^{**}(t)$ в форме явной функции $u^{**}(\bar{Q}^{**}(t), \bar{\Psi}^{**}(t))$ переменных $\bar{Q}(t) = (\bar{Q}_n)$ и $\bar{\Psi}(t)$, вид которой не зависит от ограничений (11) и (20) на конечное состояние объекта управления.

2.2. Редукция к задаче полубесконечной оптимизации.

Найденные согласно (21)-(23) зависимости $u^{**}(\bar{Q}^{**}(t), \bar{\Psi}^{**}(t))$ во многих случаях непосредственно устанавливают структуру искомым оптимальных алгоритмов $u^{**}(t)$ (и аналогичным образом $u_p^*(t)$ в задаче (15)) в форме их параметрического описания с точностью до вектора $\Delta^{(N)} = (\Delta_i^{(N)}), i = 1, N$, упорядоченной последовательности конечного числа N параметров $\Delta_1^{(N)}, \Delta_2^{(N)}, \dots, \Delta_N^{(N)}$, непосредственно характеризующих поведение $u^{**}(t)$, $u_p^*(t)$ в области их определения [13, 14].

Интегрирование уравнений объекта (4) с параметризованным управлением $u(\Delta^{(N)}, t)$ приводит в таких случаях к представлению критериев оптимальности I_p в (7), λ_p в (12) и конечных состояний $Q_p(X, t^*)$, $Q(X, t^*)$ в (9), (11) в виде явных достаточно гладких зависимостей $I_p(\Delta^{(N)})$, $\lambda_p(\Delta^{(N)})$, $Q_p(X, \Delta^{(N)})$ и $Q(X, \Delta^{(N)})$ от $\Delta^{(N)}$, если считать известными значения I_p^* и I_p^0 в (12).

Размерность N вектора $\Delta^{(N)}$ устанавливается по известным правилам в зависимости от значения ε_0 в (11), либо априори фиксируется возможностями технической реализации $\Delta^{(N)}$ — параметризуемых управляющих воздействий [13].

В результате производится точная редукция задачи (16)-(20) оптимального управления объектом (4), (5), (18), (19) к задаче минимизации целевой функции:

$$I = \lambda^0(\Delta^{(N)}) \rightarrow \min_{\Delta^{(N)} \in G_N}, \quad (24)$$

конечного числа N переменных $\Delta_i^{(N)}, i = \overline{1, N}$ на допустимом множестве $G_N \in \Delta^{(N)}$ их изменения с бесконечным числом ограничений:

$$\Phi_{\Sigma}(\Delta^{(N)}) = \max_{X \in V} |Q(X, \Delta^{(N)}) - Q_c| \leq \varepsilon_0, \quad (25)$$

диктуемых требованиями (11) для всех $X \in V$ и дополняемых в соответствии с (17), (20) неравенствами:

$$\lambda_p(\Delta^{(N)}) = \frac{I_p(\Delta^{(N)}) - I_p^*}{I_p^0 - I_p^*} \leq \lambda^0, p = \overline{1, q}. \quad (26)$$

(задача полубесконечной оптимизации (ЗПО)) [13].

ЗПО (24)-(26) эквивалентна минимаксной задаче полубесконечной оптимизации без дополнительных условий (26) с критерием оптимальности:

$$I_1 = \max_{p \in \{\overline{1, q}\}} \lambda_p(\Delta^{(N)}) \rightarrow \min_{\Delta^{(N)} \in G_N}, \quad (27)$$

и континуумом ограничений (25).

Рассматривая вместо (27) критерий оптимальности:

$$I_{2p_1} = \lambda_{p_1}(\Delta^{(N)}) \rightarrow \min_{\Delta^{(N)} \in G_N}, \quad (28)$$

последовательно для всех $p_1 = \overline{1, q}$, получим ряд ЗПО (25), (28) рассмотренного в [13] типового вида, на решениях которых $\Delta^{(N)} = \Delta^{[p_1]}$, определяемых по схеме альтернансного метода [13], вычисляются $\lambda_p(\Delta^{[p_1]}) \forall p = \overline{1, q}$. За решение $\overline{\Delta}^{(N)}$ минимаксной задачи (25), (27) принимается $\Delta^{[p_1^*]}$ при таких $p_1 = p_1^*$, для которых выполняются неравенства $\lambda_p(\Delta^{[p_1^*]}) \leq \lambda_{p_1^*}(\Delta^{[p_1^*]})$ для всех $p = \overline{1, q}$.

Исходная ЗПО (24)-(26) значительно упрощается как раз в наиболее характерной для приложений ситуации в (25) с минимально достижимой величиной ε_0 в классе $\Delta^{(N)}$ -параметризуемых управлений:

$$\varepsilon_0 = \min \varepsilon(\Delta^{(N)}) = \min_{\Delta^{(N)} \in G_N} \left[\max_{X \in V} |Q(X, \Delta^{(N)}) - Q_c| \right]. \quad (29)$$

В таком случае задача (24)-(26), (29) сводится к минимаксной задаче без ограничений

$$\Phi_{\Sigma}(\Delta^{(N)}) \rightarrow \min_{\Delta^{(N)} \in G_N}, \quad (30)$$

на решениях которой автоматически удовлетворяются условия (26) при определении в качестве λ_0 максимального из значений λ_p .

Решения $\overline{\Delta}^{(N)}$ задач (25), (28) при требуемом значении ε_0 в (25) обладают альтернансными свойствами [13], согласно которым в условиях некоторых малостеснительных допущений выполняются равенства:

$$\left| Q(X_j^0, \overline{\Delta}^{(N)}) - Q_c \right| = \varepsilon_0, j = \overline{1, R}, R = \begin{cases} N, \varepsilon_0 > \min \varepsilon(\Delta^{(N)}); \\ N+1, \varepsilon_0 = \min \varepsilon(\Delta^{(N)}); \end{cases} \quad (31)$$

в некоторых точках $X_j^0 \in V, j = \overline{1, R}$. Число R этих точек оказывается равным числу всех искомым параметров оптимального процесса, включая все компоненты $\overline{\Delta}_i^{(N)}, i = \overline{1, N}$ вектора $\overline{\Delta}^{(N)}$ при заданной величине $\varepsilon_0 > \min \varepsilon(\Delta^{(N)})$ и наряду с ними априори неизвестную величину минимакса $\min \varepsilon(\Delta^{(N)})$ в условиях (29).

При наличии дополнительной информации из предметной области о конфигурации зависимостей $Q(X, \bar{\Delta}^{(N)})$ от $X \in V$, позволяющей идентифицировать значения X_j^0 и знаки разностей $Q(X_j^0, \bar{\Delta}^{(N)}) - Q_c$, равенства (31) вместе с условиями:

$$\frac{\partial}{\partial X} Q(X_j^0, \bar{\Delta}^{(N)}) = 0, v = \overline{1, R_1}, \quad (32)$$

существования экстремума функции $Q(X, \bar{\Delta}^{(N)})$ в точках $X_{jv}^0 \in \text{int } V, v = \overline{1, R_1}, R_1 \leq R$, трансформируются к замкнутой системе $R + R_1$ уравнений. Решение этой системы (как правило, единственное) относительно всех искомых величин $\bar{\Delta}_i^{(N)}, i = \overline{1, N}$; $\min \varepsilon(\Delta^{(N)})$ в случае (29) и промежуточных неизвестных $X_{jv}^0, v = \overline{1, R_1}$ находится известными численными методами.

По найденному указанным способом вектору $\bar{\Delta}^{(N)}$ и известным зависимостям $\lambda_p(\Delta^{(N)})$ вычисляется минимальное значение λ_{\min}^0 целевой функции (24):

$$\lambda_{\min}^0 = \min_{\Delta^{(N)} \in G_N} \lambda^0(\Delta^{(N)}) = \lambda^0(\bar{\Delta}^{(N)}) = \max_{p \in \{1, q\}} \lambda_p(\bar{\Delta}^{(N)}), \quad (33)$$

обеспечивая выполнение неравенств (26) и завершая тем самым решение задачи (24)-(26) в условиях $\varepsilon_0 \geq \min \varepsilon(\Delta^{(N)})$.

Для решения задач (25), (28) и определения λ_{\min}^0 в (33) необходимо предварительно найти I_p^* и I_p^0 для всех $p = \overline{1, q}$ в (12).

Частные однокритериальные задачи оптимизации (7)-(9) после параметризации искомых управлений $u_p^*(t)$ в (15) с использованием стандартной процедуры принципа максимума вида (21)-(23) приводятся подобно (24), (25) к ЗПО:

$$I_p([\Delta^{(N)}]_p) \rightarrow \min_{[\Delta^{(N)}]_p}; \Phi_p([\Delta^{(N)}]_p) = \max_{X \in V} |Q(X, [\Delta^{(N)}]_p) - Q_c| \leq \varepsilon_{0p}, \quad (34)$$

которую необходимо рассматривать, как это следует из выражения (22) для функции Понтрягина, на элементах $[\Delta^{(N)}]_p$

подмножества $\{\Delta^{(N)}\}_p \subset \{\Delta^{(N)} \in G_N\}$ значений $\Delta^{(N)}$ в p -ой задаче (34).

При этом в условиях (29) достаточно рассмотреть задачи (7)-(9), принимая аналогичным образом $\varepsilon_{0p} = \min \varepsilon([\Delta^{(N)}]_p)$, где

$$\min \varepsilon([\Delta^{(N)}]_p) = \min_{[\Delta^{(N)}]_p} \left[\max_{X \in V} |Q(X, [\Delta^{(N)}]_p) - Q_c| \right], \quad (35)$$

и, следовательно, заведомо выполняется условие $\varepsilon_0 \leq \max_p \varepsilon_{0p}$ в (10), (11).

На решениях $\Delta^{[p]}$ задач (34), определяемых по описанной схеме альтернансного метода, находятся величины:

$$I_p^* = I_p(\Delta^{[p]}), p = \overline{1, q}. \quad (36)$$

Максимально возможные значения I_p^0 критерия I_p формально задаются зависимостями:

$$I_p^0 = I_p(\tilde{\Delta}^{[p]}); \tilde{\Delta}^{[p]} = \arg \max_{[\Delta^{(N)}]_p} \left(I_p([\Delta^{(N)}]_p : \Phi_p([\Delta^{(N)}]_p) \leq \varepsilon_{0p} \right), \quad (37)$$

однако величины $I_p^0, p = \overline{1, q}$ могут быть установлены проще, например, по следующему алгоритму:

$$I_k^0 = \max_{\substack{p \in \{\overline{1, q}\} \\ p \neq k}} I_k(\Delta^{[p]}), k = \overline{1, q} \quad (38)$$

или исходя из физических соображений в каждой конкретной задаче.

В итоге решение по описанной схеме альтернансного метода задач полубесконечной оптимизации (34) и (24)-(26) с вычислением λ_{\min}^0 , I_p^* и I_p^0 согласно (33), (36) и (37) (или (38)) исчерпывает решение исходной ЗМО (13).

3. Задача многокритериальной оптимизации в условиях интервальной неопределенности параметрических характеристик объекта управления. Самостоятельный интерес представляет ЗМО ОРП в характерных условиях интервальной неопределенности начального состояния $\bar{Q}^0 = (\bar{Q}_n(0))$ и неизменного во времени вектора w параметрических характеристик объекта управления (1)-(4), с

точностью до которых определены коэффициенты a_i, b_i, c и β в начально-краевой задаче (1), (2), где по-прежнему, как и в разделе 2, положим $\eta_1(t) = \eta_2(t) = 0$.

Все сведения о \bar{Q}^0 и w исчерпываются в такой ситуации информацией об их принадлежности заданным компактным множествам B и W :

$$\bar{Q}^0 \in B, w \in W. \quad (39)$$

Каждой фиксированной паре значений неопределенных факторов $y = (\bar{Q}^0, w) \in A = B \times W$ при любом допустимом согласно (3) управлении $u(t)$ соответствует определяемая решением системы уравнений (4) траектория процесса $\bar{Q}(t, y) = (\bar{Q}_n(t, y))$ и управляемая функция состояния:

$$Q(X, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{Q}_n(t, y) \phi_n(X), \quad (40)$$

согласно (5). Объединение этих траекторий по всем допустимым величинам y при одном и том же управляющем воздействии образует ансамбль:

$$\bar{Q}^{\Sigma}(t, y) = \cup \left\{ \bar{Q}(t, \bar{Q}^0, w) : \bar{Q}^0 \in B, w \in W, t \in [0, t^*] \right\}, \quad (41)$$

вместо единственной траектории в его составе при фиксированных значениях y в детерминированном случае.

Конструктивные способы решения подобных ЗМО ОРП неизвестны. В настоящем разделе на многокритериальные задачи оптимизации поведения распределенных объектов в условиях неопределенности (39) распространяется предлагаемый метод решения детерминированных ЗМО.

Стратегия управления ансамблем траекторий (41) по принципу гарантированного результата приводит теперь вместо (7)-(9) к частным задачам минимаксной оптимизации:

$$\begin{aligned} \tilde{I}_p(u) = \max_{y \in A} I_p(u, y) = \max_{y \in Y} \int_0^{t^*} f_{0p}(\bar{Q}_p(y), u) dt \rightarrow \min_{u \in \Omega_p}; p = \bar{1}, \bar{q}; \\ \tilde{\Omega}_p = \left\{ u : \tilde{\Phi}_p(u) \leq \varepsilon_{0p}; u \in [u_{\min}, u_{\max}] \right\}; \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}_p(u) &= \max_{y \in A} \left[\max_{X \in V} \left| Q_p(X, y, t^*) - Q_c \right| \right] = \\ &= \max_{y \in A} \left[\max_{X \in V} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \bar{Q}_{pn}(t^*, y) \phi_n(X) - Q_c \right| \right].\end{aligned}\quad (43)$$

Здесь учтены зависимости подынтегральных функций f_{0p} в (7) от u и условия необходимости достижения заданной в (8) величины ε_{0p} для всех допустимых реализаций u на множестве A .

На этом основании формулируется следующая многокритериальная задача оптимизации вместо (10), (11):

$$\tilde{I}_\Sigma \rightarrow \min; \tilde{I}_\Sigma = (\tilde{I}_p(u)), p = \overline{1, q}; \quad (44)$$

$$\tilde{\Omega}_\Sigma = \{u : \tilde{\Phi}_\Sigma(u) \leq \varepsilon_0, u \in [u_{\min}, u_{\max}]\}; \varepsilon_0 \leq \max_p \varepsilon_{0p};$$

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}_\Sigma(u) &= \max_{y \in A} \left[\max_{X \in V} \left| Q(X, y, t^*) - Q_c \right| \right] = \\ &= \max_{y \in A} \left[\max_{X \in V} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \bar{Q}_n(t^*, y) \phi_n(X) - Q_c \right| \right].\end{aligned}\quad (45)$$

В качестве искомого оптимального управления в ЗМО (44), (45) опять можно рассматривать экстремали $\tilde{u}^{**}(t)$ однокритериальной вариационной версии, переход к которой осуществляется по схеме (12)-(18):

$$\tilde{I} = \frac{1}{t^*} \int_0^{t^*} \tilde{\lambda}_0 dt = \tilde{\lambda}_0 \rightarrow \min_{u \in \tilde{\Omega}_\Sigma}; \frac{d\tilde{\lambda}_0}{dt} = 0; \tilde{\lambda}_p(u) = \frac{\tilde{I}_p(u) - \tilde{I}_p^*}{\tilde{I}_p^0 - \tilde{I}_p^*} \leq \tilde{\lambda}_0; p = \overline{1, q}; \quad (46)$$

$$\tilde{I}_p^* = \min_{u \in \tilde{\Omega}_p} \tilde{I}_p(u); \tilde{u}_p^*(t) = \arg \min_{u \in \tilde{\Omega}_p} \tilde{I}_p(u); \tilde{I}_p^0 = \max_{u \in \tilde{\Omega}_p} \tilde{I}_p(u).$$

Эквивалентный характер решений задач управления ансамблем (41) и «изолированной» траекторией в его составе приводит к аналогичной детерминированной задаче структуре алгоритмов $\tilde{u}^{**}(t)$ и $\tilde{u}_p^*(t)$, получаемых с использованием принципа максимума подобно (21)-(23) в параметризованной форме с точностью до конечномерного вектора $\Delta^{(N)}$ параметров, к определению которого и

сводится дальнейшая проблема. В итоге, аналогично (24)-(26), с учетом выражений для $\tilde{I}_p(u)$ и $\tilde{\Phi}_\Sigma(u)$ в (42), (45) производится точная редукция задачи (46) к задаче полубесконечной оптимизации:

$$\tilde{I} = \tilde{\lambda}_0(\Delta^{(N)}) \rightarrow \min_{\Delta^{(N)} \in G_N} \quad (47)$$

$$\tilde{\Phi}_\Sigma(\Delta^{(N)}) = \max_{z \in Z} |Q(z, \Delta^{(N)}) - Q_c| \leq \varepsilon_0; z = (X, y); Z = V \times A \quad (48)$$

$$\tilde{\lambda}_p(\Delta^{(N)}) = \max_{y \in A} \frac{I_p(\Delta^{(N)}, y) - \tilde{I}_p^*}{\tilde{I}_p^0 - \tilde{I}_p^*} \leq \tilde{\lambda}_0; p = \overline{1, q}. \quad (49)$$

Эта задача отличается от (24)-(26), во-первых, ограничением на функцию максимума в (48), которое рассматривается на расширенном по сравнению с (25) множестве элементов, включающем кроме пространственных аргументов $X \in V$ все допустимые реализации неопределенных факторов $y \in A$, и, во-вторых, определением в (49) значения $\tilde{\lambda}_p(\Delta^{(N)})$ по максимальной величине $I_p(\Delta^{(N)}, y)$ на множестве $A \ni y$.

Задача (47)-(49) сводится по схеме (25), (27) к ЗПО:

$$\tilde{I}_1 = \max_{p \in \{\overline{1, q}\}} \tilde{\lambda}_p(\Delta^{(N)}) \rightarrow \min_{\Delta^{(N)} \in G_N}; \quad (50)$$

$$\tilde{\Phi}_\Sigma(\Delta^{(N)}) \leq \varepsilon_0 \quad (51)$$

без ограничений (49). Такая задача, в свою очередь, редуцируется к q задачам типовой формы вида (28), (25) с критериями оптимальности:

$$\tilde{I}_{2p_1} = \tilde{\lambda}_{p_1}(\Delta^{(N)}) \rightarrow \min_{\Delta^{(N)} \in G_N}, p_1 = \overline{1, q} \quad (52)$$

и ограничениями (51), либо в частном случае:

$$\varepsilon_0 = \min \tilde{\varepsilon}(\Delta^{(N)}) = \min_{\Delta^{(N)} \in G_N} \left[\max_{z \in Z} |Q(z, \Delta^{(N)}) - Q_c| \right], \quad (53)$$

аналогичном (29), исходная ЗПО (47)-(49) сводится к минимаксной задаче без ограничений:

$$\tilde{\Phi}_\Sigma(\Delta^{(N)}) \rightarrow \min_{\Delta^{(N)} \in G_N}. \quad (54)$$

На задачу (51), (52) распространяются при малостеснительных для приложений допущениях, подобно детерминированному случаю, технология альтернативного метода отыскания ее решения $\Delta^{(N)}$, базирующаяся на его альтернативных свойствах. Эти свойства усложняются по сравнению с (31), (32) заменой точек $X_j^0 \in V$ на элементы $z_j^0 = (X_j^0, y_j^0) \in Z$, в которых достигается максимум в (48), равный ε_0 , и дополнительной системой соотношений для значений $\max_{y \in A} \lambda_{p_1}(\Delta^{(N)}, y)$, достигаемых в точках \tilde{y}_i^0 [13]:

$$\begin{aligned} & \left| Q(z_j^0, \bar{\Delta}^{(N)}) - Q_c \right| = \varepsilon_0, j = \overline{1, R_X}; \\ & \frac{\partial}{\partial X} Q(z_{j\nu}^0, \bar{\Delta}^{(N)}) = 0, \nu = \overline{1, R_{X1}}; R_{X1} \leq R_X, z_{j\nu}^0 \in \{z_j^0\}, X_{j\nu}^0 \in \text{int } V; \\ & \lambda_{p_1}(\bar{\Delta}^{(N)}, \tilde{y}_i^0) = \tilde{\lambda}_{p_1}(\bar{\Delta}^{(N)}); i = \overline{1, R_Y}; \tilde{y}_i^0 \in A; \\ & \frac{\partial \lambda_{p_1}(\bar{\Delta}^{(N)}, \tilde{y}_{ik}^0)}{\partial y} = 0, k = \overline{1, R_{y1}}; R_{y1} \leq R_Y, \tilde{y}_{ik}^0 \in \text{int } A, \tilde{y}_{ik}^0 \in \{\tilde{y}_i^0\}. \end{aligned} \quad (55)$$

Здесь

$$\begin{aligned} & R_X + R_Y = N + 1, \text{ если } \min \tilde{\varepsilon}(\Delta^{(N)}) < \varepsilon_0 < \bar{\varepsilon}; \\ & R_X = N + 1, \text{ если } \varepsilon_0 = \min \tilde{\varepsilon}(\Delta^{(N)}); \\ & R_Y = N + 1, \text{ если } \varepsilon_0 \geq \bar{\varepsilon}; \\ & \bar{\varepsilon} = \tilde{\Phi}_\Sigma(\Delta_*^{(N)}); \Delta_*^{(N)} = \arg \min_{\Delta^{(N)} \in G_N} \tilde{\lambda}_{p_1}(\Delta^{(N)}), \end{aligned} \quad (56)$$

точки \tilde{y}_i^0 отличаются от y_j^0 ; значения $\tilde{\Phi}_\Sigma(\Delta^{(N)})$ в (51) могут достигаться в разных точках X_j^0 для разных значений неопределенных факторов y_j^0 и по-прежнему система равенств (55), (56) оказывается замкнутой относительно всех неизвестных, к числу которых теперь относятся $\bar{\Delta}^{(N)}$, $\tilde{\lambda}_{p_1}(\bar{\Delta}^{(N)})$, $X_{j\nu}^0$, \tilde{y}_{ik}^0 и $\min \tilde{\varepsilon}(\Delta^{(N)})$, если $\varepsilon_0 = \min \tilde{\varepsilon}(\Delta^{(N)})$.

В частном случае минимаксной задачи (54) соотношения (55)-(58) упрощаются и сводятся к подобной (31), (32)

системе первых двух равенств в (55), где R_X и R_{X1} определяются аналогично R и R_1 в (31), (32).

Аналогичным образом усложняются частные задачи оптимизации по сравнению с (34). Специфическая проблема выявления характера распределения $Q(z, \bar{\Delta}^{(N)})$ на множестве Z и $I_p(\bar{\Delta}^{(N)}, y)$ на множестве A в (48), (49) в целях редукции системы равенств вида (31), (32) к расчетным системам уравнений часто может быть решена на основе свойств результирующих состояний ОРП для детерминированных моделей объекта и базовых закономерностей предметной области исследуемых процессов [8, 13, 14].

4. Задача многокритериальной оптимизации в условиях воздействия множественных возмущений. Рассмотрим далее ЗМО объектом (1)-(3) с априори фиксируемыми значениями \bar{Q}^0 и w его параметрических характеристик в (39) в условиях наличия возмущений $\eta(t) \in \{\eta_1(t), \eta_2(t)\}$ в (1), (2), рассматриваемых в качестве не полностью определенных факторов $y_1 = (\eta_1, \eta_2)$, вся априорная информация о которых исчерпывается заданными границами диапазона их возможного изменения:

$$\eta(t) \in W_1 = \{\eta(t) : \eta_{\min} \leq \eta(t) \leq \eta_{\max}, t \in [0, t^*]\}. \quad (57)$$

Предполагается, что ограничения (57) согласованы с (3) и сохраняют управляемость объекта по требованиям, аналогичным (42), (43), где следует заменить y на y_1 .

Условия неопределенности (57) порождают ансамбль траекторий движения объекта (1), (2) вида (41):

$$\bar{Q}^{\Sigma}(t, y_1) = \cup \{\bar{Q}(t, \eta) : \eta \in W_1, t \in [0, t^*]\}, \quad (58)$$

описываемый вместо (4) системой уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{Q}_n}{dt} &= -\mu_n^2 \bar{Q}_n + k_{Vn} u_V(t) + k_{Sn} u_S(t) + k_{V1n} \eta_1(t) + k_{S1n} \eta_2(t), \\ k_{V1n} &= \int_V g_{V1}(Y) \phi_n(Y) r(Y) dY; \quad k_{S1n} = \int_S g_{S1}(Y) \phi_n(Y) r(Y) dS(Y). \end{aligned} \quad (59)$$

Принцип гарантированного результата формально приводит к подобным (42), (43) частным задачам оптимизации;

аналогичной (44), (45) ЗМО и однокритериальной версии (46), где лишь следует заменить y на η и A на W_1 . Однако эти задачи существенно усложняются по сравнению с (47)-(49) необходимостью поиска функций максимума на множестве допустимых согласно (57) возмущений $\eta_1(t), \eta_2(t)$ с заранее неизвестным характером их изменения во времени. В этой ситуации предлагается рассматривать такие задачи в игровой постановке в качестве дифференциальной игры с антагонистическими управлениями $u(t)$ и $\eta(t)$ объектом (59) [16, 17] с последующим решением по схеме детерминированных ЗМО.

В типичном случае представления подынтегральных функций вида (42) в форме аддитивной зависимости от $u(t)$ и $\eta(t)$ искомые оптимальные управления $u^*(t), \eta^*(t)$ в частных задачах управления и $u^{**}(t), \eta^{**}(t)$ в однокритериальной версии ЗМО могут быть найдены из условий существования седловой точки игры:

$$\begin{aligned} I_p(u^*(t), \eta^*(t)) &= \min_{u \in \tilde{\Omega}_p} \max_{\eta \in W_1} I_p(u(t), \eta(t)) = \\ &= \max_{\eta \in W_1} \min_{u \in \tilde{\Omega}_p} I_p(u(t), \eta(t)); p = \overline{1, q}; \end{aligned} \quad (60)$$

$$I(u^{**}(t), \eta^{**}(t)) = \min_{u \in \tilde{\Omega}_\Sigma} \max_{\eta \in W_1} I(u(t), \eta(t)) = \max_{\eta \in W_1} \min_{u \in \tilde{\Omega}_\Sigma} I(u(t), \eta(t)), \quad (61)$$

где обозначения $\tilde{\Omega}_p$ и $\tilde{\Omega}_\Sigma$ соответствуют принятым в (42)-(46) с заменой y на η .

Специальная форма принципа максимума для минимаксных задач (60), (61) [16] с функцией Понтрягина вида (22), определяемой для модели объекта (59) вместо (4), опять позволяет подобно детерминированному случаю найти зависимости $u^{**}(\overline{Q}^{**}(t), \overline{\Psi}^{**}(t)), \eta^{**}(\overline{Q}^{**}(t), \overline{\Psi}^{**}(t))$ (и аналогично для u^* и η^*), с помощью которых устанавливается структура искомых алгоритмов и их параметрическое представление с точностью до векторов параметров $\Delta_u^{(N_u)}$ и $\Delta_\eta^{(N_\eta)}$. В итоге опять может быть осуществлена процедура редукции к задаче полубесконечной оптимизации вида (24)-(26):

$$I = \lambda^0 \left(\Delta_u^{(N_u)}, \Delta_\eta^{(N_\eta)} \right) \rightarrow \min_{\Delta_u^{(N_u)}, \Delta_\eta^{(N_\eta)}} ;$$

$$\Phi_\Sigma \left(\Delta_u^{(N_u)}, \Delta_\eta^{(N_\eta)} \right) = \max_{X \in V} \left| Q \left(X, \Delta_u^{(N_u)}, \Delta_\eta^{(N_\eta)} \right) - Q_c \right| \leq \varepsilon_0 ; \quad (62)$$

$$\lambda_p \left(\Delta_u^{(N_u)}, \Delta_\eta^{(N_\eta)} \right) = \frac{I_p \left(\Delta_u^{(N_u)}, \Delta_\eta^{(N_\eta)} \right) - I_p^* (u^*, \eta^*)}{I_p^0 - I_p^* (u^*, \eta^*)} \leq \lambda^0, \quad p = \overline{1, q},$$

которая отличается от (24)-(26) большим числом $N_u + N_\eta$ искомым неизвестных.

Дальнейшая редукция ЗПО (62) к аналогичной детерминированной ситуации форме (25), (28) (или (30) в частном случае, подобном (29)), и последующее ее решение может быть выполнено по схеме альтернативного метода на базе альтернативных свойств (31). Аналогичным образом по схеме, подобной (34)-(38), могут быть решены частные задачи оптимизации и найдены величины $I_p^* (u^*, \eta^*)$, I_p^0 в (62).

Исходная задача многокритериальной оптимизации в условиях действия множественных возмущений кардинально упрощается в характерном частном случае ее линейности по управлению $u(t)$. Применительно к этому случаю $u^{**}(t)$ является кусочно-постоянной (релейной) функцией времени:

$$u^{**}(t) = \frac{u_{\max} + u_{\min}}{2} \pm (-1)^{j+1} \frac{u_{\max} - u_{\min}}{2}, \quad (63)$$

$$\sum_{i=0}^{j-1} \Delta_{iu}^{(N)} < t < \sum_{i=0}^j \Delta_{iu}^{(N)}, \quad j = \overline{1, N}, \quad \Delta_{0u}^{(N)} = 0,$$

априори определяемой с точностью до вектора $\Delta_u^{(N)}$ моментов ее переключения $\Delta_{iu}^{(N)}, i = \overline{1, N}$, и до знака u^{**} на первом интервале постоянства. В такой ситуации антагонистический алгоритм $\eta^{**}(t)$

заведомо формируется в подобном (63) виде с обратным знаком перед множителем $(-1)^{j+1}$:

$$\eta^{**}(t) = \frac{\eta_{\max} + \eta_{\min}}{2} \mp (-1)^{j+1} \frac{\eta_{\max} - \eta_{\min}}{2},$$

$$\sum_{i=0}^{j-1} \Delta_{iu}^{(N)} < t < \sum_{i=0}^j \Delta_{iu}^{(N)}, \quad j = \overline{1, N}, \quad \Delta_{0u}^{(N)} = 0. \quad (64)$$

Здесь в (63), (64) $N = N_u = N_\eta$.

5. Многокритериальная задача управления объектом технологической теплофизики. В качестве примера, представляющего самостоятельный интерес, рассмотрим многокритериальную задачу оптимизации процесса индукционного нагрева металлических полуфабрикатов перед обработкой давлением [6-9, 14, 18-22].

Пусть температурное поле $Q(x, t)$ тела цилиндрической формы в процессе индукционного нагрева описывается в зависимости от радиальной координаты x и времени t неоднородным одномерным уравнением теплопроводности в относительных единицах вида (1)-(2) [14]:

$$\frac{\partial Q(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 Q(x, t)}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} + g_V(x) u_V(t), \quad 0 < t < t^*, \quad 0 < x < 1,$$

$$Q(x, 0) = Q^0 = const, \quad 0 \leq x \leq 1; \quad \frac{\partial Q(0, t)}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial Q(1, t)}{\partial x} + \beta Q(1, t) = \beta Q^0.$$

Здесь заданный коэффициент $\beta = const > 0$ определяет уровень тепловых потерь в окружающую среду с температурой Q^0 на внешней поверхности цилиндра $x = 1$; $g_V(x)$ — известная функция радиального распределения электромагнитных источников тепла [14]; $u_V(t)$ — суммарная удельная мощность внутреннего тепловыделения, рассматриваемая в качестве управляющего воздействия, стесненного ограничением (3):

$$0 \leq u_V(t) \leq 1, \quad 0 < t < t^*,$$

и в условиях интервальной неопределенности (39) вся информация о значениях Q^0 и β исчерпывается сведениями о диапазонах их максимально возможного изменения:

$$Q_{\min}^0 \leq Q^0 \leq Q_{\max}^0; \beta_{\min} \leq \beta \leq \beta_{\max}.$$

Пусть качество процесса индукционного нагрева с априори фиксируемой длительностью t^* описывается тремя рассматриваемыми в качестве критериев оптимальности типичными технико-экономическими показателями вида (7)-(9), характеризующими расход энергии на нагрев ($I_1(u_V)$), потери металла в окалину ($I_2(u_V)$) и точность приближения к заданному конечному температурному состоянию ($I_3(u_V)$), оцениваемую в равномерной метрике [8, 14]:

$$I_1(u_V) = \int_0^{t^*} u_V dt \rightarrow \min_{u_V \in \Omega_1};$$

$$I_2(u_V) = \int_0^{t^*} f_{02}(Q(1,t)) dt \rightarrow \min_{u_V \in \Omega_2};$$

$$f_{02}(Q(1,t)) = \begin{cases} 0, Q(1,t) \leq Q_h, \\ (Q(1,t) - Q_h)^{r+1}, Q(1,t) \geq Q_h; \end{cases}$$

$$I_3(u_V) = \int_0^{t^*} \frac{\tilde{\varepsilon}}{t^*} dt = \tilde{\varepsilon} \rightarrow \min_{u_V \in \Omega_3}; \frac{d\tilde{\varepsilon}}{dt} = 0.$$

Здесь Q_h — известная температурная граница процесса окисления; $Q(1,t)$ — температура поверхности нагреваемой заготовки; r — заданное число; требуемая конечная температура $Q_c > Q_h$ и I_3 представляется в известной форме интегрального функционала с дополнительными фазовыми ограничениями, где $\tilde{\Omega}_3$ совпадает с $\tilde{\Omega}_2$ в (44), (45).

Соответствующая многокритериальная задача управления с учетом интервальной неопределенности значений Q^0 и β приводится к виду (44)-(45) при

$$y = (Q^0, \beta); A = \{y : Q_{\min}^0 \leq Q^0 \leq Q_{\max}^0; \beta_{\min} \leq \beta \leq \beta_{\max}\},$$

где температурное поле $Q(x, y, t^*), x \in V = [0, 1]$, представляется разложением (5) в ряд по собственным функциям Бесселя нулевого порядка $\phi_n(x) = J_0(\mu_n x)$ [14]:

$$Q(x, y, t^*) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\mu_n^2 J_0(\mu_n x)}{(\mu_n^2 + \beta^2) J_0^2(\mu_n)} \bar{Q}_n(t^*),$$

и $\bar{Q}_n(t^*)$ определяется решениями уравнений (4) при $u_S(t) = 0$ в зависимости от значения Q^0 .

Последующий переход к однокритериальной версии (46) и применение по схеме (21)-(23) стандартной процедуры принципа максимума Понтрягина для любой допустимой пары значений (Q^0, β) приводит к искомой зависимости $u^{**}(\bar{Q}^{**}, \bar{\Psi}^{**})$ для оптимального управления в форме релейной функции времени:

$$u_V^{**}(t) = \frac{1}{2} \left[1 + \text{sign} \left(\tilde{\Psi}_1^{**} + \sum_{n=1}^{\infty} k_{Vn} \Psi_n^{**}(t) \right) \right],$$

на всех интервалах изменения оптимальной программы, где не выполняется тождественно равенство:

$$\tilde{\Psi}_1^{**} + \sum_{n=1}^{\infty} k_{Vn} \Psi_n^{**}(t) \equiv 0,$$

и в форме особого управления $u_0(t)$ на тех участках в ее составе, где последнее соотношение имеет место.

Можно показать, что искомая оптимальная программа действительно содержит особые участки, на которых минимизируются потери металла в окалину, существенно усложняя проблему однозначного выбора структуры $u_V^{**}(t)$ из множества допустимых вариантов [14].

Ограничимся далее типичной наиболее просто реализуемой ситуацией с программой оптимального управления [14]:

$$u_V^{**}(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq t_1; \\ u_0(t), & t_1 < t < t_2; \\ 0, & t_2 < t \leq t^*, \end{cases} \quad (65)$$

которая при заданной величине $t^* > t_2$ содержит единственный участок длительностью $t_2 - t_1$ с особым управлением (рисунок 1а),

определяемым в первом приближении в зависимости от t_1 известной функцией $u_0(t, t_1)$ экспоненциального вида [14].

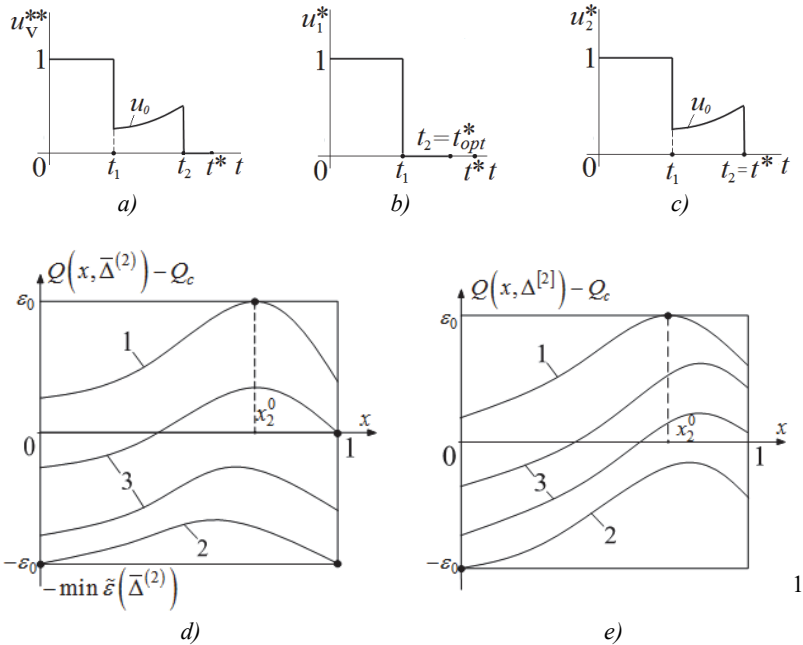


Рис. 1. Базовые характеристики оптимального процесса: а-с) структура управляющих воздействий; d, e) формы кривых пространственного распределения конечных температурных состояний в процессе многокритериальной оптимизации

В итоге при фиксированной величине t^* оптимальное управление $u^{**}(t)$ однозначно характеризуется его параметрическим представлением с точностью до вектора $\Delta^{(N)} = \Delta^{(2)} = (\Delta_1^{(2)}, \Delta_2^{(2)})$ параметров $\Delta_1^{(2)} = t_1$; $\Delta_2^{(2)} = t_2$ — начального и конечного моментов особого участка. Последующее интегрирование модели объекта с параметризованным управлением $u_V(\Delta^{(2)}, t)$ обеспечивает при $N=2$ редукцию к ЗПО вида (47)-(49) с явными выражениями для $Q(z, \Delta^{(2)})$, $\tilde{I}_p(\Delta^{(2)}, y)$, $\tilde{\lambda}_p(\Delta^{(2)})$, \tilde{I}_p^* , \tilde{I}_p^0 , где $z = (x, Q^0, \beta)$; $Z = [0, 1] \times A$. Применительно к наиболее характерной для

приложений ситуации (53), ЗПО (47)-(49) сводится к минимаксной задаче вида (54):

$$\tilde{\Phi}_{\Sigma}(\Delta^{(2)}) = \max_{z=(Q^0, \beta) \in A} \left[\max_{x \in [0,1]} |Q(X, Q^0, \beta, \Delta^{(2)}) - Q_c| \right] \rightarrow \min_{\Delta^{(2)}}. \quad (66)$$

Закономерности нестационарных процессов теплопроводности позволяют установить показанную на рисунке 1d форму кривой $Q(X, Q^0, \beta, \bar{\Delta}^{(2)})$ пространственного распределения конечного температурного состояния на решении $\bar{\Delta}^{(2)}$ задачи (66) [13, 14]. Согласно рисунку 1d система первых двух альтернансных равенств в (55) при $R_X = N + 1 = 3$ выполняется в трех точках $z_1^0 = (x_1^0 = 0, Q_1^0 = Q_{\min}^0, \beta_1 = \beta_{\max})$, $z_2^0 = (x_2^0 \in (0,1), Q_2^0 = Q_{\max}^0, \beta_2 = \beta_{\min})$, $z_3^0 = (x_3^0 = 1, Q_3^0 = Q_{\min}^0, \beta_3 = \beta_{\max})$ и редуцируется к расчетной системе четырех уравнений альтернансного метода:

$$\begin{aligned} & (1- Q^0 = Q_{\max}^0; \beta = \beta_{\min}; 2- Q^0 = Q_{\min}^0; \beta = \beta_{\max}; \\ & 3- Q_{\min}^0 < Q^0 < Q_{\max}^0; \beta_{\min} < \beta < \beta_{\max}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & Q(0, Q_{\min}^0, \beta_{\max}, \bar{\Delta}^{(2)}) - Q_c = -\min \tilde{\varepsilon}(\Delta^{(2)}); \\ & Q(x_2^0, Q_{\max}^0, \beta_{\min}, \bar{\Delta}^{(2)}) - Q_c = \min \tilde{\varepsilon}(\Delta^{(2)}); \\ & Q(1, Q_{\min}^0, \beta_{\max}, \bar{\Delta}^{(2)}) - Q_c = -\min \tilde{\varepsilon}(\Delta^{(2)}); \\ & \frac{\partial Q(x_2^0, Q_{\max}^0, \beta_{\min}, \bar{\Delta}^{(2)})}{\partial x} = 0. \end{aligned} \quad (67)$$

Эта система разрешается известными численными методами относительно всех четырех неизвестных параметров оптимального процесса $\bar{\Delta}_1^{(2)} = t_1$, $\bar{\Delta}_2^{(2)} = t_2$, $\min \tilde{\varepsilon}(\Delta^{(2)})$ и x_2^0 . Последующее вычисление по найденному указанным способом вектору $\bar{\Delta}^{(2)}$ значений $\tilde{\lambda}_p(\bar{\Delta}^{(2)})$ в (49) при известных \tilde{I}_p^* , \tilde{I}_p^0 и подобно (33) величины $\tilde{\lambda}_{\min}^0 = \max_{p=1,2,3} \tilde{\lambda}_p(\bar{\Delta}^{(2)})$ обеспечивает выполнение неравенств (49), завершая решение исходной ЗПО (47)-(49).

Для определения \tilde{I}_p^* необходимо предварительно решить частные задачи оптимизации вида (34):

$$\tilde{I}_p([\Delta^{(2)}]_p) \rightarrow \max_{Q^0, \beta} I_p([\Delta^{(2)}]_p, Q^0, \beta) \rightarrow \min_{[\Delta^{(2)}]_p}; p = 1, 2, 3;$$

$$\tilde{\Phi}_p([\Delta^{(2)}]_p) = \max_{Q^0, \beta} \left[\max_{x \in [0,1]} |Q_p(x, Q^0, \beta, [\Delta^{(2)}]_p) - Q_c| \right] \leq \varepsilon_{0p},$$

на элементах $[\Delta^{(2)}]_p$ подмножества $\{[\Delta^{(2)}]_p\} \subset \{\Delta^{(2)}\} \in G_N$ значений $\Delta^{(2)} = (t_1, t_2)$. Здесь \tilde{I}_p и $\tilde{\Phi}_p$ определяются согласно (42), (43); в рассматриваемых условиях (53) следует аналогичным образом принять:

$$\varepsilon_{0p} = \min \tilde{\varepsilon}([\Delta^{(2)}]_p) = \min_{[\Delta^{(2)}]_p} \left[\max_{x, Q^0, \beta} |Q_p(x, Q^0, \beta, [\Delta^{(2)}]_p) - Q_c| \right],$$

и в таком случае частные задачи оптимизации опять сводятся подобно (66) к минимизации $\tilde{\Phi}_p([\Delta^{(2)}]_p)$:

$$\tilde{\Phi}_p([\Delta^{(2)}]_p) = \max_{Q^0, \beta} \left[\max_{x \in [0,1]} |Q_p(x, Q^0, \beta, [\Delta^{(2)}]_p) - Q_c| \right] \rightarrow \min_{[\Delta^{(2)}]_p}. \quad (68)$$

Применительно к критерию I_1 минимальный расход энергии \tilde{I}_1^* достигается при нефиксируемом заранее моменте t_{opt}^* окончания процесса управления с релейной формой не содержащего особого участка алгоритма (65) (рисунок 1b), параметрически представляемого в этих условиях на подмножестве $\{[\Delta^{(2)}]_{p=1}\}$ векторов $\Delta^{(2)} = (t_1, t_2 < t^*)$, где $\{[\Delta^{(2)}]_{p=1}\} = \{\Delta^{(2)} = (t_1, t_2) : t_2 = t_{opt}^*, u_0 = 0\}$.

Здесь t_{opt}^* совпадает с минимальным временем t_{min}^* достижения требуемой величины $\varepsilon_{01} = \min \tilde{\varepsilon}([\Delta^{(2)}]_{p=1})$, и тогда всегда выполняется условие $t_{opt}^* < t^*$ для фиксируемого значения t^* [14].

В таком случае задержка начала процесса управления на время $t^* - t_{opt}^*$ обеспечивает поиск \tilde{I}_1^* на подмножестве $\{[\Delta^{(2)}]_{p=1}\}$. В итоге задача сводится к виду (68) при $p = 1$.

Ее решение $\Delta^{[1]} = (t_{1opt}, t_{opt}^*)$ обладает подобными (67) альтернансными свойствами, которые при сохранении характера зависимости $Q_p(x, Q^0, \beta, \Delta^{[1]})$ от x, Q^0, β , показанного на рисунке 1, d [14], приводят к аналогичной (67) системе уравнений. Здесь требуется только заменить $\bar{\Delta}^{(2)}$ решением $\Delta^{[1]}$, $\min \tilde{\varepsilon}(\Delta^{(2)})$ — значением $\min \tilde{\varepsilon}([\Delta^{(2)}]_{p=1})$ и представить $Q_1(x, Q^0, \beta, \Delta^{[1]})$ в виде, отвечающем алгоритму управления $u_1^*(t)$ релейной формы.

Последующее вычисление $\Delta^{[1]}$ позволяет найти $\tilde{I}_1^* = t_{1opt}$.

Минимизация I_2 обеспечивается в условиях максимальной длительности особого участка при $t_2 = t^*$ в (65) (рисунок 1с) [14], и, следовательно, в данном случае будем иметь:

$$\{[\Delta^{(2)}]_{p=2}\} = \{\Delta^{(2)} = (t_1, t_2) : t_2 = t^*\},$$

при фиксируемой заведомо величине t^* . В итоге, получаем однопараметрическое представление $[\Delta^{(2)}]_{p=2} = t_1$.

Таким образом, вторая частная задача оптимизации сводится к виду (68) при $p = 2$ и альтернансные свойства ее решения $\Delta^{[2]} = t_{1opt}$ согласно (55), (56) выполняются при условиях $N=1$, $R_X = 2$. Можно показать аналогично [13, 14], что конфигурация распределения $Q_2(x, Q^0, \beta, \Delta^{[2]})$ по x в зависимости от значений Q^0 и β принимает вид, показанный на рисунке 1е с двумя точками альтернанса $z_1^0 = (x_1^0 = 0, Q_1^0 = Q_{min}^0, \beta_1 = \beta_{max})$; $z_2^0 = (x_2^0 \in (0, 1), Q_2^0 = Q_{max}^0, \beta_2 = \beta_{min})$. Соответствующая система теперь уже трех уравнений для определения $\Delta^{[2]} = t_{1opt}$, $\min \tilde{\varepsilon}([\Delta^{(2)}]_{p=2})$, и x_2^0 выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} Q_2(0, Q_{min}^0, \beta_{max}, \Delta^{[2]}) - Q_c &= -\min \tilde{\varepsilon}([\Delta^{(2)}]_{p=2}); \\ Q_2(x_2^0, Q_{max}^0, \beta_{min}, \Delta^{[2]}) - Q_c &= \min \tilde{\varepsilon}([\Delta^{(2)}]_{p=2}); \\ \frac{\partial Q_2(x_2^0, Q_{max}^0, \beta_{min}, \Delta^{[2]})}{\partial x} &= 0. \end{aligned}$$

По найденным корням этой системы вычисляется $\tilde{I}_2^* = I_2(t_{1opt}, t^*)$ для заданной величины t^* .

Применительно к критерию I_3 подмножество $\{[\Delta^{(2)}]_{p=3}\}$ совпадает со всем допустимым множеством значений $\Delta^{(2)} \in G_2$, и задача (68) не отличается от (66), то есть $\Delta^{[3]} = \bar{\Delta}^{(2)}$ и $\tilde{I}_3^* = \min \tilde{\varepsilon}(\Delta^{(2)})$.

Значения $\tilde{I}_p^0, p = 1, 2, 3$ в (49) могут быть определены по алгоритму, подобному (38).

На рисунке 2 приведены некоторые результаты решения рассматриваемой задачи при $Q_{\min}^0 = -0,15$; $Q_{\max}^0 = 0$; $\beta_{\min} = 0,2$; $\beta_{\max} = 0,5$; $Q_h = 0,375$; $Q_c = 0,5$; $r = 3,5$; $t^* = 0,43$.

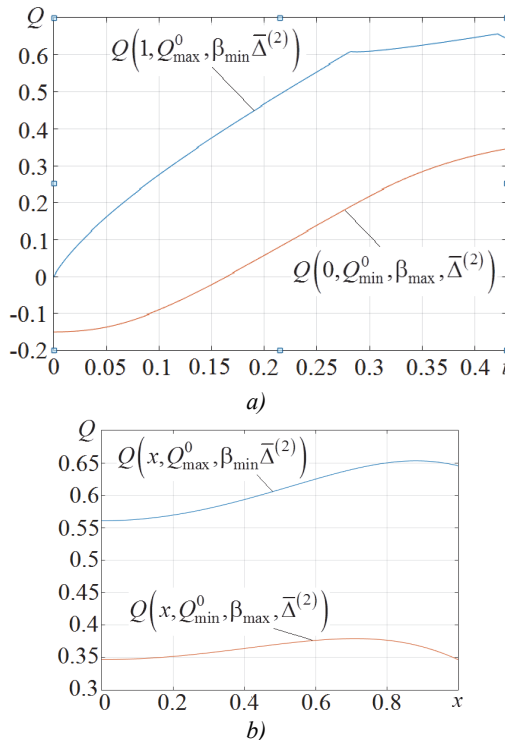


Рис. 2. Температурное поле (а) и результирующие радиальные распределения температур (б) в оптимальном процессе нагрева

Применительно к этому случаю находятся значения $\lambda_p(\bar{\Delta}^{(2)})$ и λ_{\min}^0 , определяемые для вычисляемых по указанной схеме значений

$$I_p^*, I_p^0 \quad \text{при} \quad p = 1, 2, 3: \quad \tilde{\lambda}_1(\bar{\Delta}^{(2)}) = 0.081845; \quad \tilde{\lambda}_2(\bar{\Delta}^{(2)}) = 0.09654;$$

$$\tilde{\lambda}_3(\bar{\Delta}^{(2)}) = 0; \quad \tilde{\lambda}_{\min}^0 = \tilde{\lambda}^0(\bar{\Delta}^{(2)}) = \max_{p=1,2,3} \tilde{\lambda}_p(\bar{\Delta}^{(2)}) = \tilde{\lambda}_2(\bar{\Delta}^{(2)}) = 0.09654.$$

6. Заключение. Предлагаемые способы поиска парето-эффективных решений достаточно широкого круга задач многокритериальной оптимизации систем с распределенными параметрами параболического типа сводятся к последовательно осуществляемым процедурам минимаксной свертки нормализуемых критериев качества; перехода к эквивалентной версии в форме типовой вариационной задачи с ограничениями; точной (в рамках исследуемых моделей) редукции к задаче полубесконечного программирования после параметризации искомым управляющих воздействий и ее алгоритмически точному решению альтернативным методом, который распространяет на рассматриваемые задачи известные результаты теории нелинейных чебышёвских приближений с существенным использованием закономерностей предметной области. Подобная схема реализована в наиболее характерных для приложений условиях оценки в равномерной метрике требований к конечному состоянию распределенной системы.

Разработанная применительно к детерминированным моделям объекта технология может быть распространена на задачи управления по принципу гарантированного результата системами с распределенными параметрами с интервальными неопределенностями параметрических характеристик объекта и (или) внешних возмущающих воздействий. По существу, такие задачи сводятся к детерминированному варианту для наиболее неблагоприятной из возможных реализации неопределенных факторов.

Приведенный пример иллюстрирует конструктивный характер предлагаемой технологии в условиях наличия дополнительной информации о базовых свойствах исследуемых процессов в каждой отдельно взятой задаче многокритериального управления.

Литература

1. *Гермейер Ю.Б.* Введение в теорию исследования операций // М.: Наука. 1971. 383 с.
2. *Мацунин К.Ю., Мацунин Ю.К.* Моделирование технических систем в условиях неопределенности и принятие оптимального решения // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2013. № 4. С. 19–35.
3. *Мацунин К.Ю., Мацунин Ю.К.* Векторная оптимизация с равнозначными и приоритетными критериями // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2017. № 6. С. 80–99.

4. *Новикова Н.М., Поспелова И.И., Зенюков А.И.* Метод сверток в многокритериальных задачах с неопределенностью // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2017. № 5. С. 27–45.
5. *Konak A., Coit D.W., Smith A.E.* Multi-objective optimization using genetic algorithms: a tutorial // Reliability Engineering and Systems Safety. 2006. vol. 9. pp. 992–1007.
6. *Di Barba P.* Basic principles of optimal design of electromagnetic devices and multi-objective optimization // ASM Handbook, Induction Heating and Heat Treatment. 2014. vol. 4C. pp. 359–365.
7. *Di Barba P. et al.* Induction heating of a graphite disk: a benchmark for multi-physics platform for multi-objective design // Proceedings of XVIII International UIE-Congress «Electrotechnologies for Material Processing». 2017. pp. 520–525.
8. *Pleshivtseva Yu. et al.* Design concepts of induction mass heating technology based on multiple-criteria optimization // Intern. Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering. 2017. vol. 36. no. 2. pp. 386–400.
9. *Sieni E., Forzan M., Di Barba P.* Migration NSGA: Method to Improve a Non-Elitist Searching of Pareto front with Application in Magnetics // Inverse Problems in Science and Engineering. 2016. vol. 24. no. 1. pp. 543–566.
10. *Klonk S., Bay F.* Numerical Analysis of Computational Models for Induction Heat Treatment of Complex Geometrical Parts // International Journal of Microstructure and materials Properties. 2016. vol. 11. no. 1-2. pp. 48–70.
11. *Дилигенский Н.В., Дымова Л.Г., Севастьянов П.В.* Нечеткое моделирование и многокритериальная оптимизация производственных систем в условиях неопределенности: технология, экономика, экология // М.: Машиностроение-1. 2004. 336 с.
12. *Волин Ю.М., Островский Г.М.* Многокритериальная оптимизация технологических процессов в условиях неопределенности // Автоматика и телемеханика. 2007. № 3. С. 165–180.
13. *Рапопорт Э.Я.* Альтернативный метод в прикладных задачах оптимизации // М.: Наука. 2000. 336 с.
14. *Рапопорт Э.Я., Плишевицева Ю.Э.* Оптимальное управление температурными режимами индукционного нагрева // М.: Наука. 2012. 309 с.
15. *Рапопорт Э.Я.* Структурное моделирование объектов и систем с распределенными параметрами // М.: Высшая школа. 2003. 299 с.
16. *Пантелеев А.В., Бортакоский А.С.* Теория управления в примерах и задачах // М.: Высшая школа. 2003. 583 с.
17. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры // М.: Наука. 1974. 456 с.
18. *Di Barba P., Forzan M., Sieni E.* Multiobjective design optimization of an induction heating device: A benchmark problem // International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics. 2015. vol. 47. no. 4. pp. 1003–1013.
19. *Di Barba P., Dughiero F., Forzan M., Sieni E.* Improved solution to a multi-objective benchmark problem of inverse induction heating // International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics. 2015. vol. 49. no. 2. pp. 279–288.
20. *Bay F., Alves J., Barlier J.* Modelling and optimisation of electromagnetically coupled solid manufacturing processes // Proceedings of XVIII International UIE-Congress «Electrotechnologies for Material Processing». 2017. pp. 436–441.
21. *Rudnev V., Loveless D., Cook R.* Handbook of Induction Heating: 2nd edition // CRC Press. 2017. 780 p.
22. *Brown D., Rudnev V., Dickson P.* Induction Heating of Billets, Rods and Bars // ASM Handbook. 2014. vol. 4. pp. 330–345.

Рапопорт Эдгар Яковлевич — д-р техн. наук, профессор, профессор кафедры автоматизации и управления в технических системах института автоматизации и информационных технологий, Самарский государственный технический университет (СамГТУ). Область научных интересов: теория управления системами с распределенными параметрами, оптимизация объектов технологической теплофизики. Число научных публикаций — 400. edgar.rapoport@mail.ru; ул. Молодогвардейская, 244, Самара, 443100; р.т.: +7(846)337-0700.

Плешивцева Юлия Эдгаровна — д-р техн. наук, профессор, профессор кафедры управления и системного анализа теплоэнергетических и социотехнических комплексов теплоэнергетического факультета, Самарский государственный технический университет (СамГТУ). Область научных интересов: теория управления системами с распределенными параметрами, оптимизация объектов технологической теплофизики. Число научных публикаций — 165. yulia_pl@mail.ru; ул. Молодогвардейская, 244, Самара, 443100; р.т.: +7(846)332-4234.

Поддержка исследований. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты №18-08-00048 и №16-08-00945).

E.YA. RAPOPORT, YU.E. PLESHIVTSEVA
**METHOD OF MULTIOBJECTIVE OPTIMIZATION OF
CONTROLLED SYSTEMS WITH DISTRIBUTED PARAMETERS**

Rapoport E.Ya., Pleshivtseva Yu.E. Method of Multiobjective Optimization of Controlled Systems with Distributed Parameters.

Abstracts. The constructive method for multicriteria optimization of control processes of deterministic and not fully defined controlled systems with distributed parameters, described by linear multidimensional parabolic partial differential equations with internal and boundary control actions, is proposed. The optimization problem is considered when an uniform approximation accuracy of object's final state to the required spatial distribution of controlled function is given. The suggested approach is based on the one-criterion option in the form of minimax convolution of the normalized quality criteria and the subsequent transition to the equivalent form of a typical variational problem with constraints. It is applied to the deterministic model of an object described by an infinite system of differential equations with respect to time-dependent modes of the controlled quantity expansion in a series of eigenfunctions of the initial-boundary value problem. Further procedures for the preliminary parametrization of control actions, based on analytical optimum conditions and reduction to semi-infinite programming problems, allow one to find the desired extremals using their Chebyshev properties and fundamental laws of the domain in typical application conditions of estimating the accuracy of approaching the object's final state to the required one in a uniform metric. The obtained results are extended to the tasks of program control on the principle of guaranteed result by ensembles of object trajectories under conditions of interval uncertainty of the parametric characteristics of the distributed system and multiple external disturbances. A demonstrated example of a multicriteria optimization of an innovation technology of metal induction heating prior a hot forming is of special interest. The typical optimization criteria such as energy consumption, metal loss due to scale formation, and heating accuracy are considered as components of vector optimization criterion.

Key words: multiobjective optimization, system with distributed parameters, semi-infinite optimization, controlled systems, uniform approximation, alternance method, interval of uncertainty, principle of guaranteed result.

Rapoport Edgar Yakovlevich — Ph.D., Dr. Sci., professor, professor of automatics and control in technical systems department of Institute of automatics and information technologies, Samara State Technical University. Research interests: theory of control of systems with distributed parameters, optimization of objects of technological thermal physics. The number of publications — 400. edgar.rapoport@mail.ru; 244, Molodogvardeyskaya Str., Samara, 443100, Russia; office phone: +7(846)337-0700.

Pleshivtseva Yuliya Edgarovna — Ph.D., Dr. Sci., professor, professor of control and system analysis department of Faculty of heat-and-power engineering, Samara State Technical University. Research interests: theory of control of systems with distributed parameters, optimization of objects of technological thermal physics. The number of publications — 165. yulia_pl@mail.ru; 244, Molodogvardeyskaya Str., Samara, 443100, Russia; office phone: +7(846)332-4234.

Acknowledgements. This research is supported by RFBR (grants no. 18-08-00048 and no. 16-08-00945).

References

1. Germejer Yu.B. *Vvedenie v teoriju issledovanija operacij* [Introduction in theory research operations]. M.: Nauka. 1971. 383 p. (In Russ.).
2. Mashunin K.Yu., Mashunin Yu.K. [Simulating engineering systems under uncertainty and optimal decision making]. *Izv. RAN. Teorija i sistemy upravleniya – Journal of Computer and Systems Sciences International*. 2013. vol. 4. pp. 19–35. (In Russ.).
3. Mashunin K.Yu., Mashunin Yu.K. [Vector optimization with equal and priority criteria]. *Izv. RAN. Teorija i sistemy upravleniya – Journal of Computer and Systems Sciences International*. 2017. vol. 6. pp. 80–99. (In Russ.).
4. Novikova N.M., Pospelova I.I., Zenyukov A.I. [Method of convolution in multicriteria problems with uncertainty]. *Izv. RAN. Teorija i sistemy upravleniya – Journal of Computer and Systems Sciences International*. 2017. vol. 5. pp. 27–45. (In Russ.).
5. Konak A., Coit D.W., Smith A.E. Multi-objective optimization using genetic algorithms: a tutorial. *Reliability Engineering and Systems Safety*. 2006. vol. 9. pp. 992–1007.
6. Di Barba P. Basic principles of optimal design of electromagnetic devices and multi-objective optimization. ASM Handbook, Induction Heating and Heat Treatment. 2014. vol. 4C. pp. 359–365.
7. Di Barba P. et al. Induction heating of a graphite disk: a benchmark for multi-physics platform for multi-objective design. Proceedings of XVIII International UIE-Congress “Electrotechnologies for Material Processing”. 2017. pp. 520–525.
8. Pleshivtseva Yu. et al. Design concepts of induction mass heating technology based on multiple-criteria optimization. *Intern. Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering*. 2017. vol. 36. no. 2. pp. 386–400.
9. Sieni E., Forzan M., Di Barba P. Migration NSGA: Method to Improve a Non-Elitist Searching of Pareto front with Application in Magnetics. *Inverse Problems in Science and Engineering*. 2016. vol. 24. no. 1. pp. 543–566.
10. Klonk S., Bay F. Numerical Analysis of Computational Models for Induction Heat Treatment of Complex Geometrical Parts. *International Journal of Microstructure and materials Properties*. 2016. vol. 11. no. 1–2. pp. 48–70.
11. Diligenskij N.V., Dymova L.G., Sevast'janov P.V. *Nechetkoe modelirovanie i mnogokriterial'naja optimizacija proizvodstvennyh sistem v uslovijah neopredelennosti: tehnologija, jekonomika, jekologija*. [Fuzzy modeling and multi-criteria optimization of production systems under uncertainty: technology, economy, ecology]. M.: Mashinostroenie-1. 2004. 336 p. (In Russ.).
12. Volin Yu.M., Ostrovskij G.M. [Multicriteria optimization of technological processes under uncertainty conditions]. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*. 2007. vol. 3. pp. 165–180. (In Russ.).
13. Rapoport E.Ya. *Al'ternansnyj metod v prikladnyh zadachah optimizacii* [Alternative Method for Solving Applied Optimal Control Problems]. M.: Nauka. 2000. 336 p. (In Russ.).
14. Rapoport E.Ya., Pleshivtseva Yu.E. *Optimal'noe upravlenie temperaturnymi rezhimami indukcionnogo nagreva* [Optimal Control of Induction Heating Processes]. M.: Nauka. 2012. 309 p. (In Russ.).
15. Rapoport E.Ya. *Strukturnoe modelirovanie objektov i system upravlenija s raspredelennymi parametrami* [Structural parametric synthesis of automatic control systems with distributed parameters]. M.: Vysshaya Shkola. 2003. 299 p. (In Russ.).
16. Panteleev A.V., Bortakovskij A.S. *Teorija upravlenija v primerah i zadachah* [Control Theory in Examples and Problems]. M.: Vysshaja shkola. 2003. 583 p. (In Russ.).

17. Krasovskij N.N., Subbotin A.I. *Pozicionnye differencial'nye igry* [Positional Differential Games]. M.: Nauka. 1974. 456 p. (In Russ.).
18. Di Barba P., Forzan M., Sieni E. Multiobjective design optimization of an induction heating device: A benchmark problem. *International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics*. 2015. vol. 47. no. 4. pp. 1003–1013.
19. Di Barba P., Dughiero F., Forzan M., Sieni E. Improved solution to a multi-objective benchmark problem of inverse induction heating. *International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics*. 2015. vol. 49. no. 2. pp. 279–288.
20. Bay F., Alves J., Barlier J. Modelling and optimisation of electromagnetically coupled solid manufacturing processes. Proceedings of XVIII International UIE-Congress “Electrotechnologies for Material Processing”. 2017. pp. 436–441.
21. Rudnev V., Loveless D., Cook R. Handbook of Induction Heating: 2nd edition. CRC Press. 2017. 780 p.
22. Brown D., Rudnev V., Dickson P. Induction Heating of Billets, Rods and Bars. ASM Handbook. 2014. vol. 4. pp. 330–345.