

Ф.А. ТАУБИН, А.Н. ТРОФИМОВ

**КАСКАДНОЕ КОДИРОВАНИЕ НА ОСНОВЕ МНОГОМЕРНЫХ  
РЕШЕТОК И КОДОВ РИДА — СОЛОМОНА ДЛЯ  
МНОГОУРОВНЕВОЙ ФЛЭШ-ПАМЯТИ**

*Таубин Ф.А., Трофимов А.Н. Каскадное кодирование на основе многомерных решеток и кодов Рида — Соломона для многоуровневой флэш-памяти.*

**Аннотация.** В работе рассмотрена каскадная схема кодирования для многоуровневой флэш-памяти, внутренняя ступень которой представляет собой конечное подмножество многомерной целочисленной решетки (lattice code), а в качестве внешней ступени используется код Рида — Соломона.

Анализ помехоустойчивости предложенной каскадной схемы выполнен применительно к модели, отражающей основные физические особенности ячейки флэш-памяти с неравномерно расположенными целевыми уровнями напряжения в ячейке и дисперсией шума, зависящей от записанного значения (input-dependent additive Gaussian noise, ID-AGN). Для этой модели в работе развит новый подход к вычислению вероятности ошибки декодирования внутреннего кода на основе одномерного численного интегрирования произведений характеристических функций случайных величин, используемых декодером при вынесении решения. Показано, как при увеличении времени хранения и/или числа циклов перезаписи адаптировать параметры предложенной каскадной конструкции с тем, чтобы сохранить требуемый уровень вероятности ошибки.

**Ключевые слова:** каскадный код, многомерные решетки, код Рида — Соломона, многоуровневая флэш-память, вероятность ошибки декодирования.

**1. Введение.** Многоуровневая флэш-память благодаря более высокой плотности записи занимает доминирующее место на рынке энергонезависимых устройств хранения данных [1]. В настоящее время стандартом де-факто является флэш-память с четырьмя состояниями (уровнями записи), что позволяет хранить два бита в ячейке памяти; при этом в литературе сообщается о дальнейшем прогрессе технологии производства флэш-памяти, который позволит использовать 8 и даже 16 уровней [2-4]. Обратной стороной повышения плотности записи, достигаемого за счет возрастания количества используемых в ячейке состояний, является снижение надежности хранения данных. Основными факторами, определяющими снижение надежности при увеличении числа уровней, являются повторяющиеся в процессе эксплуатации циклы записи/стирания и утечка заряда плавающего затвора с течением времени. Воздействие указанных факторов проявляется в виде появления шума записи/считывания, что приводит к случайному

отклонению реального порогового уровня напряжения от целевого уровня (target value) напряжения в ячейке. В результате в процессе считывания содержимого флэш-памяти возникают ошибки. Экспериментальные исследования показывают [5], что в многоуровневой памяти (в считываемой области) доминирующим является близкое к равномерному распределение ошибок без заметной тенденции к пакетированию. С учетом того, что вероятность ошибки (raw bit error rate) в многоуровневой флэш-памяти оказывается неприемлемо высокой, порядка  $10^{-4}$ ... $10^{-3}$  и более, тогда как требуемая вероятность ошибки лежит в диапазоне  $10^{-12}$ ... $10^{-16}$ , введение помехоустойчивого кодирования оказывается неизбежным.

Один из возможных эффективных подходов к организации введения помехоустойчивого кодирования связан с использованием каскадных конструкций. Среди возможных вариантов внутреннего кода следует выделить многомерные сигнальные множества, обладающие гибкой структурой с широким диапазоном варьирования параметров и допускающие, как правило, сравнительно простую организацию мягкого декодирования, что может существенно повысить эффективность внешнего кодирования.

Несмотря на указанные достоинства многомерных сигнальных множеств, возможность их использования для повышения надежности хранения данных во флэш-памяти рассматривалась лишь в нескольких публикациях. Одной из первых, по-видимому, является работа [6]. В работе [7] было показано, что использование многомерных сигнальных множеств позволяет в ряде случаев заметно снизить вероятность ошибки. Каскадное кодирование с многомерным сигнальным множеством в качестве внутреннего кода рассматривалось в работах [8-10]. В этих публикациях в качестве внешних кодов рассматривались, соответственно, БЧХ коды, коды Рида — Соломона и низкоплотностные коды. Во всех работах была продемонстрирована существенная эффективность такого рода каскадных конструкций для повышения надежности хранения данных во флэш-памяти.

Вместе с тем в указанных работах анализ каскадных конструкций проводился применительно к упрощенной модели ячейки флэш-памяти — с равномерно расположенными целевыми уровнями напряжения в ячейке и аддитивным гауссовским шумом с фиксированной дисперсией. В настоящей работе рассматривается

более реалистичная модель ячейки флэш-памяти [11, 12] — с неравномерно расположенными целевыми уровнями напряжения в ячейке и дисперсией шума, зависящей от записанного значения (input-dependent additive Gaussian noise, ID-AGN). Применительно к этой модели развит новый подход к вычислению вероятности ошибки декодирования слов внутреннего кода. В результате оценка вероятности ошибки декодирования слова внутреннего кода по максимуму правдоподобия вычисляется путем одномерного численного интегрирования некоторого выражения, включающего характеристические функции случайных величин, на основе которых формируется решение.

**2. Модель ячейки многоуровневой флэш-памяти (гауссовская аппроксимация).** В рассматриваемой модели блок флэш-памяти рассматривается как множество независимых ячеек. Далее полагается, что физический носитель может рассматриваться как стационарный канал без заметной тенденции к пакетированию ошибок, поэтому математическая модель представляет собой модель канала без памяти, которая полностью определяется моделью одиночной ячейки флэш-памяти. При описании упрощенной математической модели одиночной ячейки флэш-памяти мы опираемся на публикации [11, 12]. Входные уровни каждой ячейки принимают некоторые фиксированные значения  $x_0, x_1, \dots, x_{q-1}$ , а выходные значения представляют собой случайные величины. Распределения этих случайных величин описываются условными функциями плотности вероятности (ф.п.в.)  $p_{y|x}(y|x)$ ,  $-\infty < y < \infty$ ,  $x = x_0, x_1, \dots, x_{q-1}$ .

В публикациях [11-13] перечисляются следующие факторы, влияющие на распределение значений выходных уровней одиночных ячеек: а) начальное распределение пороговых значений; б) влияние циклов записи/стирания (program/erasure cycling, P/E cycling); в) взаимная интерференция ячеек (cell-to-cell interference); г) влияние времени хранения (retention). Оставляя в стороне описание физических процессов, влияющих на распределение выходных уровней одиночной ячейки флэш-памяти, будем считать, что модель ячейки определяется ф.п.в.  $p_{y|x}(y|x_i)$ ,  $i = 0, 1, \dots, q-1$ , которые могут аппроксимированы гауссовскими плотностями, то есть будем считать, что:

$$p_{y|x}(y|x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(x_i)} \exp\left(-\frac{(y-x_i)^2}{2\sigma^2(x_i)}\right). \quad (1)$$

Такое описание называется также моделью с гауссовским шумом, стандартное отклонение которого  $\sigma(x_i)$  зависит от входного значения  $x_i$  [14], или ID-AGN моделью (input-dependent additive Gaussian noise). Мы будем использовать также обозначение  $\sigma_i = \sigma(x_i)$ . Распространенным примером, используемым далее в качестве основного, служит значение  $q = 4$  [11-13]. Заметим, что эта модель допускает обобщение на большее число входных уровней, в частности на шесть, восемь и двенадцать уровней [14]. Важной особенностью модели ячейки многоуровневой флэш-памяти является то, что с ростом числа циклов перезаписи  $N$  и времени хранения  $T$  значения  $x_i$  (кроме  $x_0$ ) уменьшаются, а значения  $\sigma_i$  (кроме  $\sigma_0$ ) увеличиваются, что соответствует ухудшению канала с ростом величин  $T$  и  $N$ . Зависимость параметров  $x_i$  и  $\sigma_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, q-1$  от значений  $T$  и  $N$  выражается сложным образом и здесь не приводится. Детали описания этой зависимости могут быть найдены в [11, 12] и в [15], где также приводится обоснование методики гауссовской аппроксимации. Здесь мы будем пользоваться зависимостями значений  $x_i$  и  $\sigma_i$  от  $T$  и  $N$ , которые были численно найдены, исходя из описания физической модели [11, 12]. На рисунке 1 в графической форме представлены значения параметров  $x_i$  и  $\sigma_i$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$  для ряда значений числа циклов перезаписи  $N$  и времени хранения  $T$ , а на рисунке 2 — примеры графиков ф.п.в.  $p_{y|x}(y | x_i)$ .

Нетрудно оценить, что вероятность ошибочного решения о записанном уровне составляет величину порядка  $10^{-4} \dots 10^{-3}$  и более в зависимости от числа циклов перезаписи  $N$  и времени хранения  $T$ . Отсюда следует, что вводимое помехоустойчивое кодирование должно обеспечить снижение вероятности ошибки по меньшей мере на 8...11 порядков, поскольку требуемое значение вероятности ошибки представляет собой величину порядка  $10^{-12}$ .

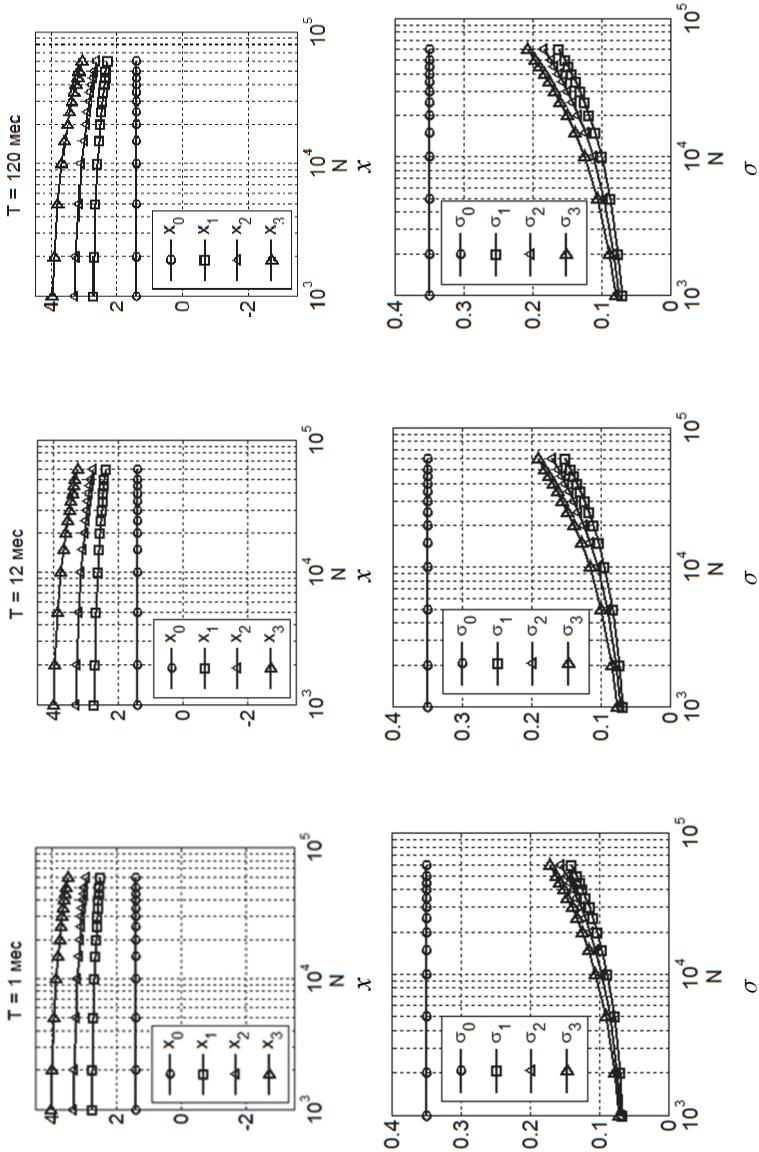


Рис. 1. Значения  $x_i$  и  $\sigma_i$  в зависимости от  $N$  и  $T$

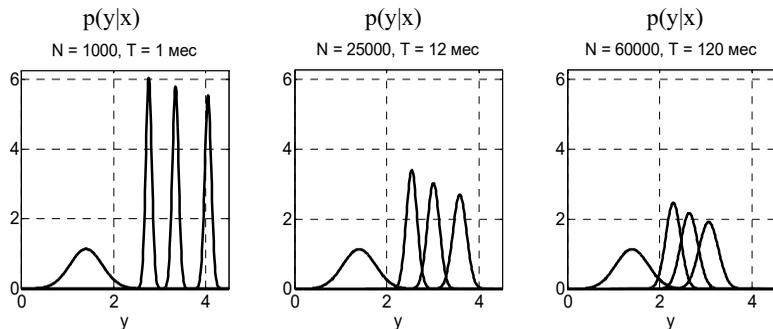


Рис. 2. Функции плотности вероятности  $p_{y|x}(y | x_i)$  считываемых значений

**3. Внутренний код каскадной кодовой конструкции на основе многомерной решетки.** Обозначим через элементарное сигнальное множество, состоящее из  $q$  целых чисел,  $A = \{0, 1, \dots, q-1\}$ , и будем полагать, что  $m = \log_2 q$  целое. Множество  $A$  связано с реальным сигнальным множеством (множеством уровней записи)  $X = \{x_0, x_1, \dots, x_{q-1}\}$  посредством взаимно однозначного отображения  $I$  множества  $A$  на множество  $X$  вида  $I(i) = x_i$ ,  $0 \leq i < q-1$ . Иными словами, множество  $A$  представляет собой множество индексов уровней записи. Пусть  $B$  есть прямое произведение  $n$  экземпляров элементарного сигнального множества  $A$ ,  $B = A^n$ . Множество  $B$  будем называть сигнальным множеством в рассматриваемой конструкции. Общее число точек в сигнальном множестве  $B$  равно  $q^n = 2^{nm}$ , так что множество  $B$  соответствует  $n$  ячейкам памяти, хранящим  $m \times n$  бит.

**3.1 Разбиение сигнального множества.** При построении и описании разбиения сигнального множества на вложенные подмножества удобно рассматривать исходное сигнальное множество как *конечное подмножество* многомерной целочисленной решетки (lattice).

Пусть  $\mathbf{Z}^n$  — прямое произведение  $n$  экземпляров одномерной целочисленной решетки  $\mathbf{Z}$  и пусть  $\Lambda_0$  — подрешетка решетки  $\mathbf{Z}^n$ ,  $\Lambda_0 \subseteq \mathbf{Z}^n$ . Подрешетка  $\Lambda_0$  определяет разбиение  $\mathbf{Z}^n / \Lambda_0$  решетки  $\mathbf{Z}^n$  на подрешетку  $\Lambda_0$  и ее смежные классы; пусть порядок этого разбиения  $|\mathbf{Z}^n / \Lambda_0| = 2^{r_0}$ ,  $r_0 \geq 0$ . Значение  $r_0 = 0$  означает, что  $\Lambda_0 = \mathbf{Z}^n$ , что соответствует отсутствию разбиения. Обозначим через

$B_0$  пересечение подрешетки  $\Lambda_0$  и конечного сигнального множества  $B$ ,  $B_0 = \Lambda_0 \cap B$ . Очевидно, что  $|B_0| = 2^{mn-r_0}$ , и в этом случае  $0 \leq r_0 \leq mn$ . Множество  $B_0$  в общем случае разбивается далее на вложенные подмножества с использованием разбиения решетки  $\Lambda_0$  на подходящие вложенные подрешетки.

Довольно жесткие требования к быстродействию флэш-памяти и к сложности реализации декодера диктуют выбор в качестве допустимых сравнительно простых вариантов разбиения решетки  $\Lambda_0$ . Поэтому ограничимся далее рассмотрением разбиений вида:

$$\Lambda_0 / 2\mathbf{Z}^n / 4\mathbf{Z}^n / \dots / 2^L \mathbf{Z}^n, \quad L = m-1. \quad (2)$$

Будем полагать, что  $\Lambda_0$  в (2) есть mod 2 решетка, то есть  $\Lambda_0 \subseteq 2\mathbf{Z}^n$ . Рассмотрим вначале разбиение  $\Lambda_0 / 2\mathbf{Z}^n$ . Порядок разбиения  $|\Lambda_0 / 2\mathbf{Z}^n| = 2^{n-r_0}$ . Можно показать [16], что  $l$ -й смежный класс в разбиении  $\Lambda_0 / 2\mathbf{Z}^n$  может быть представлен в виде  $2\mathbf{Z}^n + \mathbf{a}_l \mathbf{G}$ , где  $\mathbf{a}_l$  — двоичный (над алфавитом  $\{0, 1\}$ ) вектор размера  $n-r_0$ , и

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \mathbf{g}_{11} \\ \vdots \\ \mathbf{g}_{1, n-r_0} \end{pmatrix}$$

— двоичная матрица, строками которой являются генераторы совокупности смежных классов в разбиении  $\Lambda_0 / 2\mathbf{Z}^n$ . Отсюда следует, что решетка  $\Lambda_0$  может быть представлена как:

$$\Lambda_0 = 2\mathbf{Z}^n + \{\mathbf{a}_l \mathbf{G} \mid 1 \leq l \leq 2^{n-r_0}\}. \quad (3)$$

Матрицу  $\mathbf{G}$  в (3) можно интерпретировать как порождающую матрицу линейного двоичного  $(n, n-r_0)$  кода  $C$ , поэтому решетка  $\Lambda_0$  представляется в виде:

$$\Lambda_0 = 2\mathbf{Z}^n + C. \quad (4)$$

Для представления (4) нетрудно заметить, что минимальное евклидово расстояние  $\Delta_0$  между точками решетки  $\Lambda_0$  может быть

вычислено как  $\Delta_0 = \min(2, \sqrt{d_H})$ , где  $d_H$  — минимальное хэммингово расстояние кода  $C$ .

Приведем три важных примера использования представления (4). Для безызбыточного (полного) кода  $C$   $\Lambda_0 = \mathbf{Z}^n$  и  $\Delta_0 = 1$ . Если код  $C$  в (4) есть  $(n, n-1)$  код с проверкой на четность, то  $\Lambda_0$  будет решеткой Schläfli  $D_n$ , и  $\Delta_0 = \sqrt{2}$ . Третий пример: если код  $C$  в (4) есть код Рида — Маллера (8, 4),  $n = 8$ , то решетка  $\Lambda_0$  будет представлять собой решетку Gosset  $E_8$ , и  $\Delta_0 = 2$ .

Теория кодов на основе целочисленных решеток имеет своей целью построение сигнально-кодовых конструкций с максимально возможным евклидовым расстоянием. Однако евклидова метрика не является в полной мере согласованной с моделью канала записи/считывания с ID-AGN. Построить же строго согласованную метрику для канала с неравномерно расположенными уровнями сигналов и шумом, дисперсия которого зависит от переданного (записанного) значения, не представляется возможным. Поэтому в дальнейшем используется компромиссный подход — использование для рассматриваемой модели флэш-памяти кодов, построенных на основе целочисленных решеток и ориентированных на использование в канале с аддитивным гауссовским шумом с постоянной дисперсией.

Разбиения  $2^k \mathbf{Z}^n / 2^{k+1} \mathbf{Z}^n$ ,  $1 \leq k \leq L-1$ , в цепочке (2) имеют весьма простую структуру. Нетрудно видеть, что порядок разбиения  $|2^k \mathbf{Z}^n / 2^{k+1} \mathbf{Z}^n| = 2^n$ , а  $l$ -й смежный класс в разбиении  $2^k \mathbf{Z}^n / 2^{k+1} \mathbf{Z}^n$ ,  $1 \leq k \leq L-1$ , может быть представлен в виде  $2^{k+1} \mathbf{Z}^n + 2^k \mathbf{a}_l$ , где  $\mathbf{a}_l$  — двоичный (над алфавитом  $\{0,1\}$ ) вектор размера  $n$ . Это означает, что решетка  $2^k \mathbf{Z}^n$  может быть представлена в виде:

$$2^k \mathbf{Z}^n = 2^{k+1} \mathbf{Z}^n + \{2^k \mathbf{a}_l \mid 1 \leq l \leq 2^n\}. \quad (5)$$

Минимальное евклидово расстояние  $\Delta_k$  между точками подрешетки  $2^k \mathbf{Z}^n$ ,  $1 \leq k \leq L-1$  равно, очевидно,  $2^k$ .

Представления (3) и (5) разбиений решеток в цепочке (2) позволяют полностью описать структуру разбиений сигнального множества  $B_0$  на вложенные подмножества. Пусть  $B_1 = B_0 \cap 2\mathbf{Z}^n$  и пусть  $B_l$  — пересечение множества  $B_0$  и  $l$ -го смежного класса в

разбиении  $\Lambda_0 / 2\mathbf{Z}^n$ . Тогда из представления (3) следует, что подмножество  $B_l$  (в некотором смысле  $l$ -й «смежный класс» в разбиении  $B_0 / B_1$ ) может быть представлено в виде  $B_l = B_1 + \mathbf{a}_l \mathbf{G}$ , где  $\mathbf{a}_l$  — двоичный (над алфавитом  $\{0,1\}$ ) вектор размера  $n-r_0$ ,  $\mathbf{G}$  — двоичная матрица, строками которой являются генераторы совокупности смежных классов в разбиении  $\Lambda_0 / 2\mathbf{Z}^n$ , то есть:

$$B_l = B_1 + \{\mathbf{a}_l \mathbf{G} \mid 1 \leq l \leq 2^{n-r_0}\}. \quad (6)$$

Пусть  $B_k = B_0 \cap 2^k \mathbf{Z}^n$ ,  $2 \leq k \leq L$ , и пусть  $B_{kl}$  — пересечение множества  $B_0$  и  $l$ -го смежного класса в разбиении  $2^{k-1} \mathbf{Z}^n / 2^k \mathbf{Z}^n$ . Тогда из представления (5) следует, что подмножество  $B_{kl}$  (в некотором смысле  $l$ -й «смежный класс» в разбиении  $B_{k-1} / B_k$ ) может быть представлено в виде  $B_{kl} = B_k + 2^{k-1} \mathbf{a}_l$ , где  $\mathbf{a}_l$  — двоичный (над алфавитом  $\{0,1\}$ ) вектор размерности  $n$ . Отсюда следует, что:

$$B_{k-1} = B_k + \{2^{k-1} \mathbf{a}_l \mid 1 \leq l \leq 2^n\}. \quad (7)$$

### 3.2. Кодирование и декодирование внутреннего кода.

Представления (6) и (7), в явном виде характеризующие структуру рассматриваемых разбиений сигнального множества, позволяют указать весьма простую процедуру кодирования для внутреннего кода  $B_0$ . Двоичный блок  $\mathbf{u}$ , кодируемый кодом  $B_0$ , состоит, очевидно, из  $mn-r_0$  символов. Представим блок  $\mathbf{u}$  в виде набора  $m$  подблоков:  $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{m-1})$ , где подблок  $\mathbf{u}_0$  имеет длину  $n-r_0$ , а остальные подблоки  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{m-1}$  имеют длину  $n$ . Подблок  $\mathbf{u}_0$  определяет  $l$ -й смежный класс,  $1 \leq l \leq 2^{n-r_0}$ , в разбиении  $\Lambda_0 / 2\mathbf{Z}^n$ , а значит, и подмножество  $B_l$  в разбиении  $B_0 / B_1$ ; подблок  $\mathbf{u}_1$  определяет одно из  $2^n$  подмножеств в разбиении подмножества  $B_l$  и так далее. Положим:

$$\mathbf{b} = \mathbf{u}_0 \mathbf{G} + \sum_{k=1}^{m-1} 2^k \mathbf{u}_k, \quad (8)$$

где  $\mathbf{G}$  — порождающая матрица линейного двоичного  $(n, n-r_0)$  кода  $C$  в (4). Нетрудно видеть, что: 1) совокупность  $n$ -мерных векторов над

алфавитом  $A$ , порождаемых согласно (8), совпадает с множеством  $B_0$ , и 2) подблоки с разными номерами кодируемого блока  $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{m-1})$  получают, в результате кодирования, неравную защиту (в смысле минимального евклидова расстояния).

Для рассматриваемого варианта разбиения сигнального множества (2), внутренний код, как видно из выражений (4) и (6), можно рассматривать как прямую сумму (кодовых слов) линейного двоичного кода  $C$  (с порождающей матрицей  $\mathbf{G}$ ) и подмножества  $B_1$ , представляющего собой прямое произведение  $n$  экземпляров прореженного элементарного сигнального множества  $A$ , то есть  $B_1 = \{0, 2, \dots, q-2\}^n$ . Как известно, кодер линейного двоичного кода  $C$  (с порождающей матрицей  $\mathbf{G}$ ) может быть представлен посредством решетчатой диаграммы (code trellis), состоящей из  $n$  ярусов. Принимая во внимание, что внутренний код есть прямая сумма кода  $C$  и подмножества  $B_1$ , получаем, что кодер внутреннего кода также может быть представлен в виде решетчатой диаграммы, состоящей из  $n$  ярусов. Эта диаграмма получается из решетчатой диаграммы кода  $C$  путем введения  $m$  параллельных ребер для каждой пары смежных состояний. Ребра диаграммы маркируются символами из элементарного сигнального множества  $A$ , при этом, как следует из (8), параллельные ребра, соединяющие пару смежных состояний, маркируются символами либо из множества  $\{0, 2, \dots, q-2\}$  либо из множества  $\{1, 3, \dots, q-1\}$ .

Представление кодера внутреннего кода в виде решетчатой диаграммы, состоящей из  $n$  ярусов, оказывается полезным при реализации процедуры декодирования по максимуму правдоподобия (МП). Пусть  $\mathbf{b} = (b^{(1)}, b^{(2)}, \dots, b^{(n)})$  — кодовое слово внутреннего кода. В процессе записи в  $n$  ячеек флэш-памяти это слово преобразуется в вектор  $\mathbf{x} = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)})$ , где  $x^{(i)} = I(b^{(i)})$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Пусть  $\mathbf{y} = (y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(n)})$  — вектор считываемых значений из  $n$  ячеек памяти. В соответствии с рассматриваемой моделью многоуровневой флэш-памяти, плотность распределения вероятности вектора  $\mathbf{y}$  при условии записи вектора  $\mathbf{x}$  представляет собой произведение  $n$  одномерных гауссовских ф.п.в. вида (1). Исходя из (1) и независимости компонентов вектора  $\mathbf{y}$ , декодер МП, получив вектор  $\mathbf{y}$ , присваивает каждому ребру решетчатой диаграммы внутреннего кода свой вес, а именно: ребру  $i$ -го яруса,  $1 \leq i \leq n$ , маркированному символом  $z$ , присваивается вес  $(y^{(i)} - I(z))^2 + 2\sigma(z)^2 \ln(\sigma(z))$ . Затем в размеченной таким образом

решетчатой диаграмме отыскивается путь с минимальным суммарным весом, который и определяет наиболее правдоподобное слово внутреннего кода.

**4. Введение внешнего кодирования.** Будем полагать, что внутренний код  $B_0$  с минимальным евклидовым расстоянием  $\Delta_0$  используется для кодирования одного символа кодового слова внешнего кода Рида — Соломона. В этом случае, очевидно, блок  $\mathbf{u}$ , кодируемый кодом  $B_0$ , есть двоичное представление одного символа кодового слова внешнего кода Рида — Соломона. Учитывая, что блок  $\mathbf{u}$  состоит из  $mn - r_0$  символов, максимально возможная длина внешнего кода Рида — Соломона составляет  $2^{mn-r_0}$ . Отображение кодового символа внешнего кода в кодовое слово внутреннего кода  $\mathbf{b}$  производится в соответствии с правилом (8). Плотность записи при таком варианте внешнего кодирования составляет  $(m - r_0 / n)R$ , бит/ячейка, где  $R$  — скорость кода Рида — Соломона. В таблице 1 приведены параметры ряда каскадных конструкций с внешним кодом Рида — Соломона.

Таблица 1. Параметры каскадных конструкций

Число уровней записи в ячейке $q$	Размерность сигнального множества $n$	Исходная решетка $\Lambda_0$	$r_0$	Объем внутреннего кода $ B_0 $	Максимальная длина кода Рида—Соломона	Плотность записи, бит/ячейка $R_d$
4	5	$\mathbf{Z}^5$	0	1024	1024	$2R$
4	4	$\mathbf{Z}^4$	0	256	256	$2R$
4	5	$D_5$	1	512	512	$(9/5)R = 1.8R$
4	4	$D_4$	1	128	128	$(7/4)R = 1.75R$
4	7	$E_7$	3	2048	2048	$(11/7)R = 1.57R$
4	8	$E_8$	4	4096	4096	$(3/2)R = 1.5R$

**5. Анализ помехоустойчивости.** Основная проблема, возникающая при анализе помехоустойчивости предложенных каскадных схем кодирования, связана с необходимостью как можно более точного вычисления вероятности ошибки декодирования внутреннего кода. В силу того, что эта вероятность, как правило, сравнительно велика, использование стандартных верхних границ для модели канала записи/считывания с ID-AGN может привести, с учетом требуемой результирующей вероятности ошибки порядка  $10^{-12}$  ...  $10^{-16}$ , либо к существенному занижению реально достигаемой плотности записи, либо к излишне завышенной сложности каскадного

кодирования. В этой связи далее в п. 5.1 приводится новый подход к оцениванию вероятности ошибки декодирования, основанная на *точном* вычислении попарной (кода из двух слов) вероятности ошибки для модели канала записи/считывания с ID-AGN. Развиваемый в этой части подход применим для любого канала без памяти.

### 5.1 Вероятность ошибки декодирования внутреннего кода.

Будем полагать, что решение относительно слов внутреннего кода принимается по МП, то есть, как  $\hat{\mathbf{x}} = \arg \max_{\mathbf{x}} p_{\mathbf{y}|\mathbf{x}}(\mathbf{y} | \mathbf{x})$ , где  $p(\mathbf{y} | \mathbf{x})$  —  $n$ -мерная условная ф.п.в., задающая распределение считанных значений  $\mathbf{y} = (y^{(1)}, \dots, y^{(n)})$  ячейки флэш-памяти при условии, что была записана последовательность уровней  $\mathbf{x}$ . Для рассматриваемой модели можно записать, что:

$$p_{\mathbf{y}|\mathbf{x}}(\mathbf{y} | \mathbf{x}) = \prod_{l=1}^n p_{y^{(l)}|\mathbf{x}}(y^{(l)} | x^{(l)}), \quad (9)$$

где ф.п.в.  $p_{y^{(l)}|\mathbf{x}}(y | x)$  определена равенством (1). Вероятность ошибки при считывании некоторой записанной последовательности  $\mathbf{x}$  может быть ограничена сверху с использованием аддитивного неравенства как:

$$P_e(\mathbf{x}) \leq \sum_{\mathbf{x}' \neq \mathbf{x}} P_e(\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' | \mathbf{x}), \quad (10)$$

где

$$P_e(\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' | \mathbf{x}) = \Pr[p(\mathbf{y} | \mathbf{x}') > p(\mathbf{y} | \mathbf{x}) | \mathbf{x}] \quad (11)$$

— вероятность ошибки декодирования для кода из двух слов  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{x}'$  при условии, что было передано (записано) слово  $\mathbf{x}$ . Вероятность (11) с использованием равенства (9) может быть записана в эквивалентной форме  $P_e(\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' | \mathbf{x}) = \Pr[Z(\mathbf{y} | \mathbf{x}, \mathbf{x}') > 0 | \mathbf{x}]$ , где:

$$Z(\mathbf{y} | \mathbf{x}, \mathbf{x}') = \sum_{l=1}^n z(y^{(l)} | x^{(l)}, x'^{(l)}),$$

и

$$z(y | x, x') = \ln(p_{y^{(l)}|\mathbf{x}}(y | x') / p_{y^{(l)}|\mathbf{x}}(y | x)). \quad (12)$$

В дальнейшем используется следующее утверждение, доказательство которого дано в Приложении.

*Утверждение.* Пусть  $Z$  — вещественная случайная величина и  $w_Z(\cdot)$  ее ф.п.в. Пусть  $C_Z(\omega)$  — характеристическая функция случайной величины  $Z$ , то есть:

$$C_Z(\omega) = \overline{e^{j\omega Z}} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega x} w_Z(x) dx. \quad (13)$$

Черта сверху здесь и далее обозначает усреднение. Тогда

$$\Pr[Z > 0] = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} \frac{C_Z(\alpha - j\beta)}{\beta + j\alpha} d\alpha, \quad 0 < \beta < \beta_0,$$

где  $\beta_0$  — максимальное значение  $\operatorname{Im} \omega$ , при котором сходится интеграл (13).

Используя это утверждение, а также то обстоятельство, что канал записи описывается моделью без памяти (см. (9)), можно записать, что:

$$P_e(\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' | \mathbf{x}) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} \frac{\prod_{l=1}^n c_{z(x^{(l)}, x'^{(l)})}(\alpha - j\beta)}{\beta + j\alpha} d\alpha, \quad (14)$$

где  $c_{z(x, x')}(\omega) = \overline{\exp(j\omega z(y | x, x'))}$  — характеристическая функция случайной величины  $z(y | x, x')$ , определенной равенством (12),  $0 < \beta < \beta_0(x, x')$ , а верхняя граница  $\beta_0(x, x')$  следует из условия сходимости интеграла (14).

Вероятность ошибки  $p_e$  при декодировании символа внутреннего кода оценивается сверху с использованием аддитивного неравенства (10):

$$\begin{aligned} p_e &\leq \sum_{\mathbf{x}} \sum_{\mathbf{x}' \neq \mathbf{x}} P_e(\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' | \mathbf{x}) P(\mathbf{x}) = \frac{1}{\pi M} \sum_{\mathbf{x}} \sum_{\mathbf{x}' \neq \mathbf{x}_0} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} \frac{\prod_{l=1}^n c_{z(x^{(l)}, x'^{(l)})}(\alpha - j\beta)}{\beta + j\alpha} d\alpha = \\ &= \frac{1}{\pi M} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} \frac{\sum_{\mathbf{x}} \sum_{\mathbf{x}' \neq \mathbf{x}} \prod_{l=1}^n c_{z(x^{(l)}, x'^{(l)})}(\alpha - j\beta)}{\beta + j\alpha} d\alpha, \end{aligned} \quad (15)$$

где  $P(\mathbf{x})$  — вероятность использования последовательности  $\mathbf{x}$ . При записи равенства в выражении (15) использовано предположение о

равновероятном использовании последовательностей  $\mathbf{x}$ , то есть, что  $P(\mathbf{x}) = 1/M$ . Поскольку  $\forall \omega c_{z(x,x)}(\omega) = 1$ , то:

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{x}} \sum_{\mathbf{x}' \neq \mathbf{x}} \prod_{l=1}^n c_{z(x^{(l)}, x'^{(l)})}(\omega) &= \sum_{\mathbf{x}} \sum_{\mathbf{x}'} \prod_{l=1}^n c_{z(x^{(l)}, x'^{(l)})}(\omega) - \sum_{\mathbf{x}} \prod_{l=1}^n c_{z(x^{(l)}, x^{(l)})}(\omega) = \\ &= \sum_{\mathbf{x}} \sum_{\mathbf{x}'} \prod_{l=1}^n c_{z(x^{(l)}, x'^{(l)})}(\omega) - M. \end{aligned}$$

Поэтому можно записать, что

$$p_e \leq \frac{1}{\pi M} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} \frac{D(\alpha - j\beta) - M}{\beta + j\alpha} d\alpha, \quad (16)$$

где

$$D(\omega) = \sum_{\mathbf{x}} \sum_{\mathbf{x}'} \prod_{l=1}^n c_{z(x^{(l)}, x'^{(l)})}(\omega). \quad (17)$$

При условии, что было передано (записано) значение уровня  $x$ , выходная случайная величина (считанное значение)  $y$  имеет гауссовское распределение с нулевым математическим ожиданием  $x$  и дисперсией  $\sigma(x)$ . В этом случае можно показать, что при  $\sigma(x) \neq \sigma(x')$

$$\begin{aligned} c_{z(x,x')}(\omega) &= \\ &= \frac{\sigma(x)^{j\omega} \sigma(x')^{1-j\omega}}{\sqrt{j\omega\sigma^2(x) + (1-j\omega)\sigma^2(x')}} \exp\left(-\frac{j\omega(1-j\omega)(x-x')^2}{2(j\omega\sigma^2(x) + (1-j\omega)\sigma^2(x'))}\right), \end{aligned} \quad (18)$$

при условиях:

$$\operatorname{Im} \omega < \frac{\sigma^2(x')}{\sigma^2(x) - \sigma^2(x')}, \text{ если } \sigma(x) > \sigma(x'), \quad (19)$$

и

$$-\operatorname{Im} \omega < \frac{\sigma^2(x')}{\sigma^2(x') - \sigma^2(x)}, \text{ если } \sigma(x) < \sigma(x'). \quad (20)$$

В случае, когда  $\sigma(x) = \sigma(x')$ , характеристическая функция  $c_{z(x,x')}(\omega)$  вычисляется согласно выражению:

$$c_{z(x,x')}(\omega) = \exp\left(-\frac{j\omega(1-j\omega)(x-x')^2}{2\sigma^2(x)}\right). \quad (21)$$

Нетрудно показать, что условия (19) и (20) могут быть преобразованы в условия  $0 < \beta < \beta_0(x, x')$  для параметра  $\beta$  в равенстве (14), где:

$$\beta_0(x, x') = \begin{cases} \infty, & \text{если } \sigma(x^{(l)}) \geq \sigma(x'^{(l)}) \text{ для всех } l = 1, \dots, n, \\ \min_{l: \sigma(x^{(l)}) < \sigma(x'^{(l)})} \frac{\sigma^2(x'^{(l)})}{\sigma^2(x'^{(l)}) - \sigma^2(x^{(l)})}. & \end{cases} \quad (22)$$

Несмотря на кажущуюся сложность, вычисление верхней границы (16) вероятности  $p_e$  оказывается сравнительно простой задачей. Оно сводится к вычислению подынтегрального выражения в правой части (16) с использованием формул (18) и (21) и численного интегрирования. Параметр  $\beta$  в (16) при практических вычислениях следует выбирать с учетом ограничения  $0 < \beta < \min_{x, x'} \beta_0(x, x')$  (см. (22)) таким образом, чтобы подынтегральное выражение представляло собой функцию, удобную для численного интегрирования. В частности, подходящим выбором параметра  $\beta$  можно добиться малого числа осцилляций интегрируемой функции в области интегрирования и за счет этого повысить скорость и точность численного интегрирования.

Для иллюстрации вычисления функции  $D(\omega)$ , определенной равенством (17), рассмотрим примеры.

*Пример 1.* Пусть множество  $B = A^n$  представляет собой подмножество  $\mathbf{Z}^n$  с элементами  $0, 1, \dots, q-1$ . Тогда очевидно, что  $D(\omega) = \left(\sum_x \sum_{x'} c_{z(x,x')}(\omega)\right)^n$  для любого значения аргумента  $\omega$ .

*Пример 2.* Пусть множество  $B = A^n$ , а  $B_0 = B \cap D_n$  то есть представляет собой подмножество решетки  $D_n$  с элементами  $0, 1, \dots, q-1$ . Тогда множество всех векторов  $\mathbf{x} = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)})$  представляет собой множество векторов с компонентами из множества  $\{x_0, x_1, \dots, x_{q-1}\}$ , сумма индексов которых четна. Такое

множество может быть представлено в виде графа (кодовой решетки). Каждый путь в этом графе из начального узла (начального состояния) в конечный узел (конечное состояние) соответствует одной из кодовых последовательностей. Пример для  $n=5$ ,  $q=4$  показан на рисунке 3а.

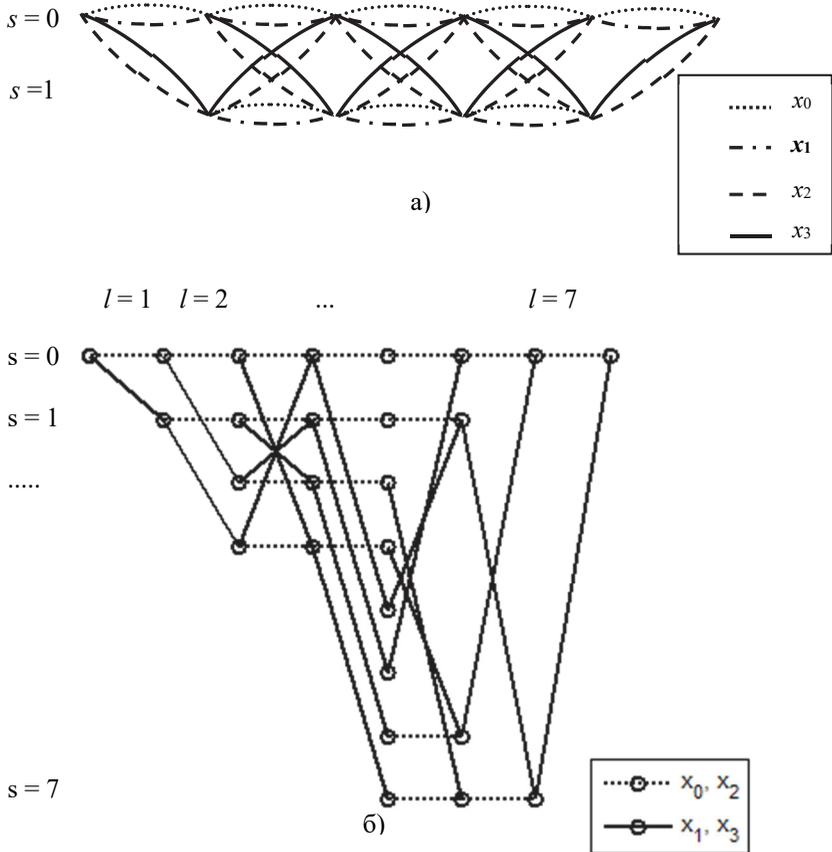


Рис. 3. Кодовые решетки внутреннего кода: а) на основе решетки  $D_5$ ; б) на основе решетки  $E_7$

Чтобы вычислить функцию  $D(\omega)$ , определенную равенством (17), надо рассмотреть все пары кодовых последовательностей или все возможные пары путей в решетке,

показанной на рисунке 3а. Очевидно, что две различные последовательности внутреннего кода определяются двумя последовательностями состояний решетки (рисунок 3а)  $(0, s^{(1)}, \dots, s^{(n-1)}, 0)$  и  $(0, s'^{(1)}, \dots, s'^{(n-1)}, 0)$ , или одной последовательностью индексов  $(0, i^{(1)}, \dots, i^{(n-1)}, 0)$ , где  $i^{(l)} = 2s^{(l)} + s'^{(l)}$ . Пусть  $s$  и  $s'$  — пара смежных состояний в решетке,  $s, s' = 0, 1$ , и  $\chi(s, s')$  — множество меток, соответствующих переходам из  $s$  в  $s'$ ; например,  $\chi(1, 0) = \{x_1, x_3\}$ . Рассмотрим две пары переходов  $s_a \rightarrow s'_a$ ,  $s_b \rightarrow s'_b$  и определим индексы  $i$ ,  $j$  как  $i = 2s_a + s_b$  и  $j = 2s'_a + s'_b$ , при этом  $i, j = 0, 1, 2, 3$ . Далее введем в рассмотрение величины:

$$P_{ij}(\omega) = \sum_{x \in \chi(s_a, s'_a)} \sum_{x' \in \chi(s_b, s'_b)} c_{z(x, x')}(\omega). \quad (23)$$

Тогда нетрудно заметить, что:

$$D(\omega) = \mathbf{a}(\omega) \mathbf{P}(\omega)^{n-2} \mathbf{b}(\omega), \quad (24)$$

где  $\mathbf{P}(\omega) = [P_{ij}(\omega)]$ ,  $i, j = 0, 1, 2, 3$ , матрица порядка 4, и  $\mathbf{a}(\omega) = [P_{00}(\omega) P_{01}(\omega) P_{02}(\omega) P_{03}(\omega)]$ ,  $\mathbf{b}(\omega) = [P_{00}(\omega) P_{10}(\omega) P_{20}(\omega) P_{30}(\omega)]^T$ . Заметим, что этот пример очевидным образом обобщается и на более сложные кодовые решетки, например на решетку  $E_7$ , рассмотренную в следующем примере.

*Пример 3.* Пусть множество  $B = A^7$ , а  $B_0 = B \cap E_7$ , то есть представляет собой подмножество решетки  $E_7$  с элементами  $0, 1, \dots, q-1$ . Пусть  $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots, i_7)$  — набор индексов, задающих один из векторов  $\mathbf{x}(\mathbf{i}) = (x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_7})$ , где  $i_l \in \{0, 1, \dots, q-1\}$ , и следовательно,  $x_{i_l} \in \{x_0, \dots, x_{q-1}\}$ . Тогда множество всех векторов  $\mathbf{x}(\mathbf{i})$ , построенных на основе решетки  $E_7$ , представляет собой множество векторов с компонентами из множества  $\{x_0, x_1, \dots, x_{q-1}\}$ , таких, что  $\mathbf{i} \bmod 2 = \mathbf{c}$ , где  $\mathbf{c}$  — слово двоичного кода Хэмминга (7,4). Множество слов кода Хэмминга (7,4) возможно представить в виде графа, который может быть построен как синдромная решетка [17] (см. рисунок 3б). Далее будем считать, что, как и ранее,  $q = 4$ . Если ребра, показанные пунктиром на рисунке 3б,

заменить парой параллельных ребер, отмеченных символами  $x_0$  и  $x_2$ , а ребра, показанные сплошными линиями, — парой параллельных ребер, отмеченных символами  $x_1$  и  $x_3$ , то получится решетка, соответствующая словам внутреннего кода. Каждый путь в этой решетке, соединяющий начальный узел с конечным, соответствует одной из кодовых последовательностей. Нетрудно увидеть, что внутренний код содержит 2048 последовательностей.

Пусть  $s$  и  $s'$  — пара смежных состояний в решетке, показанной на рисунке 3б,  $s, s' = 0, 1, \dots, 7$ , и  $\chi_l(s, s')$  — множество меток, соответствующих переходам из  $s$  в  $s'$  на  $l$ -ом уровне,  $l = 1, \dots, 7$ ; например,  $\chi_2(1, 1) = \{x_0, x_2\}$ ,  $\chi_3(3, 7) = \emptyset$ . По аналогии с (23) определим величины:

$$P_{ij}^{(l)}(\omega) = \sum_{x \in \chi_l(s_a, s_a')} \sum_{x' \in \chi_l(s_b, s_b')} c_{z(x, x')}(\omega),$$

где  $i = 8s_a + s_b$  и  $j = 8s_a' + s_b'$ . Тогда, очевидным образом обобщая равенство (24), можно записать, что  $D(\omega) = \mathbf{a}(\omega)\mathbf{P}_2(\omega)\dots\mathbf{P}_6(\omega)\mathbf{b}(\omega)$ , где  $\mathbf{P}_l(\omega) = [P_{ij}^{(l)}(\omega)]$ ,  $i, j = 0, 1, \dots, 63$ , — матрица порядка 64,  $\mathbf{a}(\omega) = [P_{00}^{(1)}(\omega), \dots, P_{063}^{(1)}(\omega)]$ ,  $\mathbf{b}(\omega) = [P_{00}^{(7)}(\omega), \dots, P_{630}^{(7)}(\omega)]^T$ .

На рисунке 4 показаны примеры зависимостей вероятности ошибки декодирования символа внутреннего кода  $p_e$  от числа циклов перезаписи  $N$ . Для указанных примеров скорость кодирования (плотность записи) составляет 2 бит/ячейка для безыбыточного кода, построенного на основе решетки  $\mathbf{Z}^5$ , 1.8 бит/ячейка для внутреннего кода, построенного на основе решетки  $D_5$ , и 1.57 бит/ячейка для внутреннего кода, построенного на основе решетки  $E_7$ .

Из представленных данных следует, что приемлемая вероятность ошибки не может быть достигнута при использовании только внутреннего кодирования.

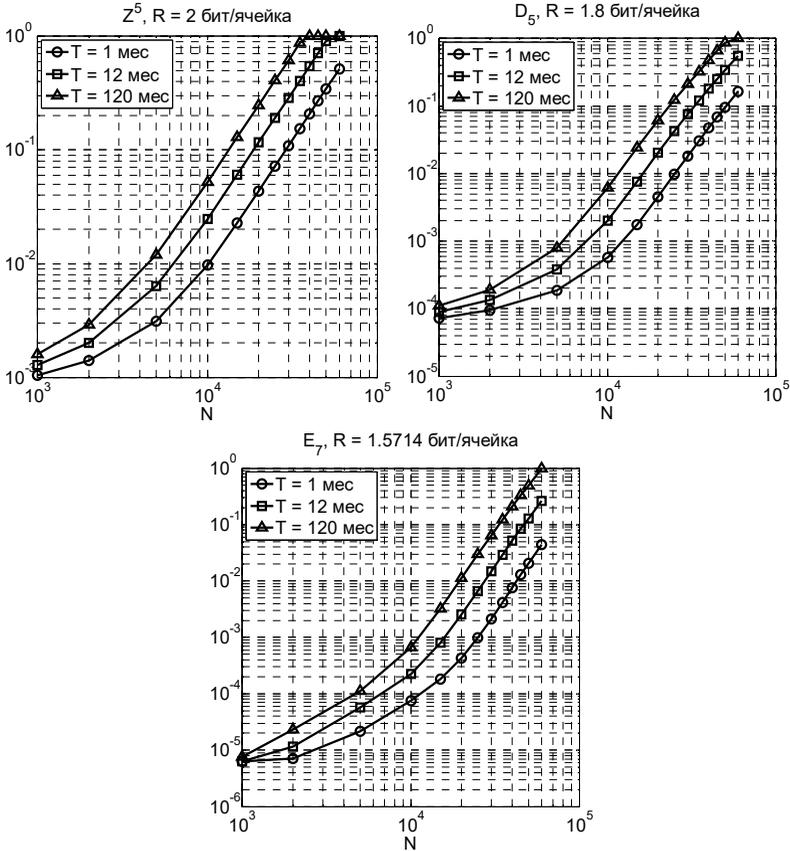


Рис. 4. Вероятность ошибки декодирования  $p_e$  символа внутреннего кода, построенного на основе решеток  $Z^5$ ,  $D_5$  и  $E_7$

## 5.2. Вероятность ошибки декодирования внешнего кода.

**Численные результаты.** Рассмотрим каскадную конструкцию с одним компонентным кодом, в качестве которого используется расширенный код Рида — Соломона. Примеры таких конструкций перечислены в таблице 1. Вероятность ошибки декодирования блочного кода, исправляющего  $t$  ошибок при использовании в канале без памяти, оценивается очевидным образом как:

$$P_e \leq \sum_{l=t+1}^{N_1} C_{N_1}^l p_e^l (1-p_e)^{N_1-l},$$

где  $N_1$  — длина внешнего кода,  $p_e$  — вероятность ошибочного приема символа внешнего кода (вероятность ошибочного решения относительно слова внутреннего кода). При использовании в качестве внутреннего кода последовательностей, построенных на основе некоторой решетки, вероятность  $p_e$  можно оценить с помощью неравенства (16). Вероятность ошибки декодирования символа внешнего кода  $P_s$  может быть получена из вероятности ошибки декодирования слова внешнего кода  $P_e$  как  $P_s \approx (d_1 / N_1)P_e$ , где  $d_1$  — минимальное расстояние внешнего кода. Это приближенное равенство основано на том наблюдении, что наиболее вероятным будет ошибочное декодирование в пользу ближайшего слова кода, то есть отличающегося от истинного в  $d_1$  символах. Полагая в первом приближении, что при этом примерно половина битов будет декодирована неправильно, получаем, что вероятность ошибки на бит может быть оценена как  $P_b \approx (d_1 / 2N_1)P_e$ . Далее рассмотрим несколько конкретных примеров каскадной конструкции (они приведены в таблице 1):

1) внутренний код построен на основе решетки  $Z^5$ , (безыбыточный код), а внешний — это код Рида — Соломона с параметрами  $N_1=1024$ ,  $K_1=1014, 1012, 1010, \dots$ ,  $d_1=N_1 - K_1+1=11, 13, 15, \dots$ ;

2) внутренний код построен на основе решетки  $D_5$ , а внешний — это код Рида — Соломона с параметрами  $N_1=512$ ,  $K_1=502, 500, 498, \dots$ ,  $d_1=N_1 - K_1+1=11, 13, 15, \dots$ ;

3) внутренний код построен на основе решетки  $E_7$ , а внешний — это код Рида — Соломона с параметрами  $N_1=2048$ ,  $K_1=2038, 2036, \dots$ ,  $d_1=N_1 - K_1+1=11, 13, 15, \dots$

На рисунке 5 представлены графики вероятности ошибки на бит в зависимости от числа циклов перезаписи  $N$  для некоторых примеров кодов Рида — Соломона из списка рассмотренных вариантов. Показаны графики для примеров, которые обеспечивают при сравнительно небольшом числе циклов перезаписи вероятность ошибки на бит  $< 10^{-12}$ . Внешнее кодирование для этих примеров вызывает снижение плотности записи приблизительно на 3-4%. Рассмотрев полученные данные, можно сделать вывод, что при ухудшении характеристик канала из-за увеличения времени хранения данных  $T$  и/или числа циклов перезаписи  $N$  возможно изменение параметров схемы каскадного кодирования (адаптация) с тем, чтобы сохранить требуемый уровень надежности хранения данных. Очевидный путь адаптации состоит в увеличении избыточности внешнего кода по мере старения физического носителя. Такое

изменение параметров внешнего кода приводит к уменьшению его скорости и, следовательно, к уменьшению скорости всей каскадной схемы, то есть к снижению плотности записи.

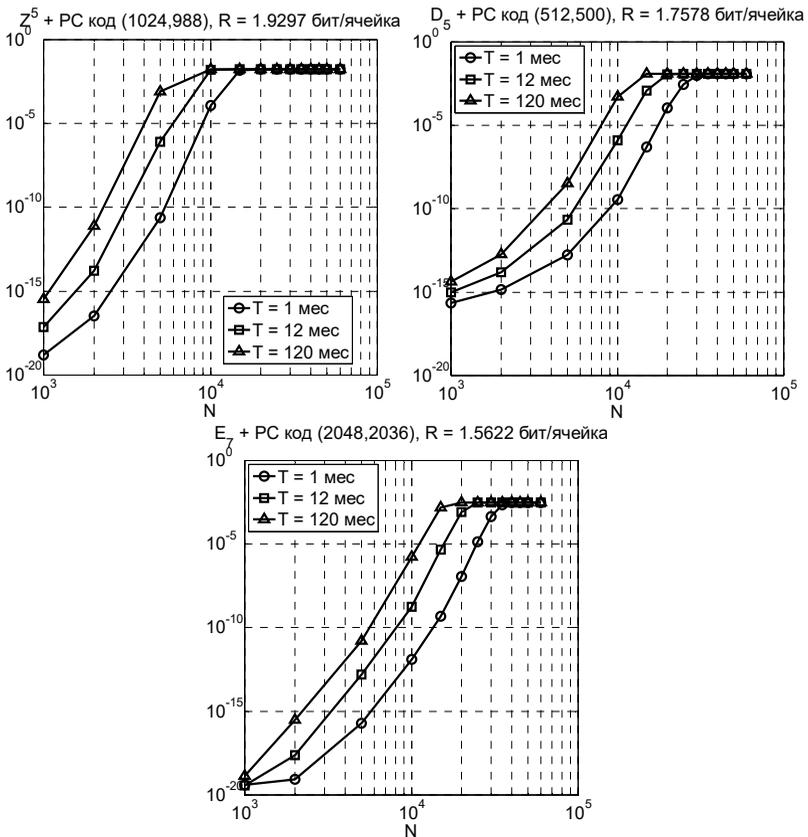


Рис. 5. Вероятность ошибки на бит для каскадных кодов  $Z^5 + (1024, 988)$ ,  $D_5 + (512,498)$  и  $E_7 + (2048,2036)$  в зависимости от числа циклов перезаписи

На рисунке 6 показаны зависимости скорости кодирования рассмотренной каскадной схемы в зависимости от числа циклов перезаписи при условии, что вероятность ошибки на бит не превышает  $10^{-12}$ .

Из приведенных на рисунке 6 данных следует, что в области сравнительно малых значений числа циклов перезаписи  $N$  предпочтительным оказывается применение безыбыточного

внутреннего кода, построенного с использованием решетки  $Z^5$ , и внешнего кода с длиной  $N_1 = 1024$ . Число информационных символов  $K_1$  в этом случае меняется в пределах от 998 до 950.

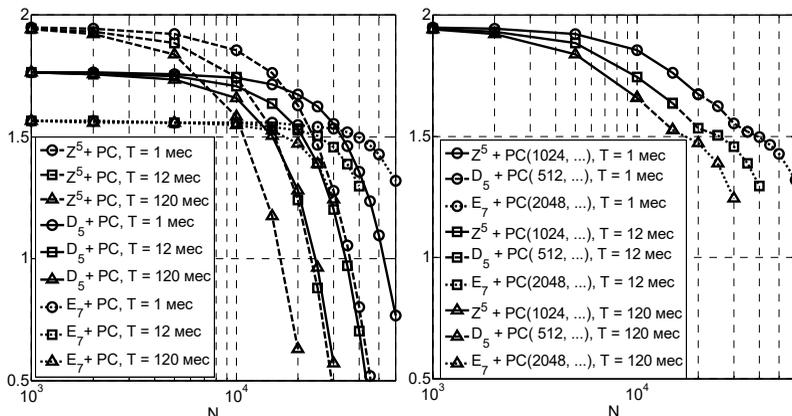


Рис. 6. Изменение скорости кодирования (плотности записи)  $R_d$  в зависимости от числа циклов перезаписи  $N$  при  $P_b \leq 10^{-12}$  для каскадных кодов (слева – все примеры, справа – лучшие варианты)

С ростом числа циклов перезаписи  $N$  и/или времени хранения данных  $T$  каскадная схема, использующая внутренний код, построенный на основе решетки  $D_5$ , обеспечивают большую плотность записи. В этом случае при условии, что время хранения данных  $T = 1$  мес, внешний код имеет параметры  $K_1$  от 462 до 352. При дальнейшем ухудшении канала записи (то есть при увеличении значений  $T$  и/или  $N$ ) лучшие характеристики обеспечивает схема с внутренним кодом, построенным на основе решетки  $E_7$ , и внешним кодом с длиной  $N_1 = 2048$ . Как следует из приведенных кривых, уменьшение скорости кодирования каскадной схемы позволяет сохранить надежность содержания данных на требуемом уровне. В рассмотренных примерах снижение скорости при адаптации составляет от 20%, при умеренном ухудшении параметров физического носителя, до примерно 30...35% для наиболее тяжелого сочетания числа циклов перезаписи и времени хранения данных. Технически такая адаптация может быть реализована в контроллере, реализующем процедуры кодирования/декодирования по мере обнаружения возрастающего числа исправляемых ошибок при декодировании внешнего кода. При

снижении плотности записи ниже заранее определенного уровня контроллер может сообщить, например, о необходимости замены запоминающего устройства и переносе данных на новый носитель, или применить какую-либо иную процедуру реагирования.

**6. Заключение.** В настоящей работе рассмотрена каскадная схема кодирования для многоуровневой флэш-памяти, внутренняя ступень которой представляет собой конечную подрешетку многоуровневой целочисленной решетки (lattice code), а в качестве внешней ступени используется код Рида — Соломона. Отличительными особенностями рассматриваемой конструкции являются: а) простая схема кодирования внутреннего кода; б) мягкое декодирование внутреннего кода; в) высокая степень гибкости, позволяющая обеспечить широкий диапазон вариантов кодирования в рамках обменного соотношения «плотность записи — вероятность ошибки»; г) возможность адаптации реализуемой плотности записи при увеличении времени хранения и/или числа циклов перезаписи. Введение внутреннего кодирования сопровождается некоторым снижением плотности записи, позволяя одновременно заметно повысить надежность хранения данных за счет декодирования слов внутреннего кода по максимуму правдоподобия с использованием мягких решений. Дальнейшее существенное повышение надежности хранения данных достигается за счет применения внешнего кодирования. В отличие от известных работ, связанных с помехоустойчивым кодированием для идеализированной модели флэш-памяти, в данной работе рассматривается более реалистичная модель ячейки флэш-памяти — с неравномерно расположенными целевыми уровнями напряжения в ячейке и дисперсией шума, зависящей от записанного значения (input-dependent additive Gaussian noise, ID-AGN).

В работе был предложен новый подход, позволяющий оценить вероятность ошибки декодирования. Этот подход развит применительно к модели канала с аддитивным гауссовским шумом с дисперсией, зависящей от записанного значения (input-dependent additive Gaussian noise). В нем для вычисления верхней границы вероятности ошибки декодирования слов внутреннего кода используются произведения характеристических функции соответствующих случайных величин. Показано, что вычисление этой верхней границы сводится к численному интегрированию по одной переменной некоторого подынтегрального выражения, зависящего от параметров канала и от структуры внутреннего кода.

С использованием этого подхода проанализирована кодовая конструкция, в которой внутренний код построен на основе решеток малой размерности, а на внешней ступени использовался код Рида —

Соломона. В качестве конкретных примеров рассмотрены решетки  $Z^n$ ,  $D_n$ ,  $n = 5$ , и  $E_7$ , а внешний код представлял собой расширенный код Рида — Соломона длиной 1024, 512 и 2048 соответственно. В результате удалось построить гибкую схему каскадного кодирования с возможной адаптацией по скорости кода (плотности записи) в зависимости от ухудшения канала, возникающего с ростом числа циклов перезаписи и времени хранения данных. В рассмотренных примерах получено, что требуемый уровень вероятности ошибки на бит  $10^{-12}$  достигается при скорости каскадного кода от 1.93 для сравнительно хороших условий записи до 1.30 бит/ячейка для наихудших сочетаний числа циклов перезаписи и времени хранения данных для кодов с длиной 128 и 512 соответственно. Дальнейшее увеличение плотности записи возможно при увеличении длины внутреннего и внешнего кодов.

**Приложение. Формула для вероятности  $\text{Pr}[Z > 0]$ .** Пусть  $Z$  — непрерывная вещественная случайная величина и  $w_Z(\cdot)$  ее ф.п.в. Требуется вычислить вероятность  $P = \text{Pr}[Z > 0]$ . Очевидно, что:

$$P = \int_0^{\infty} w_Z(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} e(x) w_Z(x) dx = \overline{e(Z)}, \quad (\text{П1})$$

где  $e(x)$  — функция единичного скачка,

$$e(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

а черта сверху означает усреднение. Обозначим  $C_Z(\omega)$  характеристическую функцию случайной величины  $Z$ :

$$C_Z(\omega) = \overline{e^{j\omega Z}} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega x} w_Z(x) dx. \quad (\text{П2})$$

Далее рассмотрим подход, позволяющий вычислить вероятность  $P$  косвенным образом с использованием характеристической функции  $C_Z(\omega)$ . Этот подход близок к рассмотренному в [18].

Пусть  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  — некоторые функции, такие что  $f(x)\varphi(x) = e(x)$ . Тогда можно записать, что:

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)w_Z(x)dx. \quad (\text{П2})$$

Обозначим через  $F(\alpha)$  преобразование Фурье функции  $f(x)$ ,  
 $F(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-j\alpha x) dx$ , и следовательно,  
 $f(x) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha) \exp(j\alpha x) d\alpha$ . Тогда выражение (П1) можно переписать в следующем виде:

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha) \Phi(\alpha) d\alpha, \quad (\text{П3})$$

где  $\Phi(\alpha) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) w_Z(x) e^{j\alpha x} dx$ . Равенство (П3) дает общее выражение для вероятности  $P$ . Чтобы привести его к удобному для использования виду, рассмотрим некоторый частный случай назначения функций  $f(x)$  и  $\varphi(x)$ . Положим  $\varphi(x) = \exp(\beta x)$ ,  $\beta > 0$ , и

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\beta x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}.$$

Очевидно, что  $f(x)\varphi(x) = e(x)$ . Тогда:

$$F(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\alpha x} dx = \int_0^{\infty} e^{-\beta x} e^{-j\alpha x} dx = \frac{1}{\beta + j\alpha}, \quad (\text{П4})$$

а

$$\Phi(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\beta x} e^{j\alpha x} w_Z(x) dx = \frac{1}{2\pi} e^{\overline{(\beta + j\alpha)Z}} = \frac{1}{2\pi} C_Z(\alpha - j\beta), \quad (\text{П5})$$

где  $C_Z(\cdot)$  — характеристическая функция случайной величины  $Z$ , определенная равенством (П2). Комбинируя выражения (П3)-(П5), получаем, что:

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{C_Z(\alpha - j\beta)}{\beta + j\alpha} d\alpha. \quad (\text{П6})$$

Равенство (П6) справедливо для любых значений параметра  $\beta$ ,  $0 < \beta < \beta_0$ . Здесь первое неравенство обеспечивает сходимость

интеграла (П4), а значение  $\beta_0$  во втором неравенстве — это максимальное значение, при котором сходится интеграл (П5).

Поскольку  $P = \text{Re } P$ , то из (П6) следует, что:

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Re} \frac{C_Z(\alpha - j\beta)}{\beta + j\alpha} d\alpha. \quad (\text{П7})$$

Нетрудно показать, что:

$$\text{Re} \frac{C_Z(\alpha - j\beta)}{\beta + j\alpha} = \frac{\beta e^{\beta Z} \cos \alpha Z}{\beta^2 + \alpha^2} + \frac{\alpha e^{\beta Z} \sin \alpha Z}{\beta^2 + \alpha^2}$$

и представляет собой четную функцию от переменной  $\alpha$ . Поэтому в (П7) можно заменить пределы интегрирования  $(-\infty, +\infty)$  на  $(0, +\infty)$  и удвоить результат, то есть записать, что:

$$P = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \text{Re} \frac{C_Z(\alpha - j\beta)}{\beta + j\alpha} d\alpha, \quad 0 < \beta < \beta_0. \quad (\text{П8})$$

Вычисление вероятности  $P$  согласно выражению (П8) сводится к численному интегрированию по одной переменной и в ряде случаев оказывается более простым, чем прямое вычисление по формуле (П1).

### Литература

1. *Michelsoni R., Crippa L.* Multi-bit NAND flash memories for ultra-high density storage devices // *Advances in Non-Volatile Memory and Storage Technology*. 2014. pp. 75–119.
2. *Naso G. et al.* A 128 Gb 3b/cell NAND flash design using 20nm planar-cell technology // *IEEE International Solid-State Circuits Conference Digest of Technical Papers*. 2013. pp. 218–219.
3. *Im J.W. et al.* A 128Gb 3b/cell V-NAND flash memory with 1Gb/s I/O rate // *Proceedings of ISSCC*. 2015. pp. 1–3.
4. *Aritome S.* NAND Flash Memory Technologies // John Wiley & Sons. 2016. 410 p.
5. *Yaakobi E. et al.* Error correcting coding for flash memories // *Flash Memory Summit*. 2009. vol. 31. pp. 4–10.
6. *Lou H.-L., Sundberg C.-E.* Coded modulation to increase storage capacity of multilevel memories // *Proceedings of the IEEE Globecom (Globecom'1998)*. 1998. pp. 3379–3384.
7. *Sun F. et al.* Multilevel flash memory on-chip error correction based on trellis coded modulation // *Proceedings of the IEEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS 2006)*. 2006. pp. 1443–1446.
8. *Li S., Zhang T.* Improving multi-level NAND flash memory storage reliability using concatenated BCH-TCM coding // *IEEE Trans. on VLSI Systems*. 2010. vol. 18. no. 10. pp. 1412–1420.
9. *Xu Q., Gong P., Chen T.M.* Concatenated LDPC-TCM coding for reliable storage in multi-level flash memories // *Proceedings of the 9th International Symposium On*

- Communication System, Networks & Digital Signal Processing (CSNDSP 2014). 2014. pp. 166–170.
10. *Kurkoski B.M.* Coded modulation using lattices and Reed-Solomon codes, with applications to flash memories // *IEEE Trans. on Selected Areas in Communications*. 2014. vol. 32. no. 5. pp. 900–908.
  11. *Wang X., Dong G., Pan L., Zhou R.* Error correction codes and signal processing in flash memory // *Flash Memories*. URL: <http://www.intechopen.com/books/flash-memories/error-correction-codes-and-signal-processing-in-flash-memory> (дата обращения: 26.10.2014).
  12. *Dong G. et al.* Estimating information-theoretical NAND flash memory storage capacity and its implication to memory system design space exploration // *IEEE Trans. Very Large Scale Integration (VLSI) Systems*. 2012. vol. 20. no. 9. pp. 1705–1714.
  13. *Huang X. et al.* Multilevel Flash Memories: Channel modeling, Capacities and Optimal Coding Rates // *International Journal on Advances in Systems and Measurement*. 2013. vol. 6. no. 3, 4. pp. 364–373. URL: [http://www.iariajournals.org/systems\\_and\\_measurements/sysmea\\_v6\\_n34\\_2013\\_page\\_d.pdf](http://www.iariajournals.org/systems_and_measurements/sysmea_v6_n34_2013_page_d.pdf) (дата обращения: 26.10.2014).
  14. *Sun F., Rose K., Zhang T.* On the Use of Strong BCH Codes for Improving Multilevel NAND Flash Memory Storage Capacity // URL: [http://www.researchgate.net/publication/254376882\\_On\\_the\\_Use\\_of\\_Strong\\_BCHCodes\\_for\\_Improving\\_Multilevel\\_NAND\\_Flash\\_Memory\\_Storage\\_Capacity](http://www.researchgate.net/publication/254376882_On_the_Use_of_Strong_BCHCodes_for_Improving_Multilevel_NAND_Flash_Memory_Storage_Capacity) (дата обращения: 26.10.2014).
  15. *Трофимов А.Н., Таубин Ф.А.* Теоретико-информационный анализ многоуровневой flash памяти. Часть 1: Модель канала и границы случайного кодирования // *Информационно-управляющие системы*. 2016. Т. 81. № 2. С. 49–59.
  16. *Forney G.D.* Coset Codes – Part 1: Introduction and geometrical classification // *IEEE Trans. on Information Theory*. 1988. vol. 34. no. 5. pp. 1123–1151.
  17. *Bahl L.R., Cocke J., Jelinek F., Raviv J.* Optimal decoding of linear codes for minimum symbol error rate // *IEEE Trans. on Information Theory*. 1974. vol. 20. no. 2. pp. 284–287.
  18. *Trofimov A.N.* Modified Chernoff bound and some applications / *Krouk E., Semenov S. (Eds.) // Modulation and Coding Techniques in Wireless Communications*. Chichester, West Sussex, UK: Wiley. 2011. pp. 206–220.

**Таубин Феликс Александрович** — д-р техн. наук, профессор, профессор кафедры аэрокосмических компьютерных и программных систем института аэрокосмических приборов и систем, Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения (СПбГУАП). Область научных интересов: цифровые системы связи, методы помехоустойчивого кодирования, широкополосные системы, беспроводная связь. Число научных публикаций — 92. [ftaubin@yahoo.com](mailto:ftaubin@yahoo.com); ул. Большая Морская, 67, Санкт-Петербург, 190000; р.т.: +7(812)494-70-51, Факс: +7(812)494-70-51.

**Трофимов Андрей Николаевич** — к-т техн. наук, доцент, доцент кафедры инфокоммуникационных систем и кафедры безопасности информационных систем института информационных систем и защиты информации, Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения (СПбГУАП). Область научных интересов: теория цифровой связи, теория информации, теория корректирующего кодирования. Число научных публикаций — 67. [andrei.trofimov@vu.spb.ru](mailto:andrei.trofimov@vu.spb.ru); ул. Большая Морская, 67, Санкт-Петербург, 190000; р.т.: +7(812)494-70-52, Факс: +7(812)494-70-52.

**Поддержка исследований.** Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации при выполнении научно-исследовательской работы в рамках проектной части государственного задания в сфере научной деятельности по заданию № 2.2716.2014/К от 17.07.2014 и в рамках базовой части государственного задания в сфере научной деятельности на 2017-2019 гг. по заданию № 2.9214.2017/БЧ.

F.A.TAUBIN, A.N.TROFIMOV  
**CONCATENATED REED–SOLOMON/LATTICE CODING FOR  
MULTILEVEL FLASH MEMORY**

*Taubin F.A., Trofimov A.N. Concatenated Reed–Solomon/Lattice Coding for Multilevel Flash Memory.*

**Abstract.** The article considers concatenated coding scheme for multilevel flash memory. In this scheme the inner stage is a finite subset of a multidimensional lattice (lattice code) and the outer stage uses Reed–Solomon code.

Performance analysis is done for a model characterizing the basic physical features of a flash memory cell with non-uniform target voltage levels and noise variance dependent on the recorded value (input-dependent additive Gaussian noise, ID-AGN). For this model we develop a new approach to evaluating the error probability for the inner code. This approach is based on one-dimensional numerical integration of product of the characteristic functions of random variables used in the decoding process. It is shown how the parameters of the concatenated coding scheme can be adapted to keep the required error probability when the retention period and/or number of program-erasure cycles increase.

**Keywords:** concatenated code, multidimensional lattices, Reed–Solomon code, multilevel flash memory, decoding error probability.

**Taubin Feliks Aleksandrovich** — Dr. Sci., professor, professor of aerospace computer and software systems department of Institute of Aerospace Instruments and Systems, Saint Petersburg State University of Aerospace Instrumentation (SUAI). Research interests: communication theory, error-correcting coding, spread spectrum systems, wireless communication. The number of publications — 92. ftaubin@yahoo.com; 67, B. Morskaja St., 190000, St.-Petersburg, Russia; office phone: +7(812)494-70-51, Fax: +7(812)494-70-51.

**Trofimov Andrej Nikolaevich** — Ph.D., associate professor, associate professor of information and communication systems department and information systems security department of Institute of Information Systems and Information Security, Saint Petersburg State University of Aerospace Instrumentation (SUAI). Research interests: communication theory, error-correcting coding, information theory. The number of publications — 67. andrei.trofimov@vu.spb.ru; 67, B. Morskaja St., 190000, St.-Petersburg, Russia; office phone: +7(812)494-70-52, Fax: +7(812)494-70-52.

**Acknowledgements.** This research is supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation in the framework of the project part of the government task in the field of scientific activity on assignment No. 2.2716.2014/K 17.07.2014, and within the framework of the government task in the field of scientific activity for 2017–2019 on assignment No. 2.9214.2017/БЧ.

## References

1. Michelsoni R., Crippa L. Multi-bit NAND flash memories for ultra-high density storage devices. *Advances in Non-Volatile Memory and Storage Technology*. 2014. pp. 75–119.
2. Naso G. et al. A 128Gb 3b/cell NAND flash design using 20nm planar-cell technology. *IEEE International Solid-State Circuits Conference Digest of Technical Papers*. 2013. pp. 218–219.

3. Im J.W. et al. A 128Gb 3b/cell V-NAND flash memory with 1Gb/s I/O rate. *Proceedings of ISSCC*. 2015. pp. 1–3.
4. Aritome S. *NAND Flash Memory Technologies*. John Wiley & Sons. 2016. 410 p.
5. Yaakobi E. et al. Error correcting coding for flash memories. *Flash Memory Summit*. 2009. vol. 3. pp. 4–10.
6. Lou H.-L., Sundberg C.-E. Coded modulation to increase storage capacity of multilevel memories. *Proceedings of the IEEE Globecom (Globecom'1998)*. 1998. pp. 3379–3384.
7. Sun F. et al. Multilevel flash memory on-chip error correction based on trellis coded modulation. *Proceedings of the IEEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS 2006)*. 2006. pp. 1443–1446.
8. Li S. and Zhang T. Improving multi-level NAND flash memory storage reliability using concatenated BCH-TCM coding. *IEEE Trans. on VLSI Systems*. 2010. vol. 18. no. 10. pp. 1412–1420.
9. Xu Q., Gong P., Chen T.M. Concatenated LDPC-TCM coding for reliable storage in multi-level flash memories. *Proceedings of the 9<sup>th</sup> International Symposium on Communication System, Networks & Digital Signal Processing (CSNDSP)*. 2014. pp. 166–170.
10. Kurkoski B.M. Coded modulation using lattices and Reed-Solomon codes, with applications to flash memories. *IEEE Trans. on Selected Areas in Communications*. 2014. Vol. 32. no. 5. pp. 900–908.
11. Wang X., Dong G., Pan L., Zhou R. Error correction codes and signal processing in flash memory. *Flash Memories*. Available at: <http://www.intechopen.com/books/flash-memories/error-correction-codes-and-signal-processing-in-flash-memory> (accessed: 26.10.2014).
12. Dong G. et al. Estimating information- theoretical NAND flash memory storage capacity and its implication to memory system design space exploration. *IEEE Trans. Very Large Scale Integration (VLSI) Systems*. 2012. vol. 20. no. 9. pp. 1705–1714.
13. Huang X. et al. Multilevel flash memories: Channel modeling, capacities and optimal coding rates. *International Journal on Advances in Systems and Measurement*. 2013. vol. 6. no. 3, 4. pp. 364–373. Available at: [http://www.iariajournals.org/systems\\_and\\_measurements/sysmea\\_v6\\_n34\\_2013\\_page\\_d.pdf](http://www.iariajournals.org/systems_and_measurements/sysmea_v6_n34_2013_page_d.pdf) (accessed: 26.10.2014).
14. Sun F., Rose K., Zhang T. On the Use of Strong BCH Codes for Improving Multilevel NAND Flash Memory Storage Capacity. Available at: [http://www.researchgate.net/publication/254376882\\_On\\_the\\_Use\\_of\\_Strong\\_BCHCodes\\_for\\_Improving\\_Multilevel\\_NAND\\_Flash\\_Memory\\_Storage\\_Capacity](http://www.researchgate.net/publication/254376882_On_the_Use_of_Strong_BCHCodes_for_Improving_Multilevel_NAND_Flash_Memory_Storage_Capacity) (accessed: 26.10.2014).
15. Trofimov A.N., Taubin F.A. [Information theory analysis of multilevel flash memory. Part 1: Channel model and random coding bounds]. *Informacionno-upravljajushhie sistemy – Information and control systems*. 2016. vol. 81. no. 2. pp. 49–59. (In Russ.).
16. Forney G.D. Coset Codes – Part 1: Introduction and geometrical classification. *IEEE Trans. on Information Theory*. 1988. vol. 34. no. 5. pp. 1123–1151.
17. Bahl L.R., Cocke J., Jelinek F., Raviv J. Optimal decoding of linear codes for minimum symbol error rate. *IEEE Trans. on Information Theory*. 1974. vol. 20. no. 2. pp. 284–287.
18. Trofimov A.N. Modified Chernoff bound and some applications. Krouk E., Semenov S. (Eds.). *Modulation and Coding Techniques in Wireless Communications*. Chichester, West Sussex, UK: Wiley. 2011. pp. 206–220.