

С.А. ВРАЖЕВСКИЙ
**МОДИФИЦИРОВАННЫЙ АЛГОРИТМ БЭКСТЕППИНГА С
КОМПЕНСАЦИЕЙ ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ УПРАВЛЕНИЯ
НЕЛИНЕЙНЫМИ ОБЪЕКТАМИ ПО ВЫХОДУ**

Вражевский С.А. Модифицированный алгоритм бэкстеппинга с компенсацией возмущений для управления нелинейными объектами по выходу.

Аннотация. Решается задача слежения для нелинейного объекта по выходу в условиях внешних ограниченных возмущений, недоступных для измерения. Объект управления описывается гладкими функциями, для которых может быть определена их относительная динамическая степень. Функция возмущений удовлетворяет условию Липшица. Используются стандартные модельные преобразования для перехода к описанию динамики объекта в ошибках. При синтезе алгоритма используется итеративная процедура с количеством шагов, равным показателю относительной динамической степени объекта. Предложенная система управления представляет собой робастную модификацию алгоритма обратного обхода интегратора и сохраняет его структуру. Ключевые изменения в алгоритме состоят в использовании метода вспомогательного контура для оценки и компенсации сигнала возмущения, а также в модельных преобразованиях, позволяющих уменьшить количество фильтров в системе управления. Метод вспомогательного контура дает возможность на каждом шаге синтеза алгоритма ввести в рассмотрение модель желаемой динамики ошибок слежения, что является основой для оценки величины возмущающего воздействия. Для оценки неизвестных сигналов и их производных используются известные наблюдатели с сильной обратной связью. Доказана сходимости ошибок слежения и наблюдения в замкнутой системе за конечное время с настраиваемой точностью, зависящей от величины возмущающих воздействий и параметров регулятора. Эффективность алгоритма подтверждена результатами компьютерного моделирования. Приведены графики работы предложенного метода и ближайшего аналога в режимах стабилизации и слежения, и представлены количественные показатели, позволяющие оценить качество регулирования. Практическая применимость метода рассмотрена на примере задачи управления лабораторным стендом «Twin Rotor MIMO System», который воспроизводит динамику винтокрылого летательного аппарата.

Ключевые слова: метод бэкстеппинга, метод вспомогательного контура, нелинейная система, робастное управление, компенсация возмущений, управление по выходу.

1. Введение. Метод бэкстеппинга (backstepping method, другие названия: метод обратного обхода интегратора, итеративные процедуры синтеза) широко известен в современной теории управления. Впервые он был предложен для решения задачи адаптивного управления нелинейными объектами по выходу [1]. На базе данного подхода получен ряд решений, обеспечивающих высокое качество переходных процессов без использования сильной обратной связи [2-4]. В работе [5] на основе бэкстеппинга предложен адаптивный и робастный регулятор для управления линейными объектами по выходу. В [6-10] метод распространен на различные классы нелинейных систем. Техническая реализация методов [2-10] сложна и не универсальна по отношению к

виду модели объекта управления, требует построения большого количества компонентов и фильтров.

В данной работе рассматривается модификация метода бэкстеппинга для управления нелинейными объектами по состоянию при воздействии на объект ограниченных внешних возмущений. Предложенный результат основан на использовании робастного метода вспомогательного контура, который был впервые представлен в работе [11]. Благодаря простоте синтеза и высокой эффективности в решении задач робастного управления метод вспомогательного контура стал основой для целого ряда решений в различных областях [12-15]. Использование вспомогательного контура для модификации метода бэкстеппинга впервые рассмотрено в работе [16]. В [17] показано, что данный подход в линейных системах позволяет добиться компенсации несогласованных возмущений (возмущений, которые присутствуют в уравнениях объекта, где не содержится сигнал управления). В статье также экспериментально показано, что оригинальный бэкстеппинг способен справиться с аналогичной задачей только в том случае, если возмущения будут доступны измерению, а для вспомогательного контура необходимо, чтобы возмущения были согласованными. В работе [18] доказана сходимости алгоритмов управления из [16, 17] для случая линейных объектов с запаздыванием по состоянию. В настоящей работе результаты [16-18] применяются для решения задачи управления нелинейным объектом по выходу.

Для работы с нелинейными объектами автором используются результаты, полученные в [19]. В статье [19] для алгоритма бэкстеппинга предложена модификация, которая существенно упрощает процесс синтеза системы управления за счет уменьшения числа используемых фильтров до одного с размерностью, равной относительной степени объекта управления (под относительной степенью линейного объекта управления понимается разность порядков знаменателя и числителя передаточной функции; для нелинейных объектов понятие относительной степени обобщено в [2]). По сравнению с аналогичными модификациями [5, 9], позволяющими снизить число необходимых фильтров относительно оригинала, данный подход обладает наименьшим показателем по числу фильтров в структуре системы управления.

Отличием данной работы от [19] является подход к синтезу системы управления, аналогичный [16-18], но с использованием параметризации, предложенной в [19]. Такой подход существенно повышает устойчивость замкнутой системы по отношению к внешним возмущениям и позволяет достичь универсальной по отношению к виду модели объекта управления структуры регулятора, а также использовать единственный фильтр состояния. В итоге система управления сохраняет преимущества подходов, положенных в ее основу, и лишена их не-

достатков, например, таких как использование сильной обратной связи в [19]. В разделе 6 показано, что алгоритм управления на основе модификации с использованием вспомогательного контура способен лучше компенсировать возмущающие воздействия при соизмеримых либо меньших амплитудах управляющих сигналов.

2. Модель исследуемого объекта управления. Рассмотрим нелинейный объект управления:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), \xi) + b(x(t), \xi)(u(t) + \varphi(x(t), t)), \\ y(t) &= h(x(t)), x(0) = x_0, t_0 = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $x(t) \in X \subset R^n$ — вектор состояния, $u(t) \in R$ — сигнал управления, $y(t) \in Y \subset R$ — выходной сигнал, доступный измерению, $t \in T \subset [0, \infty)$, $f(x, \xi)$, $b(x, \xi)$ и $h(x)$ — гладкие функции соответствующих размерностей, $\varphi(x, t)$ — функция неизмеряемых возмущающих воздействий, причем $\varphi(x, t)$ ограничена либо ограниченная на множестве T и липшицева по $x(t) \in X$, $\xi \in \Xi$ — вектор неизвестных параметров, Ξ — известное ограниченное множество, $x_0 \in X$ — вектор начальных условий.

Цель управления — синтезировать непрерывный закон управления, обеспечивающий выполнение целевого условия:

$$|y(t) - y_s(t)| < \delta, t > t_k, \quad (2)$$

где $\delta > 0$ — допустимая точность регулирования, $y_s(t)$ — эталонный сигнал (сигнал слежения), ограниченный вместе со своими производными, $t_k > 0$ — время переходного процесса.

Синтез системы управления будем проводить в рамках следующих модельных предположений для объекта управления.

Предположения:

1. Для любых $x(t) \in X$ и $\xi \in \Xi$ в силу непрерывности функций $f(x, \xi)$, $b(x, \xi)$ и $h(x)$ выполнены условия:

$$L_b h(x) = L_b L_f^1 h(x) = \dots = L_b L_f^{\gamma-1} h(x) = 0, \beta(x, \xi) = L_b L_f^\gamma h(x) > 0, \quad (3)$$

где $L_f^1 h(x) = \frac{dh(x)}{dx} f(x, \xi)$, $L_b h(x) = \frac{dh(x)}{dx} b(x, \xi)$ — производная Ли от функции $h(x)$ по направлениям векторных полей $f(x, \xi)$ и $b(x, \xi)$ со-

ответственно; $\gamma \leq n$, γ — относительная степень объекта управления [2]. При этом производные Ли высших порядков имеют вид:

$$L_f^2 h(x) = \frac{d(L_f^1 h(x))}{dx} f(x, \xi), \dots, L_f^k h(x) = \frac{d(L_f^{k-1} h(x))}{dx} f(x, \xi).$$

2. Функция $c(x, \xi) = L_f^\gamma h(x)$ ограничена либо ограничена на множестве Ξ и липшицева по $x \in X$.

3. Существует функция $\Phi^{-1}(x)$ такая, что:

$$\bar{x}(t) = \Phi(x(t)) = [y(t), \dot{y}(t), \dots, y^{(\gamma-1)}(t)]^T = [h(x), L_f^1 h(x), \dots, L_f^{\gamma-1} h(x)]^T. \quad (4)$$

3. Модельные преобразования. Воспользуемся известными модельными преобразованиями для перехода к модели объекта управления в ошибках [19]. Опираясь на предположение 1, продифференцируем уравнение выхода объекта управления γ раз:

$$p^\gamma y(t) = c(x, \xi) + \beta(x, \xi)(u(t) + \varphi(x, t)), \quad (5)$$

где $p = d/dt$ — оператор дифференцирования. Уравнение ошибки $e_1 = y(t) - y_s(t)$ можно преобразовать к виду:

$$p^\gamma e_1(t) = c(x, \xi) + \beta(x, \xi)(u(t) + \varphi(x, t)) - p^\gamma y_s(t). \quad (6)$$

Рассмотрим оператор $Q_{\gamma-1}(p) = \sum_{i=0}^{\gamma-1} k_{\gamma-i} p^i$ такой, что полином $Q(\lambda) = \lambda^\gamma + Q_{\gamma-1}(\lambda)$ — гурвицев, λ — комплексная переменная. Преобразуем (6) к виду:

$$Q(p)e_1(t) = u(t) + \psi(x, u, \xi, y_s, t), \quad (7)$$

где $\psi(x, u, \xi, y_s, t)$ — функция параметрических и внешних возмущений вида:

$$\begin{aligned} \psi(x, u, \xi, y_s, t) = & c(x, \xi) + \beta(x, \xi)\varphi(x, t) + \\ & + (\beta(x, \xi) - 1)u(t) - p^\gamma y_s(t) + Q_{\gamma-1}(p)e_1(t). \end{aligned} \quad (8)$$

4. Синтез системы управления. С учетом (7) составим уравнение ошибки в виде:

$$e_1(t) = Q(p)^{-1}u(t) + Q(p)^{-1}\psi(x, u, \xi, y_s, t). \quad (9)$$

Рассмотрим фильтр [19]:

$$\dot{v}(t) = A_0 v(t) + lu(t), \quad (10)$$

где

$$v(t) = \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ \vdots \\ v_\gamma(t) \end{bmatrix}^T, l = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, A_0 = \begin{bmatrix} -k_1 & & & \\ -k_2 & & I_{\gamma-1} & \\ \vdots & & & \\ -k_\gamma & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

С учетом (10), преобразуем (9):

$$e_1(t) = v_1(t) + Q(p)^{-1} \psi(x, u, \xi, y_3, t). \quad (11)$$

Принимая во внимание (10), найдем производную (11) в виде:

$$\dot{e}_1(t) = -k_1 v_1(t) + v_2(t) + pQ(p)^{-1} \psi(x, u, \xi, y_3, t). \quad (12)$$

Обозначив $\hat{f}_1 = c_1 e_1 + pQ(p)^{-1} \psi(x, u, \xi, y_3, t)$ в качестве новой функции возмущений, преобразуем (12) к виду:

$$\dot{e}_1(t) = -c_1 e_1(t) - k_1 v_1(t) + v_2(t) + \hat{f}_1. \quad (13)$$

Далее метод бэкстеппинга, если его непосредственно применять к модели (10), (13) для решения задачи (2), предполагает итеративную процедуру синтеза вспомогательных законов управления для каждого уравнения состояния и синтез реального закона управления на последнем шаге [1]. Если бы модель объекта (1) не содержала неизвестное возмущение $\varphi(x(t), t)$, то поставленную задачу можно было бы решить с использованием алгоритмов из [1, 16]. Обобщим алгоритм [16] на случай наличия $\varphi(x(t), t)$ в (1). Применим процедуру бэкстеппинга синтеза закона управления [1]. В отличие от [1, 16] дополнительно на каждом шаге введем в рассмотрение вспомогательный контур для оценки возмущений и их последующей компенсации. Такой подход обеспечивает компенсацию возмущений, не прибегая к сильной обратной связи и не увеличивая амплитуды управляющих сигналов больше, чем того требует величина подлежащих компенсации воздействий.

Шаг 1. Введем в рассмотрение первый вспомогательный контур следующего вида:

$$\dot{e}_1^e(t) = -c_1 e_1^e(t) - k_1 v_1(t) + v_2(t). \quad (14)$$

На основе (13) и (14) можно рассмотреть ошибку рассогласования:

$$\xi_1(t) = e_1(t) - e_1^g(t) \quad (15)$$

и ее производную:

$$\dot{\xi}_1(t) = \dot{e}_1(t) - \dot{e}_1^g(t) = -c_1 \xi_1(t) + \hat{f}_1(t). \quad (16)$$

Перепишем (16) относительно $\hat{f}_1(t)$:

$$\hat{f}_1(t) = \dot{\xi}_1 + c_1 \xi_1. \quad (17)$$

Подставляя (17) в (16), перепишем (16) в виде:

$$\dot{e}_1(t) = -c_1 e_1(t) - k_1 v_1(t) + v_2(t) + \dot{\xi}_1(t) + c_1 \xi_1(t). \quad (18)$$

Предположим, что функция $v_2(t)$ может рассматриваться как управляющая функция по отношению к системе (13). Пусть $v_2(t) = u_1(t)$. Зададим вспомогательный закон управления в виде:

$$u_1(t) = k_1 v_1(t) - \dot{\xi}_1(t) - c_1 \xi_1(t). \quad (19)$$

Значения функции $\dot{\xi}_1(t)$ неизвестны, но при этом их можно оценить, используя наблюдатель, поэтому перепишем (19) в форме:

$$u_1(t) = k_1 v_1(t) - \hat{\xi}_1(t) - c_1 \xi_1(t), \quad (20)$$

где $\hat{\xi}_1(t)$ — оценка функции $\dot{\xi}_1(t)$, полученная с помощью реального дифференцирующего звена:

$$\hat{\xi}_1(t) = \frac{p}{\mu p + 1} \xi_1(t), \quad (21)$$

где p — оператор дифференцирования, $\mu > 0$. Подставляя вспомогательное управление (20) в уравнение (18), получим:

$$\dot{e}_1(t) = -c_1 e_1(t) + e_2 + \eta_1(t), \quad (22)$$

где $\eta_1(t) = \hat{\xi}_1(t) - \dot{\xi}_1(t)$ — ошибка наблюдателя, $e_2(t)$ — ошибка виртуального управления:

$$e_2 = v_2(t) - u_1(t). \quad (23)$$

Шаг 2. С учетом (10), найдем производную от (23) в виде:

$$\dot{e}_2(t) = -k_2 v_1(t) + v_3(t) - \dot{u}_1(t). \quad (24)$$

Введем в рассмотрение второй вспомогательный контур следующего вида:

$$\dot{e}_2^g(t) = -c_2 e_2^g(t) - k_2 v_1(t) + v_3(t). \quad (25)$$

На основе (24) и (25) рассмотрим ошибку рассогласования:

$$\xi_2(t) = e_2(t) - e_2^g(t) \quad (26)$$

и ее производную:

$$\dot{\xi}_2(t) = \dot{e}_2(t) - \dot{e}_2^g(t) = -c_2 \xi_2(t) + \hat{f}_2, \quad (27)$$

где $\hat{f}_2(t) = -\dot{u}_1(t) + c_2 e_2(t)$ рассматривается как функция возмущений для подсистемы (24). Из уравнения (27) следует, что для функции возмущений $\hat{f}_2(t)$ может быть получена оценка:

$$\hat{f}_2(t) = \dot{\xi}_2 + c_2 \xi_2. \quad (28)$$

Таким образом, выражение (24) может быть преобразовано к виду:

$$\dot{e}_2(t) = -c_2 e_2(t) - k_2 v_1(t) + v_3(t) + \dot{\xi}_2(t) + c_2 \xi_2(t). \quad (29)$$

Аналогично рассуждениям на предыдущем шаге допустим, что функция $v_3(t)$ может рассматриваться как управляющая функция по отношению к системе (24) так, что выполняется условие $v_3(t) = u_2(t)$. Зададим второй вспомогательный закон управления в форме:

$$u_2(t) = k_2 v_1(t) - \dot{\xi}_2(t) - c_2 \xi_2(t). \quad (30)$$

Значения функции $\dot{\xi}_2(t)$ неизвестны, но их можно оценить, используя наблюдатель, поэтому перепишем (30) в форме:

$$u_2(t) = k_2 v_1(t) - \hat{\xi}_2(t) - c_2 \xi_2(t), \quad (31)$$

где $\hat{\xi}_2(t)$ — оценка функции $\dot{\xi}_2(t)$. Подставляя вспомогательное управление (31) в уравнение (29), получим:

$$\dot{e}_2(t) = -c_2 e_2(t) + e_3 + \eta_2(t), \quad (32)$$

где $\eta_2(t) = \hat{\xi}_2(t) - \dot{\xi}_2(t)$ — ошибка наблюдателя, $e_3(t)$ — ошибка виртуального управления:

$$e_3 = v_3(t) - u_2(t). \quad (33)$$

Аналогичные рассуждения справедливы для анализа уравнений ошибок e_i при $i = 1, \dots, \gamma - 1$. Результатом являются виртуальные законы управления и уравнения замкнутых подсистем, аналогичные (31) и (32) соответственно, с точностью до значений индексов используемых переменных.

Шаг γ . Рассмотрим ошибку виртуального управления $e_\gamma = v_\gamma(t) - u_{\gamma-1}(t)$, полученную на шаге $\gamma - 1$, и ее производную:

$$\dot{e}_\gamma(t) = -k_\gamma v_1(t) + u(t) - \dot{u}_{\gamma-1}(t), \quad (34)$$

где $u(t)$ — реальное управляющее воздействие на объект. Введем в рассмотрение вспомогательный контур следующего вида:

$$e_\gamma^e(t) = -c_\gamma e_\gamma(t) - k_\gamma v_1(t) + u(t). \quad (35)$$

Рассмотрим ошибку рассогласования на основе уравнений (34), (35):

$$\xi_\gamma(t) = e_\gamma(t) - e_\gamma^e(t). \quad (36)$$

Производная ошибки рассогласования (36) имеет вид:

$$\dot{\xi}_\gamma(t) = \dot{e}_\gamma(t) - \dot{e}_\gamma^e(t) = -c_\gamma \xi_\gamma(t) + \hat{f}_\gamma, \quad (37)$$

где $\hat{f}_\gamma(t) = -\dot{u}_{\gamma-1}(t) + c_\gamma e_\gamma(t)$ рассматривается как функция возмущений для подсистемы (34). Из уравнения (37) следует, что для функции $\hat{f}_\gamma(t)$ может быть получена оценка:

$$\hat{f}_\gamma(t) = \dot{\xi}_\gamma + c_\gamma \xi_\gamma. \quad (38)$$

Динамика ошибки (34) может быть переписана с учетом (38) как:

$$\dot{e}_\gamma(t) = -c_\gamma e_\gamma(t) - k_\gamma v_1(t) + u(t) + \dot{\xi}_\gamma(t) + c_\gamma \xi_\gamma(t). \quad (39)$$

Зададим закон управления в виде:

$$u(t) = k_\gamma v_1(t) - \dot{\xi}_\gamma(t) - c_\gamma \xi_\gamma(t). \quad (40)$$

Значения функции $\dot{\xi}_\gamma(t)$ неизвестны, но их можно оценить, используя наблюдатель, поэтому перепишем (40) в форме:

$$u(t) = k_\gamma v_1(t) - \hat{\dot{\xi}}_\gamma(t) - c_\gamma \xi_\gamma(t), \quad (41)$$

где $\hat{\dot{\xi}}_\gamma(t)$ — оценка функции $\dot{\xi}_\gamma(t)$. Подставляя закон управления (41) в (39), получим:

$$\dot{e}_\gamma(t) = -c_\gamma e_\gamma(t) + \eta_\gamma(t), \quad (42)$$

где $\eta_\gamma(t) = \hat{\dot{\xi}}_\gamma(t) - \dot{\xi}_\gamma(t)$ — ошибка наблюдателя.

Сформируем основной результат статьи.

Утверждение. Пусть выполнены условия предположений 1-3.

Тогда существуют значения параметров $c_i > 0, i = \overline{1, \gamma}, \mu_0 > 0$, такие что при $\mu \in (0; \mu_0]$ алгоритм управления, состоящий из фильтра (10), вспомогательных контуров (14), (25), (35), вспомогательных законов управления (20), (31), наблюдателя (21) и закона управления (41), обеспечивает для объекта управления (1) выполнение цели управления (2).

5. Доказательство. Рассмотрим уравнения замкнутых систем по ошибкам:

$$\dot{e}_i(t) = -c_i e_i(t) + e_{i+1} + \eta_i(t), i = \overline{1, \gamma-1}, \quad (43)$$

$$\dot{e}_\gamma(t) = -c_\gamma e_\gamma(t) + \eta_\gamma(t), \quad (44)$$

$$\mu_{j1} \dot{\eta}_j(t) = -\eta_j(t) + \mu_{j2} \ddot{\xi}_j(t), j = \overline{1, \gamma}. \quad (45)$$

С учетом положительности коэффициентов c_i и вида уравнения (45) можно заключить, что ошибки e_i будут ограничены в слу-

чае, если ограничены сигналы $\ddot{\xi}_j$ и, как следствие, ошибки наблюдателя η_j . Для доказательства ограниченности $\ddot{\xi}_j$ воспользуемся следующей Леммой.

Лемма. Пусть система вида:

$$\dot{x} = f(x, \mu_1, \mu_2, t), \quad (46)$$

где $x(t) \in R^{S_1}$, $\mu = \text{col}(\mu_1, \mu_2) \in R^{S_2}$, $f(x, \mu_1, \mu_2, t)$ — липшицева по x и ограниченная по t функция имеет замкнутое ограниченное множество притяжения:

$$\Omega = \{x : P(x) \leq C\},$$

где $P(x)$ — гладкая положительно определенная функция в R^{S_1} . Если существуют числа $C_1 > 0$ и $\bar{\mu}_1 > 0$, такие что

$$\sup_{|\mu_1| \leq \bar{\mu}_1} \left[\left\langle \left[\nabla P(x) \right]^T, f(x, \bar{\mu}_1, 0, t) \right\rangle \middle| P(x) = C \right] \leq -C_1,$$

тогда существует $\mu_0 > 0$, такое что система (46) при $\mu_2 \in (0; \mu_0]$ сохраняет область притяжения Ω .

Лемма является обобщением леммы Брусина [20] для случая систем неавтономных дифференциальных уравнений [21-22]. Таким образом, для соответствия требованиям Леммы необходимо показать, что система (43)-(45) будет асимптотически устойчива в сингулярно невозмущенном виде, то есть при $\mu_0 = 0$. Тогда в исходной форме при $\mu_0 > 0$ она будет иметь аналогичную область притяжения, а область диссипативности может быть оценена с использованием аппарата функции Ляпунова.

Для доказательства асимптотической устойчивости сингулярно невозмущенной системы (43)-(45) сформируем функцию Ляпунова, аналогичную используемой в работе [16]:

$$V(t) = 0.5 \sum_{i=1}^{\gamma} e_i^2(t) + 0.5 \sum_{i=1}^{\gamma} \eta_i^2(t), \quad (47)$$

и рассмотрим ее производную:

$$\dot{V}(t) = -\sum_{i=1}^{\gamma} c_i e_i^2(t) + \sum_{i=1}^{\gamma-1} e_i(t)e_{i+1}(t) + \sum_{i=1}^{\gamma} e_i(t)\eta_i(t) - \sum_{i=1}^{\gamma} \mu_{i1}^{-1} \eta_i^2(t). \quad (48)$$

Следующие оценки сверху справедливы для второго и третьего слагаемых в (48):

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\gamma-1} e_i(t)e_{i+1}(t) &\leq \sum_{i=1}^{\gamma-1} \left(\frac{1}{2} e_i^2(t) + \frac{1}{2} e_{i+1}^2(t) \right), \\ \sum_{i=1}^{\gamma} e_i(t)\eta_i(t) &\leq \sum_{i=1}^{\gamma} \left(\frac{1}{2} e_i^2(t) + \frac{1}{2} \eta_i^2(t) \right). \end{aligned} \quad (49)$$

Используя (49), найдем оценку сверху для (48) в виде:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq (1 - c_1) e_1^2(t) + \sum_{i=2}^{\gamma-1} (1.5 - c_i) e_i^2(t) + \\ &+ (1 - c_\gamma) e_\gamma^2(t) + \sum_{i=2}^{\gamma} (0.5 - \mu_{i1}^{-1}) \eta_i^2(t). \end{aligned} \quad (50)$$

Видно, что при $c_{1,\gamma} > 1, c_i|_{i=2,\gamma-1} > 1.5, \mu_{i1}^{-1} > 0.5$ выполняются неравенства:

$$\begin{aligned} (1 - c_1) e_1^2(t) &< 0, \\ (1.5 - c_i) e_i^2(t) &< 0, i = \overline{1, n}, \\ (1 - c_\gamma) e_\gamma^2(t) &< 0, \\ (0.5 - \mu_{i1}^{-1}) \eta_i^2(t) &< 0, \end{aligned}$$

производная функции Ляпунова будет строго отрицательна и неравенство (50) можно переписать в виде:

$$\dot{V}(t) \leq -\bar{c} \sum_{i=1}^{\gamma} e_i^2(t) - \bar{\mu} \sum_{i=1}^{\gamma} \eta_i^2(t) = -\alpha V(t), \quad (51)$$

где $\bar{c} = \sup_{i=1,\gamma} c_i, \bar{\mu} = \sup_{i=1,\gamma} \mu_{i1}^{-1}, \alpha = \sup(\bar{c}, \bar{\mu})$. Таким образом, для редуцированной системы (43)-(45) существует положительно определенная функция V такая, что ее полная производная по времени вдоль траекторий (43)-(45) является отрицательно определенной функцией, и ре-

шение системы (43)-(45) экспоненциально стремится к нулю. Из этого следует ограниченность всех сигналов в (43)-(45). Следовательно, условия Леммы выполнены, и существует параметр $\mu_0 > 0$, такой что при $\mu_{1,2} \in (0; \mu_0]$ система (43)-(45) будет иметь то же множество притяжения, что и при $\mu_2 = 0$. Свойство асимптотической устойчивости при этом не сохраняется, но можно оценить множество диссипативности по переменным e_i , η_i при $\mu_0 > 0$. Для этого рассмотрим функцию Ляпунова (47) для случая $\mu_0 > 0$ и ее производную:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = & - \sum_{i=1}^{\gamma} c_i e_i^2(t) + \sum_{i=1}^{\gamma-1} e_i(t) e_{i+1}(t) + \sum_{i=1}^{\gamma} e_i(t) \eta_i(t) + \\ & + \sum_{i=1}^{\gamma} (\mu_{i2} / \mu_{i1}) \ddot{\xi}_i(t) \eta_i(t) - \mu_{i1}^{-1} \eta_i(t). \end{aligned} \quad (52)$$

Используя оценки (49), получим:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) \leq & (1 - c_1) e_1^2(t) + \sum_{i=2}^{\gamma-1} (1.5 - c_i) e_i^2(t) + (1 - c_\gamma) e_\gamma^2(t) + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\gamma} \mu_{i1}^{-1} (\mu_{i1} + \mu_{i2} - 2) \eta_i^2(t) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\gamma} \mu_{i1}^{-1} \mu_{i2} \ddot{\xi}_i^2(t). \end{aligned} \quad (53)$$

При значениях параметров $c_{1,\gamma} > 1, c_i|_{i=2,\gamma-1} > 1.5$, $\mu_{i1} = \mu_{i2} = \mu_{i0}|_{i=1,\gamma} > 1$ неравенство (53) принимает вид:

$$\dot{V}(t) \leq -\bar{c} \sum_{i=2}^{\gamma} e_i^2(t) - \bar{\mu} \sum_{i=2}^{\gamma} \eta_i^2(t) + \frac{1}{2} \bar{\mu} \sum_{i=2}^{\gamma} \ddot{\xi}_i^2(t) = -\alpha V(t) + \bar{\xi}, \quad (54)$$

где $\bar{c} = \sup_{i=1,\gamma} c_i$, $\bar{\mu} = \sup_{i=1,\gamma} \mu_{i0}^{-1}$, $\alpha = \sup(\bar{c}, \bar{\mu})$, $\bar{\xi} = \sup_{t \geq 0, i=1,\gamma} \frac{1}{2} \bar{\mu} \sum_{i=2}^{\gamma} \ddot{\xi}_i^2(t)$. Решение неравенства (54) определяется следующим образом:

$$V(t) \leq -e^{-\alpha t} V(0) + (1 - e^{-\alpha t}) \bar{\xi} \alpha^{-1}. \quad (55)$$

Из неравенства (55) следует, что область диссипативности можно оценить:

$$\|e\| \leq \sqrt{-e^{-\alpha t} 2V(0) + (1 - e^{-\alpha t}) \bar{\xi} \alpha^{-1}}. \quad (56)$$

Из последнего уравнения следует, что точность слежения системы управления полностью зависит от выбора параметров $\mu_{i0}, c_i, i = \overline{1, \gamma}$, которые напрямую определяют значения α и $\bar{\xi}$.

6. Моделирование. Для апробации алгоритма и проведения компьютерного моделирования воспользуемся моделью объекта управления, которая рассмотрена в работе [19]. Выбор модели объясняется тем фактом, что результат работы [19] будет использован для сравнительного анализа эффективности предлагаемого метода управления, так как является его ближайшим аналогом. Рассмотрим объект управления вида:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \lambda_1 \sin x_1(t) + \lambda_2 x_2(t) - \lambda_3 x_3(t), \\ \dot{x}_2(t) &= \lambda_4 x_1(t) + \lambda_5 \sin x_3(t) + (1 + x_2^2(t))^{-1} (u(t) + x_2^3(t) + x_3^3(t) + f(t)), \\ \dot{x}_3(t) &= \lambda_6 x_1(t) - x_3^3(t) + (1 + x_2^2(t))^{-1} (u(t) + x_2^3(t) + x_3^3(t) + f(t)), \\ y(t) &= x_1(t), \end{aligned}$$

где $f \in [-20; 20]$ — неизвестные внешние возмущения, ограниченные в известном диапазоне и при моделировании заданные следующим образом:

$$f(t) = \sin(t) + 0,3 \sin(3,14t) + 15 \sin(0,30t).$$

В качестве примера возмущающего воздействия выбран мультигармонический сигнал, который описывается нелинейной ограниченной функцией, информация о значениях и параметрах которой не доступна для системы управления. Выбор функции отражает способность системы управления функционировать в соответствии с заявленными показателями качества в условиях неизвестных ограниченных возмущений. Применяя к данной модели преобразования (5)-(9), получим:

$$\begin{aligned} y_1 &= h(x) = x, \quad y_2 = L_f^1 h(x) = \xi_1 \sin x_1 + \xi_2 x_2 - \xi_3 x_3, \\ c(x, \xi) &= L_f^2 h(x) = \xi_1 \cos x_1 (\xi_1 \sin x_1 + \xi_2 x_2 - \xi_3 x_3) + \\ &+ \xi_2 (\xi_4 x_1 + \xi_5 \sin x_3) - \xi_3 (\xi_6 x_1 - x_3^3), \\ L_b h(x) &= 0, \quad b(x, \xi) = L_b L_f^1 h(x) = (\xi_2 - \xi_3)(1 + x_2^2)^{-1} > 0. \end{aligned}$$

Следовательно, относительная степень объекта $\gamma = 2$. При моделировании выбраны следующие параметры наблюдателя и коэффициенты вспомогательного контура: $\mu = 0.01$, $c_{1,2} = 10$. На рисунках 1-4 пред-

ставлены результаты сравнения двух замкнутых систем: модифицированного метода бэкстеппинга с компенсацией возмущений (на рисунках — MBADC 2) и модифицированного метода бэкстеппинга, предложенного в [19] (MBADC 1). Сравнение алгоритмов проведено в режиме стабилизации и в режиме слежения. Как видно из графиков, переходные процессы в рассмотренных системах не имеют существенных отличий по величине сигналов управления и по выходу. Однако в установившемся режиме рассмотренный в данной статье метод демонстрирует заметно более высокую точность регулирования. На рисунках 1 и 3 видно, что область диссипативности выходного сигнала на несколько порядков меньше области ограничения функции возмущений, что является показателем высокой достигнутой робастности замкнутой системы. Более того, применение метода вспомогательного контура обеспечило на порядок лучшую компенсацию возмущений в сравнении с аналогом [19], в основу которого положен принцип сильной обратной связи. Важно отметить, что скорость и длительность переходного процесса, величина области диссипативности в установившемся режиме, максимальная амплитуда сигналов управления — любой из этих показателей может быть улучшен путем выбора настраиваемых параметров вспомогательного контура и наблюдателя. Значения основных показателей качества, достигнутых в задаче стабилизации обоими алгоритмами, приведены в таблице 1.

Таблица 1. Показатели качества алгоритмов MBADC 1 и MBADC 2

	t_k, c	$\delta, \%$
MBADC 1	0.97	4
MBADC 2	0.56	0,035

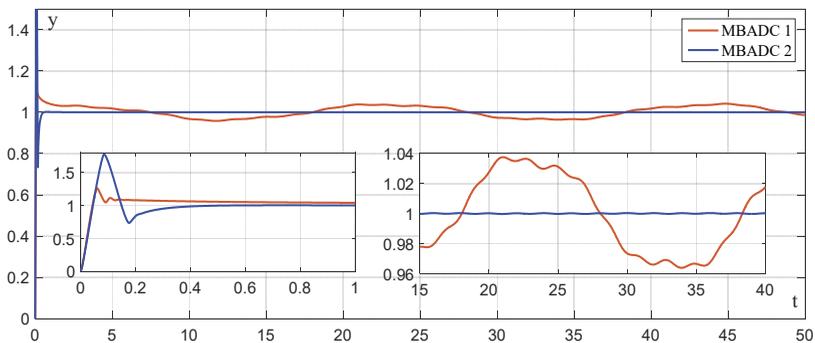


Рис. 1. Результаты моделирования работы алгоритмов управления MBADC 1 и MBADC 2 в режиме стабилизации. Переходные процессы по выходу

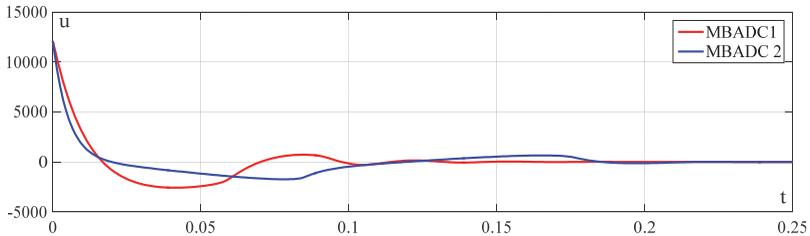


Рис. 2. Результаты моделирования работы алгоритмов управления MBADC 1 и MBADC 2 в режиме стабилизации. Переходные процессы по управлению

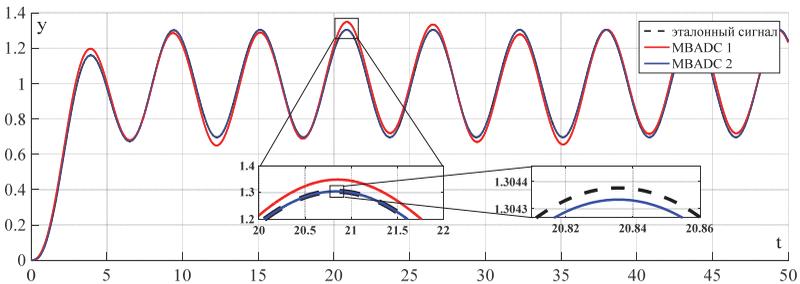


Рис. 3. Результаты моделирования работы алгоритмов управления MBADC 1 и MBADC 2 в режиме слежения. Переходные процессы по выходу

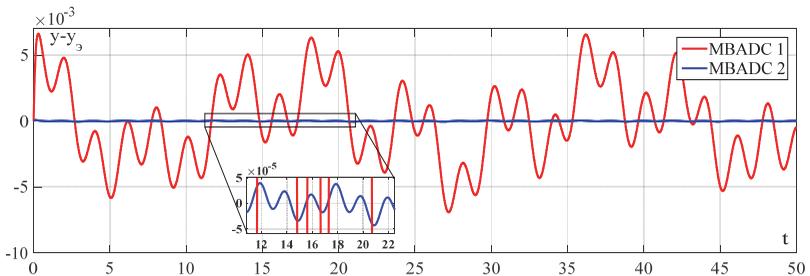


Рис. 4. Результаты моделирования работы алгоритмов управления MBADC 1 и MBADC 2 в режиме слежения. Переходные процессы по ошибке

Для демонстрации применимости алгоритма на практике рассмотрим модель лабораторного стенда «Twin Rotor MIMO System» (TRMS) [23], который представляет собой двухроторный многоканальный объект с нелинейной динамикой, неизвестными ограничениями возмущающими воздействиями и перекрестными связями. Общий вид стенда представлен на рисунке 5. Стенд является упрощенной моделью вертолета и позволяет в лабораторных условиях исследовать алгоритмы управления винтокрылыми летательными аппаратами. Работо-

способность исследуемого алгоритма в данном случае позволяет судить о применимости предложенного метода в практических задачах.

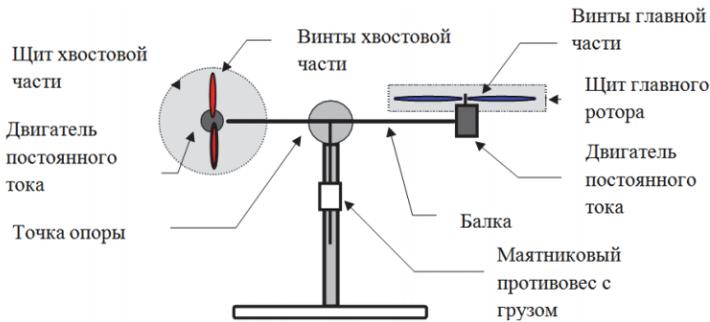


Рис. 5. Лабораторный стенд «Twin Rotor MIMO System»

Динамика объекта описывается системой уравнений вида:

$$J_1 \ddot{\alpha} = -k_{f11} \dot{\alpha} - k_{f12} \operatorname{sign}(\dot{\alpha}) + gN_1 \cos \alpha - gN_2 \sin \alpha - N_3 \beta^2 \sin \alpha \cos \alpha + F_1(u_1),$$

$$J_2 \ddot{\beta} = -k_{f21} \dot{\beta} - k_{f22} \operatorname{sign}(\dot{\beta}) + F_2(u_2),$$

где α , β — углы наклона балки в горизонтальной и вертикальной плоскостях соответственно, J_1 , J_2 — моменты инерции объекта в вертикальной и горизонтальной плоскостях, k_{f11} , k_{f21} — коэффициенты сил вязкого трения, k_{f12} , k_{f22} — коэффициенты сил сухого трения, g — ускорение свободного падения, N_i , $i = \overline{1,3}$ — константы, значения которых определяются массогабаритными показателями установки, F_1 , F_2 — нелинейные функции управления, включающие в себя динамику двигателей постоянного тока и работу аэродинамических сил от вращения лопастей установки, u_1 , u_2 — управляющие воздействия, в качестве которых выступают напряжения, подаваемые на ДПТ. Численные значения параметров объекта взяты из документации к установке [23].

Для синтеза системы управления стендом TRMS справедливы рассуждения, аналогичные тем, что были проделаны в аналитическом примере в начале раздела. В данном случае мотивация выбора функции возмущений и ее параметров обусловлена необходимостью обозначить наличие воздушных потоков и конструктивных особенностей установки, в частности учесть малые гладкие нелинейные воздействия от гибких проводов в местах их крепления к подвижной балке. Подобные воздействия не рассмотрены в документации, и вид

функции, которая могла бы их описать, неизвестен, но требуют учета в ходе эксперимента хотя бы в общем виде. Поэтому для моделирования функция возмущений взята из предыдущего примера. Параметры наблюдателя и вспомогательного контура также аналогичны используемым в первом примере. На рисунке 6 показан переходный процесс замкнутой системы при стабилизации объекта в вертикальной плоскости, на рисунке 7 — при слежении за эталонным сигналом в горизонтальной плоскости.

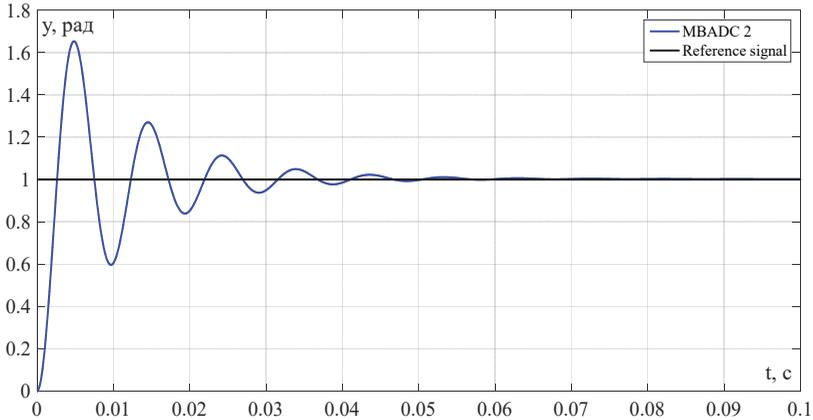


Рис. 6. Результаты моделирования работы алгоритма MBADC в режиме стабилизации для модели TRMS. Переходные процессы по выходу

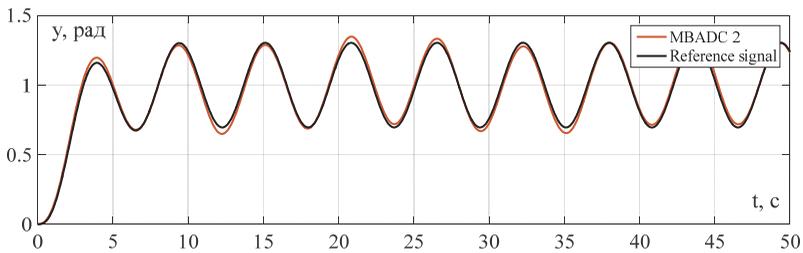


Рис. 7. Результаты моделирования работы алгоритма MBADC в режиме слежения для модели TRMS. Переходные процессы по выходу

В обоих случаях вид графиков позволяет судить о высокой точности регулирования и высокой скорости переходных процессов и не выявляет каких-либо негативных свойств системы управления. Точность регулирования при стабилизации объекта составила 0.3%, точность слежения — 0.5% при допустимом ограничении на возмущения в обоих случаях $f \in [-20; 20]$.

7. Заключение. В работе представлен модифицированный алгоритм управления с компенсацией возмущений для управления нелинейными объектами по выходу. В ходе компьютерного моделирования показано, что предложенная система управления способна за меньшее время переходного процесса обеспечить более высокую точность слежения по сравнению с существующими аналогами.

В таблице 1 показано, что рассмотренный метод позволил сократить время переходного процесса в 1.7 раза, а точность регулирования — на два порядка. Предлагаемый в статье метод упрощает процедуру синтеза регулятора по сравнению с [1, 16] за счет уменьшения числа фильтров в структуре системы управления до одного. Результаты компьютерного моделирования продемонстрировали эффективность предложенного метода.

Литература

1. *Kokotovic P.V.* The joy of feedback: nonlinear and adaptive // IEEE Control systems. 1992. vol. 12. no. 3. pp. 7–17.
2. *Мирошник И.В., Никуфоров В.О., Фрадков А.Л.* Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами // СПб.: Наука. 2000. 549 с.
3. *Sun H., Li S., Yang J., Zheng W.* Global output regulation for strict-feedback nonlinear systems with mismatched nonvanishing disturbances // International Journal of Robust and Nonlinear Control. 2015. vol. 25. no. 15. pp. 2631–2645.
4. *Khalil H.K.* Nonlinear Systems: 3rd. ed. // N.Y.: Prentice Hall. 2002. 750 p.
5. *Никуфоров В.О.* Адаптивное и робастное управление с компенсацией возмущений // СПб.: Наука. 2003. 282 с.
6. *Marino R., Tomei P.* Robust stabilization of feedback linearizable time-varying uncertain nonlinear systems // Automatica. 1993. vol. 29. no. 1. pp. 181–189.
7. *Freeman R.A., Kokotovic P.V.* Design of ‘softer’ robust nonlinear control laws // Automatica. 1993. vol. 29. no. 6. pp. 1425–1437.
8. *Qu Z.* Robust control of nonlinear uncertain systems under generalized matching conditions // Automatica. 1993. vol. 29. no. 4. pp. 985–998.
9. *Zheng Y., Yang Y.* Adaptive output feedback control for a class of nonlinear systems with unknown virtual control coefficients signs // International Journal of Adaptive Control and Signal Processing. 2007. vol. 21. no. 1. pp. 77–89.
10. *Sun H., Li S., Yang J., Zheng W.* Global output regulation for strict-feedback nonlinear systems with mismatched nonvanishing disturbances // International Journal of Robust and Nonlinear Control. 2015. vol. 25. no. 15. pp. 2631–2645.
11. *Цыкунов А.М.* Алгоритмы робастного управления с компенсацией ограниченных возмущений // Автоматика и Телемеханика. 2007. № 7. С. 103–115.
12. *Belyaev A.N., Smolovik S.V., Fradkov A.L., Furtat I.B.* Robust control of electric generator in the case of time-dependent mechanical power // Journal of Computer and Systems Sciences International. 2013. vol. 52. no. 5. pp. 750–758.
13. *Furtat I.B.* Robust control for a specific class of non-minimum phase dynamical networks // Journal of Computer and Systems Sciences International. 2014. vol. 53. no. 1. pp. 33–46.
14. *Furtat I.B., Chugina J.V.* Robust adaptive control with disturbances compensation // IFAC-PapersOnLine. 2016. vol. 49. no. 13. pp. 117–122.
15. *Vrazevsky S.A., Chugina J.V., Furtat I.B., Kremlev A.S.* Robust suboptimal output control for a Twin Rotor MIMO System // 2016 8th International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT). 2016. pp. 23–28.

16. *Фуртат И.Б.* Модифицированный алгоритм робастного обхода интегратора // Мехатроника, автоматизация, управление. 2009. № 10. С. 2–7.
17. *Furtat I., Furtat E., Tupichin E.A.* Modified Backstepping Algorithm with Disturbances Compensation // IFAC-PapersOnLine. 2015. vol. 48. no. 11. pp. 1056–1061.
18. *Furtat I.B., Vrazhevsky S.A., Kremlev A.S.* Robust Control Algorithm under Mismatched Disturbances // 2017 9th International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems (ICUMT). 2017. pp. 61–66.
19. *Фуртат И.Б., Тупичин Е.А.* Модифицированный алгоритм бэкстеппинга для нелинейных систем // Автоматика и телемеханика. 2016. № 9. С. 70–83.
20. *Брусин В.А.* Об одном классе сингулярно-возмущенных адаптивных систем. I // Автоматика и телемеханика. 1995. № 4. С. 119–129.
21. *Furtat I., Fradkov A., Tsykunov A.* Robust synchronization of linear dynamical networks with compensation of disturbances // International Journal of Robust and Non-linear Control. 2014. vol. 24. no. 17. pp. 2774–2784.
22. *Фуртат И.Б.* Робастное управление определенным классом неминимально-фазовых динамических сетей // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2014. № 1. С. 35–35.
23. *Twin Rotor MIMO System Advanced Teaching Manual* // Feedback Instruments Ltd. Crowborough. UK 1998. 72 p.

Вражевский Сергей Александрович — аспирант кафедры систем управления и информатики, ФГАОУ ВО "Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики" (Университет ИТМО), инженер кафедры систем управления и информатики, ФГАОУ ВО "Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики" (Университет ИТМО). Область научных интересов: робастное управление, оптимальные и субоптимальные системы управления, нелинейные системы. Число научных публикаций — 12. vrazhevskij.s@gmail.com; Вяземский пер., 5/7, Санкт-Петербург, 197022; р.т.: +7(911)1018207.

Поддержка исследований. Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (8.8885.2017/8.9, 14.Z50.31.0031), РФФИ № 17-08-01266.

S.A. VRAZHEVSKY
**OUTPUT CONTROL OF NONLINEAR SYSTEMS USING
MODIFIED BACKSTEPPING ALGORITHM WITH
DISTURBANCES COMPENSATION**

Vrazhevsky S.A. **Output Control of Nonlinear Systems using Modified Backstepping Algorithm with Disturbances Compensation.**

Abstract. The article deals with an output tracking control system synthesis for a nonlinear plant functioning under bounded external disturbances which are not available for measurement. The plant is described by continuously differentiable functions with a determinable dynamic relative degree. The disturbance function fulfills the Lipschitz condition. The standard model transformations are used to get a model of error dynamics. The algorithm synthesis process is based on iterative procedure with a number of steps equal to the order of the plant relative dynamic degree. A proposed solution is a robust modification of the backstepping approach with the similar controller design structure. The main changes are based on plant model transformations that make it possible to use the only one filter in control system and, along with it, an auxiliary loop method is used for disturbances evaluation and compensation. The auxiliary loop method leads to introduce a model of desired dynamics of errors on each step of the backstepping procedure and estimates the value of disturbance influences. High-gain observers are used for unknown signals measuring together with their derivatives. Tracking errors and observation errors convergence with the adjustable accuracy during the finite transient time is proved. The efficiency of the algorithm is demonstrated using computer modeling. The performance comparison between the proposed method and the immediate analogue are shown and some quality indicators are obtained. The algorithm is additionally tested using the model of laboratory helicopter-like platform «Twin Rotor MIMO System» to demonstrate the practical importance of the research.

Keywords: backstepping method, auxiliary loop method, nonlinear system, robust control, disturbances compensation, output control.

Vrazhevsky Sergey Alexandrovich — Ph.D. student of computer science and control systems department, ITMO University (Saint Petersburg National Research University of Information Technologies, Mechanics and Optics), engineer of computer science and control systems department, ITMO University (Saint Petersburg National Research University of Information Technologies, Mechanics and Optics). Research interests: robust control, optimal and suboptimal control approaches, control for nonlinear systems. The number of publications — 12. vrazhevskij.s@gmail.com; 5/7, Viazemsky per., St. Petersburg, 197022, Russia; office phone: +7(911)1018207.

Acknowledgements. This research is supported by the Ministry of Education and Science of Russian Federation (8.8885.2017/8.9, 14.Z50.31.0031), RFBR (grant no. 17-08-01266).

References

1. Kokotovic P.V. The joy of feedback: nonlinear and adaptive. *IEEE Control systems*. 1992. vol. 12. no. 3. pp. 7–17.
2. Miroshnik I.V., Nikiforov V.O., Fradkov A.L. *Nelinejnoe i adaptivnoe upravlenie slozhnymi dinamicheskimi sistemami* [Nonlinear and adaptive control for complex dynamic systems]. SPb.: Nauka. 2000. 549 p. (In Russ.).

3. Sun H., Li S., Yang J., Zheng W. Global output regulation for strict-feedback nonlinear systems with mismatched nonvanishing disturbances. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*. 2015. vol. 25. no. 15. pp. 2631–2645.
4. Khalil H.K. *Nonlinear Systems*: 3rd. ed. N.Y.: Prentice Hall. 2002. 750 p.
5. Nikiforov V.O. *Adaptivnoe i robustnoe upravlenie s kompensaciej vozmushhenij* [Adaptive and robust control with disturbances compensation]. SPb.: Nauka. 2003. 282 p. (In Russ.).
6. Marino R., Tomei P. Robust stabilization of feedback linearizable time-varying uncertain nonlinear systems. *Automatica*. 1993. vol. 29. no. 1. pp. 181–189.
7. Freeman R.A., Kokotovic P.V. Design of ‘softer’ robust nonlinear control laws. *Automatica*. 1993. vol. 29. no. 6. pp. 1425–1437.
8. Qu Z. Robust control of nonlinear uncertain systems under generalized matching conditions. *Automatica*. 1993. vol. 29. no. 4. pp. 985–998.
9. Zheng Y., Yang Y. Adaptive output feedback control for a class of nonlinear systems with unknown virtual control coefficients signs. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*. 2007. vol. 21. no. 1. pp. 77–89.
10. Sun H., Li S., Yang J., Zheng W. Global output regulation for strict-feedback nonlinear systems with mismatched nonvanishing disturbances. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*. 2015. vol. 25. no. 15. pp. 2631–2645.
11. Cykunov A.M. [Robust control algorithms with compensation of bounded disturbances]. *Avtomatika i Telemekhanika – Automation and Telemechanics*. 2007. vol. 7. pp. 103–115. (In Russ.).
12. Belyaev A.N., Smolovik S.V., Fradkov A.L., Furtat I.B. Robust control of electric generator in the case of time-dependent mechanical power. *Journal of Computer and Systems Sciences International*. 2013. vol. 52. no. 5. pp. 750–758.
13. Furtat I.B. Robust control for a specific class of non-minimum phase dynamical networks. *Journal of Computer and Systems Sciences International*. 2014. vol. 53. no. 1. pp. 33–46.
14. Furtat I.B., Chugina J.V. Robust adaptive control with disturbances compensation. *IFAC-PapersOnLine*. 2016. vol. 49. no. 13. pp. 117–122.
15. Vrazevsky S.A., Chugina J.V., Furtat I.B., Kremlev A.S. Robust suboptimal output control for a Twin Rotor MIMO System. 2016 8th International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT). 2016. pp. 23–28.
16. Furtat I.B. [Modified Algorithm of Robust Integrator Backstepping]. *Mekatronika, Avtomatizacija, Upravlenie – Mechatronics, Automation, Control*. 2009. vol. 10. pp. 2–7. (In Russ.).
17. Furtat I., Furtat E., Tupichin E.A. Modified Backstepping Algorithm with Disturbances Compensation. *IFAC-PapersOnLine*. 2015. vol. 48. no. 11. pp. 1056–1061.
18. Furtat I.B., Vrazhevsky S.A., Kremlev A.S. Robust Control Algorithm under Mismatched Disturbances. 2017 9th International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems (ICUMT). 2017. pp. 61–66.
19. Furtat I.B., Tupichin E.A. [Modified backstepping algorithm for nonlinear systems]. *Avtomatika i Telemekhanika – Automation and Telemechanics*. 2016. vol. 9. pp. 70–83. (In Russ.).
20. Brusin V.A. [On a class of singularly perturbed adaptive systems. I.]. *Avtomatika i Telemekhanika – Automation and Telemechanics*. 1995. vol. 4. pp. 119–129. (In Russ.).
21. Furtat I., Fradkov A., Tsykunov A. Robust synchronization of linear dynamical networks with compensation of disturbances. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*. 2014. vol. 24. no. 17. pp. 2774–2784.
22. Furtat I.B. [Robust control for a certain class of nonminimum phase dynamic networks]. *Izvestija Rossijskoj akademii nauk. Teorija i sistemy upravlenija – Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Control theory and control systems*. 2014. vol. 1. pp. 35–35. (In Russ.).
23. Twin Rotor MIMO System Advanced Teaching Manual. Feedback Instruments Ltd. Crowborough. UK 1998. 72 p.