**УДК** 303.732.4 **DOI** 10.15622/sp.52.5

Н.Ф. Аверкиев, С.А. Власов, А.В. Кульвиц, Е.П. Силла

# МЕТОД ЦЕЛЕНАПРАВЛЕННОЙ ЗАМЕНЫ ОПТИМИЗИРУЕМОГО ФУНКЦИОНАЛА В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

*Аверкиев Н.Ф., Власов С.А., Кульвиц А.В., Силла Е.П.* **Метод целенаправленной замены оптимизируемого функционала в задачах оптимального управления.**

**Аннотация**. Предлагается метод решения задачи поиска оптимального управления динамической системой, когда ограничения налагаются как на управление, так и на фазовые переменные в промежуточных точках траектории. При этом полагается, что известны начальное и конечное положения динамической системы и неизвестно некоторое опорное управление, для которого траектория движения удовлетворяет налагаемым ограничениям, и при этом динамическая система переводится из начального положения в конечное положение. Решение сформулированной задачи ищется путем корректного сведения ее к последовательности частных задач, методы решения которых известны, и процедура этого сведения не допускает потери решений. Предложенный метод назван в работе методом целенаправленной замены оптимизируемого функционала. Приведен пример реализации данного метода в вопросах проектирования ракетно-космической техники.

**Ключевые слова:** оптимальное управление, динамическая система, метод оптимизации, функционал, траектория, граничные условия, ограничения.

**1. Введение.** Теория оптимального управления — динамично развивающееся научное направление математики. Наиболее общими математическими подходами, на которых базируется современная теория оптимальных процессов, являются принцип максимума Л. С. Понтрягина и метод динамического программирования Р. Беллмана [1, 2]. Развитию, обобщению и применению этих подходов посвящено большое количество научных работ. Однако универсальных методов решения задач оптимального управления для существенно нелинейных динамических систем с ограничениями на фазовые переменные в промежуточных точках траектории и строго обоснованных численных алгоритмов их решения в настоящее время не разработано. Вместе с тем большую значимость имеют приближенные методы решения задач оптимального управления, которые доведены до вычислительных процедур и могут быть применены на практике [3-5]. Условно можно выделить три обобщающих направления.

Первое направление связано с попыткой решить систему уравнений, образующих принцип максимума. В настоящее время обоснованных подходов для такого типа решений не существует [6].

Второе направление связано с построением минимизирующей последовательности траекторий, причем в качестве независимого аргумента берется не управление, а фазовая траектория. В данном случае возможно учесть фазовые ограничения. Но также возникают трудности при реализации вычислительного подхода, хотя для ряда частных задач метод (направление) был успешно апробирован [7-9].

Третье направление связано с построением минимизирующей последовательности управлений. В основе этого направления лежит выбор управления как независимого аргумента, трудности при его реализации, как правило, связаны с фазовыми ограничениями (с функционалами, не имеющих производных и т.д.). Это направление в большей степени востребовано и широко освещено в научной литературе [3, 9-11].

Одна из актуальных и востребованных областей применения теории оптимального управления — проектирование и обеспечение безопасности функционирования ракетно-космической техники. Это связано с использованием токсических и взрывоопасных компонентов топлива, с низкой надежностью ракет космического назначения (около 5-10% пусков аварийные), а также с затратами, связанными с возмещением ущерба за экологическое загрязнение окружающей среды.

Такие задачи относятся к классу задач оптимального управления с ограничениями на фазовые переменные в промежуточных точках траетктории.

В данной статье предложен метод решения такого класса задач с примером его практической реализации в области ракетно-космической техники, который доведен до вычислительных процедур и может быть реализован в решении практических задач.

**2. Формализация и метод решения задачи оптимального управления.** Пусть известен след динамической системы (объекта управления) (рисунок 1), определяемый вектором состояния $\bar{x}(t),\ t \in [t_0, t_к],\ t_0 : \bar{x}_0 = \bar{x}(t_0),\quad t_к : \bar{x}_к = \bar{x}_к(t_к)$ с функционалом в форме Майера:

$$\Phi\,(\bar{x}, t_к) \to min\ , \tag{1}$$

проходящий в общем случае в некоторой близости от $m$ областей, а в качестве примера задаваемых как:

$$\Theta_j(\bar{x}_j^{\Theta}; R_j) = \{\bar{x} \in E^n : (\bar{x} - \bar{x}_j^{\Theta})^T (\bar{x} - \bar{x}_j^{\Theta}) \le R_j^2\},\quad j = 1,2\ldots,m\ . \tag{2}$$

Пусть, согласно предъявляемым требованиям, траектория движения в некоторые заранее неизвестные моменты времени $t_j^*$ должна пересекать эти множества, то есть должны выполняться условия, налагаемые на фазовые переменные в промежуточных точках траектории:

$$(\bar{x} - \bar{x}_j^{\Theta})^T (\bar{x} - \bar{x}_j^{\Theta}) \le R_j^2,\quad t_j^* : \bar{x}_j^* = \bar{x}(t_j^*),\quad j = 1,2\ldots,m, \tag{3}$$

где $\bar{x}_j^{\Theta}$ — вектор координат центра $j$-й области, задаваемой как (2).

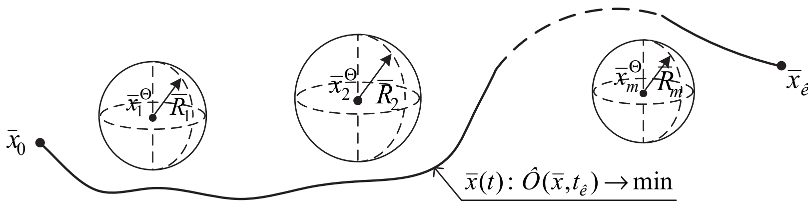


Рис. 1. След динамической системы в трехмерном пространстве с функционалом (1)

Тогда постановка задачи поиска оптимального управления движением динамической системы будет сформулирована следующим образом.

Задан объект управления (динамическая система), координаты которого описываются $n$-мерным вектором состояния $\bar{x} = [x_1, x_2, x_3, ..., x_n]^T$. Эти координаты меняются во времени согласно системе дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}_i = f_i(\bar{x}, \bar{u}, t), \quad i = 1, 2, \dots, n, \tag{4}$$

где $f_i(\bar{x}, \bar{u}, t)$ — функция координат $\bar{x}$, времени $t$ и $r$-мерного вектора управления $\bar{u} = [u_1, u_2, u_3, ..., u_r]^T$, $\bar{u} \in U$, $U$ — множество допустимых управлений.

Если задано начальное состояние объекта управления:

$$\bar{x}_0 = \bar{x}(t_0) \tag{5}$$

и функция управления $\bar{u}(t)$, то при предположении, что функции $f_i(\bar{x}, \bar{u}, t)$, $i = 1, 2 \dots, n$ непрерывны по совокупности $\bar{x}$ и $\bar{u}$, непрерывно дифференцируемы по $\bar{x}$, а функции $\bar{u}(t)$ измеримые и ограниченные, решение системы дифференциальных уравнений (4) однозначно определяет траекторию движения объекта управления, которая является следом динамической системы.

Пусть, кроме того, задана конечная точка траектории движения динамической системы:

$$\bar{x}_к = \bar{x}(t_к). \tag{6}$$

Необходимо найти такую траекторию движения динамической системы, для которой бы выполнялись условия (1), (3) и граничные условия (5) и (6).

В настоящее время известны задачи, которые по отношению к сформулированной задаче являются частными и методы решения которых хорошо изучены. К ним можно отнести следующие задачи:

1. Задачу поиска безусловного экстремума функционала (1) на дифференциальных связях (4) при начальных и конечных условиях (5) и (6) соответственно [12].

2. Задачу поиска экстремума функционала (1) на дифференциальных связях (4) при начальных и конечных условиях (5) и (6) соответственно и известном опорном управление $\bar{u}^*(t)$, которое удовлетворяет наложенным условиям (3), (5), (6) [13].

Таким образом, если сформулированную выше задачу можно корректно свести к последовательности частных задач, методы решения которых известны, и при этом не будет потери решений, то в итоге и общая задача также корректно будет решена. Для реализации такого подхода целесообразно применить метод целенаправленной замены оптимизируемого функционала. Сущность этого метода заключается в следующем. Решение задачи разбивается на ряд этапов.

*1-й этап*. Согласно функционалу (1) находится оптимальное управление $\bar{u}_1^*(t)$ и соответствующий ему след динамической системы $\bar{x}(t),\ t \in [t_0, t_\kappa],\ t_0 : \bar{x}_0 = \bar{x}(t_0),\ t_\kappa : \bar{x}_\kappa = \bar{x}_\kappa(t_\kappa)$.

*2-й этап*. Производится замена функционала (1) на функционал вида:

$$(\bar{x} - \bar{x}_1^{\Theta})^T (\bar{x} - \bar{x}_1^{\Theta}) \to min \,, \tag{7}$$

при известном управлении $\bar{u}_1^*(t)$, являющимся опорным (начальным) для поиска решения данной задачи, находится согласно функционалу (7), оптимальное управление $\bar{u}_2^*(t)$ и соответствующий ему след динамической системы $\bar{x}(t),\ t \in [t_0, t_\kappa],\ t_0 : \bar{x}_0 = \bar{x}(t_0),\ t_\kappa : \bar{x}_\kappa = \bar{x}_\kappa(t_\kappa)$ (рисунок 2).

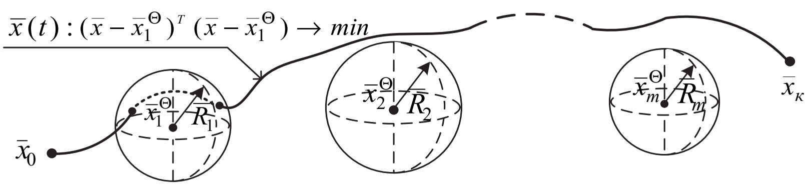


Рис.2. След динамической системы в трехмерном пространстве с функционалом (7)

*3-й этап*. Производится замена функционала (7) на функционал вида:

$$(\bar{x}-\bar{x}_2^{\Theta})^T(\bar{x}-\bar{x}_2^{\Theta}) \to min\ , \tag{8}$$

при известном управлении $\bar{u}_2^*(t)$, являющимся опорным (начальным) для решения данной задачи, находится согласно функционалу (8), оптимальное управление $\bar{u}_3^*(t)$ и соответствующий ему след динамической системы $\bar{x}(t),\ t\in[t_0,t_к]$ , $t_0:\ \bar{x}_0=\bar{x}(t_0),\ t_к:\ \bar{x}_к=\bar{x}_к(t_к)$ и траектория $\bar{x}(t)$ проходит через область, задаваемую как $\bar{x}\in E^n:\ (\bar{x}-\bar{x}_1^{\Theta})^T(\bar{x}-\bar{x}_1^{\Theta})\le R_1^2$ (рисунок 3).

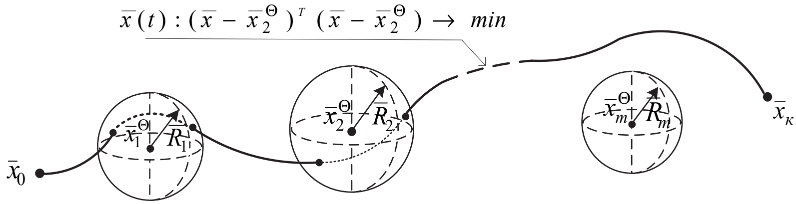


Рис. 3. След динамической системы в трехмерном пространстве с функционалом (8)

*(m+1)-й этап*. Производится замена функционала (8) на функционал вида:

$$(\bar{x}-\bar{x}_m^{\Theta})^T(\bar{x}-\bar{x}_m^{\Theta}) \to min\ , \tag{9}$$

при известном управлении $\bar{u}_m^*(t)$, являющимся опорным (начальным) для решения данной задачи, находится согласно функционалу (9) оптимальное управление $\bar{u}_{m+1}^*(t)$ и соответствующий ему след динамической системы $\bar{x}(t), t\in[t_0,t_к]$ , $t\in[t_0,t_к],\ t_0:\ \bar{x}_0=\bar{x}(t_0),\ t_к:\ \bar{x}_к=\bar{x}_к(t_к)$, и траектория $\bar{x}(t)$ проходит через области, задаваемые как $\bar{x}\in E^n:\ (\bar{x}-\bar{x}_j^{\Theta})^T(\bar{x}-\bar{x}_j^{\Theta})\le R_j^2,\ \ j=1,2,\dots,(m-1)$ (рисунок 4).

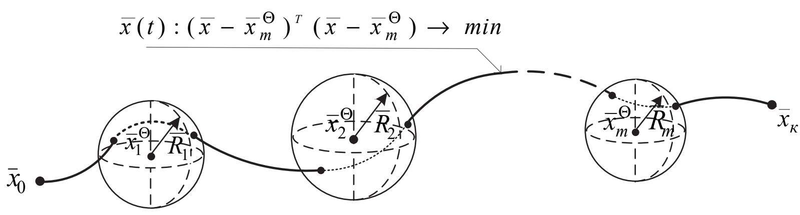


Рис. 4. След динамической системы в трехмерном пространстве с функционалом (9)

*(m+2)-й этап*. Производится замена функционала (9) на исходный функционал (1) и при известном управлении $\bar{u}^*_{m+1}(t)$, являющимся опорным (начальным) для решения данной задачи, находится, согласно функционалу (1), оптимальное управление $\bar{u}^*_{m+2}(t)$ и соответствующий ему след динамической системы $\bar{x}(t),\ t \in [t_0, t_к]$, $t \in [t_0, t_к],\ t_0 : \bar{x}_0 = \bar{x}(t_0),\ t_к : \bar{x}_к = \bar{x}_к(t_к)$ такие, что траектория движения $\bar{x}(t)$ будет проходить через области, задаваемые как $\bar{x} \in E^n : (\bar{x} - \bar{x}^{\Theta}_j)^{\delta} (\bar{x} - \bar{x}^{\Theta}_j) \le R^2_j,\ j = 1,2\ldots, m$.

**3. Применение метода целенаправленной замены оптимизируемого функционала в задаче синтеза программ управления движением центром масс летательных аппаратов.** При синтезе программ управления движением центра масс летательных аппаратов исследователь сталкивается с трудностями построения начальной (опорной) программы, удовлетворяющей заданным граничным условиям и ограничениям на фазовые переменные в промежуточных точках траектории [12, 13]. Эти ограничения вызваны необходимостью выполнения требований, сформулированных в целевой задаче, например, попадания отделяемых частей (ОЧ) ракет космического назначения (РКН) в выделенные районы на поверхности Земли [14-16]; пролет летательного аппарата над заданными районами поверхности Земли [17] и т.п. В этих случаях будут иметь место следующие математические постановки задач поиска оптимального управления движением центром масс летательных аппаратов [17, 18].

*Задача 1. Построение экономичной программы управления движением центром масс ракеты космического назначения при выведении на орбиту космического аппарата.*

Прокладка трасс запуска КА и обоснование границ районов падения отделяющихся частей РКН имеет свои сложности и особенности при внутриконтинентальном расположении космодромов [17], так как требует построения оптимальной программы управления движением РКН. Математическая формулировка такой задачи может иметь следующий вид.

Допустим, что движение центра масс РКН описывается системой дифференциальных уравнений вида (4). При этом моменты времени наступления аварии или отсоединения ОЧ обозначим как $\tau \in [t_0, t_g]$, где $t_g$ — момент времени полета РКН, после которого РКН и ее составные части имеют такие параметры полета, при которых они выходят на одновитковую орбиту. До этого момента времени при аварии или отсоединении ОЧ координаты точек падения РКН и ее ОЧ на поверхности Земли $\bar{x}_к^* \in X^*$ определятся на основании функциональных связей:

$$x_j^* = F_j(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, \tau), \; j = 1, 2, \ldots, m, \tag{10}$$

где $F_j(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, \tau)$ — функции фазовых координат $\bar{x}$ и скоростей $\dot{\bar{x}}$ для момента выключения ДУ $t^*$, $t_g$ — момент времени, после которого РКН и ее составные части выходят на одновитковую орбиту, $m$ — размерность вектора $\bar{x}^*$. Допустим также, что заданы координаты точки старта РКН (начальные условия для системы дифференциальных уравнений движения (4)):

$$\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0, \tag{11}$$

и найдены каким-либо образом функции управления $\bar{u}(t)$, тогда если функции $f_i(\bar{x}, \bar{u}, t), i = 1, 2 \ldots, n$ непрерывны на множествах $x \in X$, $u \in U$, непрерывно дифференцируемы по $x$, а $\bar{u}(t)$ измеримые и ограниченные функции, тогда система дифференциальных уравнений движения (4) будет однозначно определять траекторию полета РКН.

Если известна конечная точка полета (например, параметры орбиты КА):

$$\bar{x}(t_k) = \bar{x}_k, \tag{12}$$

и найдены все управления $\bar{u}(t)$, $t \in [t_0, t_к]$, обеспечивающие прохождение траектории $\bar{x}(t)$ через точку $\bar{x}_к$ в момент времени $t_к$ при выполнении ограничений, на параметры траектории выведения КА на орбиту, то из всех найденных управлений можно выбрать такое управление, при котором заданный функционал $J$ будет иметь экстремальное значение.

Обычно на практике используются следующие оценивающие показатели качества (функционалы) процесса выведения КА на орбиту [15]:

– масса выводимого РКН полезного груза на орбиту:

$$m_{KA} = \int_{t_0}^{t_k} \dot{m}(\bar{x}, \bar{u}) dt; \tag{13}$$

– число возможных поражений населения, находящегося в момент времени возникновения аварии РКН $\tau$, вдоль трассы полета:

$$R = R(\bar{x}^*, Z, \tau)\,, \tag{14}$$

где $Z \in X^*$, $Z = [\bar{z}_1, \bar{z}_2, ..., \bar{z}_N]$ — матрица, элементы которой координаты (в общем случае случайные значения координат) нахождения людей вдоль трассы запуска КА, $N$ — число людей, находящихся в зоне опасности;

– величина вероятного нанесения непреднамеренного ущерба объектам хозяйственной деятельности человека (здания, сооружения, путепроводы, водоемы, леса и т.п.) в результате возникшей в момент времени $\tau$ аварийной ситуации во время полета РКН:

$$R_o = R_o(\bar{x}^*, Y, \tau)\,, \tag{15}$$

где $Y$ — кортеж, элементы которого важные объекты жизнедеятельности человека (их координаты, размеры, степень защищенности и важности) [18].

При выведении КА на орбиту рассматривают обычно два участка полета, называемые активным участком траектории полета РКН (описывается системой дифференциальных уравнений (4), и пассивным участком траектории полета ОЧ или аварийной РКН (описывается уравнениями (10)). Второй участок полета иногда называют баллистическим. При этом, если предположить, что на данном участке полета не будут действовать неучтенные в модели движения возмущающие факторы, то будет существовать строгая функциональная связь между временем наступления аварии (или отделения ОЧ от РКН) $\tau$, соответствующими этому времени параметрами движения РКН $\bar{x}(\tau)$ и координатами точки падения РКН или ОЧ на поверхности Земли $\bar{x}$.

Это, в свою очередь, означает, что можно рассчитать и введенные показатели риска для населения $R$ и непреднамеренного ущерба объектам хозяйственной деятельности человека $R_o$.

Для удобства дальнейшей формализации задачи целесообразно ввести и рассмотреть следующие понятия:

– эквивалент стоимости затрат на восстановление непреднамеренного ущерба, нанесенного объектам хозяйственной деятельности человека результатами пуска РКН:

$$C = \mu(R_o)\,,$$

где $\mu$ — функция пересчета ущерба в денежный эквивалент;

– эквивалент стоимости затрат на доставку килограмма полезного груза на орбиту без учета вышеуказанной стоимости затрат:

$$C_o = \chi(s)\,,$$

где $\chi$ — функция пересчета одного килограмма массы выводимого полезного груза на орбиту в денежный эквивалент;

– эквивалент стоимости затрат на эксплуатацию выделенных районов падения ОЧ РКН:

$$C_1 = \zeta(S),$$

где $\zeta$ — функция, зависящая от размеров площади районов падения S, и позволяющая пересчитывать затраты на эксплуатацию районов падения ОЧ РКН в денежный эквивалент. Площадь разбивается на более мелкие участки и для каждого вводится весовой коэффициент по степени важности (относительный денежный эквивалент). Суммарные затраты складываются из суммы весовых коэффициентов. Зависимость стоимости затрат на эксплуатацию района падения представлена на рисунке 5.

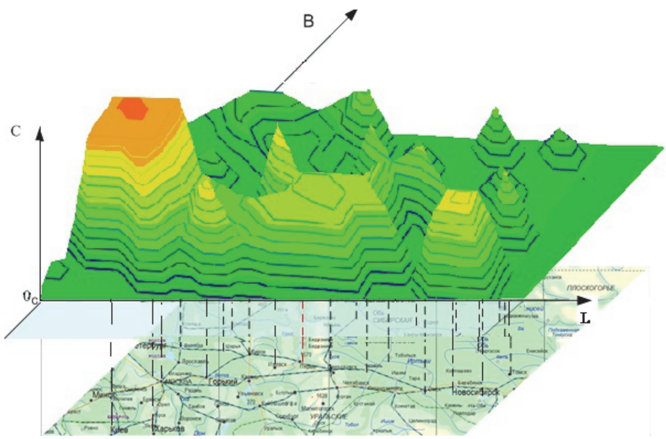


Рис.5. Зависимость ценового эквивалента заданного района эксплуатации

Зададимся временем наступления аварии, которое является случайной величиной $\hat{\tau}$ и плотностью распределения этой случайной величины, а также некоторой траекторией полета РКН, задаваемой как $\bar{x}(t) \in X$ при заданном времени наступления аварии $\tau \in [t_0, t_g]$ можно рассчитать выше перечисленные показатели качества $m$, $R$ и $R_o$, а следовательно, и показатель $C$. Тогда суммарные затраты на выведение одного килограмма полезного груза на заданную орбиту с учетом вышеуказанных затрат $C_\Sigma$ найдутся из следующего соотношения:

$$C_\Sigma = C_o + \frac{C}{m} + \frac{C_1}{\mathrm{m}}. \qquad (16)$$

Используя метод статистических испытаний можно в соответствии с заданным законом распределения случайной величины провести моделирование времени наступления аварии РКН в процессе выведения КА на орбиту $\hat{\tau} \in [t_0, t_k]$. Это позволит получить вероятностные характеристики показателя $C_\Sigma$ (например, математическое ожидание и СКО оценки $C_\Sigma$).

Обобщая выше сказанное, допускается вывод, что практический интерес может представлять следующий показатель качества построенной программы управления движением РКН на активном участке траектории полета:

$$J_C = \min_{\substack{\bar{u} \in U, \ \bar{x} \in X \\ m \geq m^D, \ R \leq R^D}} \overline{C}_\Sigma(\bar{x}, \bar{u}, \bar{x}^*, Y, \tau), \tag{17}$$

который характеризует математическое ожидание минимальных суммарных затрат на выведение одного килограмма полезного груза на орбиту $\overline{C}_\Sigma$ и учитывает затраты на эксплуатацию районов падения и восстановление вероятного непреднамеренного ущерба объектам хозяйственной деятельности человека, удовлетворяет наложенным ограничениям на параметры движения $\bar{x} \in X$, управление $\bar{u} \in U$ РКН и на допустимые массу выводимого полезного груза $m \geq m^D$, а также уровень риска для человека $R \leq R^D$. На рисунке 6 представлена траектория движения РКН и введены следующие обозначения: $L$ — дальность полета, $H$ — высота, $Z$ — отклонение в боковом направлении.

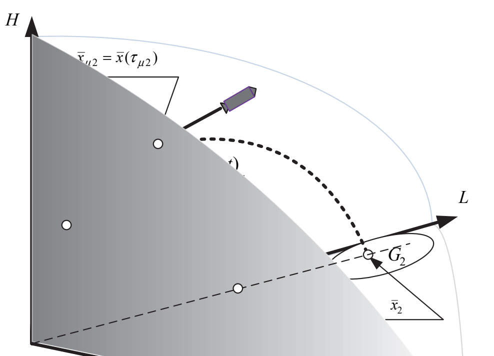


Рис. 6. Схематичное расположение траектории полета, трассы, районов падения ОЧ РКН

Как правило, движение РКН рассматривают как сложное движение под действием возмущающих факторов и называют возмущенным движением РКН. Под возмущенным движением понимают движением РКН, происходящее в условиях отличных от расчетных.

К числу расчетных условий обычно относят математические модели фигуры и гравитационного поля Земли, тяговые, массовые, аэродинамические и геометрические характеристики ракеты-носителя, параметры атмосферы, наличие (отсутствие) ветра, модели гравитационного поля Луны, Солнца, планет солнечной системы.

Реальное движение (фактическое) движение относится к классу возмущенного движения. Сложность математического описания возмущенного движения РКН связана со сложностью описания возмущающих факторов. Под возмущающими факторами будем понимать отличие фактических условий РКН движений от расчетных. Возмущающие факторы по математической природе делятся на два класса:

– предопределенные — это те возмущающие факторы, которые всегда можно учитывать в расчетных условиях;

– случайные (отклонения тяги ступеней, ветер и т. д);

Возмущающие факторы по физической природе делятся:

1. Геофизические:

– вращение Земли;

– нецентральность гравитационного поля Земли;

– гравитационные поля Луны, Солнца и других планет;

– неровность и непрямолинейность движения центра масс относительно Солнца;

– несферичность поверхности Земли.

2. Конструктивно-технологические возмущающие факторы:

– тяговые (отклонение массово секундного расхода топлива от номинального, разброс тяги двигателя);

– массовые;

– аэродинамические (отклонения аэродинамических характеристик);

– отклонения системы управления (уход гироскопов и т.д.).

3. Метеорологические (отличие плотности от номинального значения, давление).

Все возмущающие факторы порождают возмущающие силы и возмущающие моменты, под действием которого параметры движения

РКН будут отличаться от расчетных, что приводит к снижению эффективности решаемой КА задачи. Поэтому возникает необходимость исследования возмущенного движения при решении следующих задач:

– анализа влияния каждого в отдельности возмущающего фактора на предмет включения в расчетные условия;

– выбора структуры и характеристик СУ (парирование ВФ).

Чтобы проанализировать каждый в отдельности возмущающий фактор, его необходимо математически описать, а затем включить в полную систему уравнения (ПСУ) РКН. Необходимо заметить, что ПСУ движения РКН на активном участке траектории четырежды недоопределена (45 уравнений и 49 неизвестных), так как число параметров на 4 больше, чем число уравнений.

Следовательно, для однозначности решения ПСУ необходимо на параметры движения наложить 4-е дополнительные связи. Процесс выбора связей называется программированием движения РКН, а сами связи — программой движения РКН. Если задать программу движения РКН и иметь начальные условия по числу уравнений, то ПСУ можно решить методом численного интегрирования и получить расчетные зависимости от времени параметров движения. Методы оптимизации как раз и нацелены на оптимальный выбор программы движения.

Полная система уравнений в общем виде и есть система дифференциальных уравнений (4). При этом траектория движения РКН, являющаяся решением системы дифференциальных уравнений (4), должна удовлетворять начальным (11) и конечным (12) условиям движения, экстремальному значению функционала $J_C$, а отделяемые части РКН должны попадать в $p$ области на поверхности Земли, заданные следующим образом:

$$G_i = \{\bar{x}^* \in X^* : \| \bar{x}^* - \bar{x}_{0i} \| \le R_i\},\ i = 1,2,\ldots,p, \qquad (18)$$

где $\bar{x}_{0i}$ — геометрические центры областей, $R_i$ — радиусы областей.

Точки $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ называют точками прицеливания, которые располагаются в районах падения ОЧ. В точки $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ ОЧ могут попасть, как известно [15], при различных значениях начальных условий $\bar{x}_{к1} \in X_{к1}$, $\bar{x}_{к2} \in X_{к2}$, где $X_{к1}$ и $X_{к2}$ есть множества таких значений начальных условий движения ОЧ, которые образуют так называемое пространство начальных (рисунок 7).

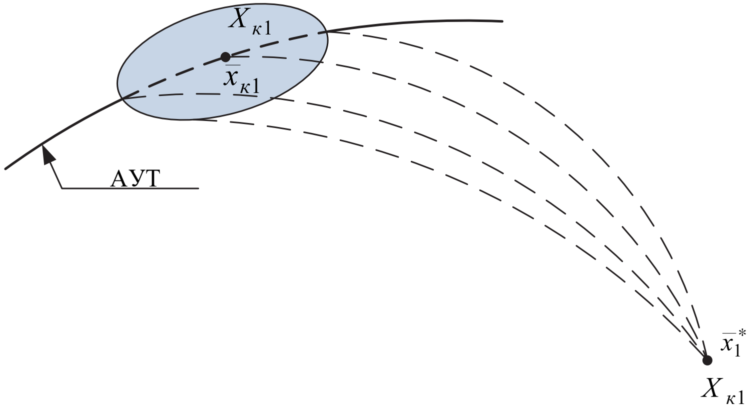


Рис. 7. Пространство начальных условий движения РКН, при которых ОЧ попадает в точку прицеливания

Тогда в моменты времени $t_i$:

$$\bar{x}_i = \bar{x}(t_i)\,,\ \bar{x}_i^* = \bar{F}(\bar{x},\dot{\bar{x}},t_i)\,,\ \left\|\bar{x}_i^* - \bar{x}_{0i}\right\| \le R_i\,,\ i = 1,2,\ldots,p\,. \qquad (19)$$

Таким образом, задача сводится к поиску среди множества управлений $\bar{u}(t)$ такого управления, для которого функционал (17) принимает минимальное значение.

Существуют известные методы поиска так называемого квазиоптимального управления движения объекта с ограничениями на фазовые переменные [13]. В их основе лежит предположение, что уже найдено допустимое (опорное) управление, обеспечивающее выполнение условий (4)–(6). К таким методам можно отнести, например, метод локальных вариаций [16, 17, 19]. В этом случае также производят замену функционала, чтобы поставленные вариационные задачи могли быть решены уже известными методами.

Тогда получим следующую последовательность задач:

1. Найти управление $\bar{u} = \bar{u}(t)$, $t \in [t_0, t_k]$, обеспечивающее выполнение условий (4) и (5) на уравнениях связи (3) для функционала следующего вида:

$$\widetilde{G}_1(\bar{x}, t_1) = \min_{\bar{u}} \| \bar{x}_1^* - \bar{x}_{01} \| .$$

2. Найти управление $\bar{u} = \bar{u}(t),\ t \in [t_0, t_k]$, обеспечивающее выполнение условий (4), (5) и $\| \bar{x}_1^* - \bar{x}_{01} \| \le R_1$ на уравнениях связи (3) для функционала:

$$\widetilde{G}_2(\bar{x}, t_2) = \min_{\bar{u}} \| \bar{x}_2^* - \bar{x}_{02} \| .$$

3. Найти управление $\bar{u} = \bar{u}(t),\ t \in [t_0, t_k]$, обеспечивающее выполнение условий (4), (5) и $\| \bar{x}_i^* - \bar{x}_{0i} \| \le R_i$, $i = 1, 2$ и доставляющее экстремум функционалу.

Таким образом, в основе задачи синтеза программы управления движением РКН лежит традиционная постановка задачи поиска оптимального управления с ограничениями. Решение последовательности задач известными методами приведет к решению задачи в исходной постановке, что позволит минимизировать (максимизировать) заданный функционал в рассматриваемом случае вида (17).

*Задача 2. Построение оптимального маршрута инспекции летательным аппаратом объектов, располагающихся на поверхности Земли.*

Развитие ракетно-авиационной техники расширяет функциональные возможности летательных аппаратов. Среди решаемых ими задач традиционно стоят задачи инспекции рассредоточенных в пространстве площадей и объектов. Для их решения, как правило, используется размещаемая на борту специальная аппаратура. При этом оптимизация маршрутов полетов летательных аппаратов по-прежнему остается актуальной задачей [17].

Предположим, что радиусы действий $r_i$ всех $k$ специальных средств, установленных на борту летательного аппарата, не менее некоторого фиксированного значения $R$, то есть $R:\ r_\delta \ge R,\ \delta = 1, 2, \ldots, k$. И пусть при этом необходимо проложить маршрут, обеспечивающий инспекцию летательным аппаратом $m$-объектов в заданной последовательности с минимальными затратами ресурса (например, топлива, времени и т.п.). В этом случае будет иметь место следующая математическая постановка задачи.

Пусть последовательность инспекции объектов с координатами $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_m$ известна (рисунок 8) и движение летательного аппарата-инспектора описывается векторным дифференциальным уравнением (4).

И пусть известны начальные условия движения летательного аппарата на момент времени $t_0$ (5) и конечные координаты на момент времени $t_k$ (6).

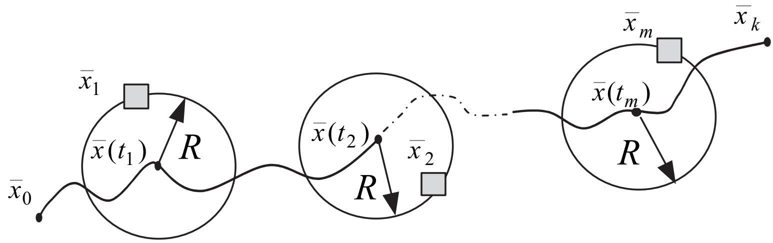


Рис. 8. Маршрут инспекции объектов летательным аппаратом

Требуется найти такое управление движением летательного аппарата $\bar{u}=\bar{u}(t)$, $t\in[t_0;t_k]$, при котором на дифференциальных связях (4) выполняются условия (5), (6), достигается экстремум функционала:

$$\Phi=\Phi(\bar{x},\bar{u},t_k), \tag{20}$$

и обеспечивается условие инспекции заданных объектов (рисунок 6):

$$R_j=\min_{t\in[t_o,t_k]}\|\bar{x}(t)-\bar{x}_j\|\le R,\ \ j=1,2,\ldots,m,\ \ t\in[t_0,t_k], \tag{21}$$

где $\bar{x}_j$ — вектор координат инспектируемых объектов; $R_j$ — минимальное расстояние от летательного аппарата до $j$ -го объекта при следовании по выбранному маршруту; $j$ — порядковый номер инспектируемого объекта. Выполнение неравенства (21) обеспечивает прохождение маршрута летательного аппарата на расстояниях от инспектируемых объектов не более требуемого значения $R$ .

**4. Заключение.** Таким образом, искомая задача поиска оптимального управления движением центра масс летательных аппаратов с ограничениями на фазовые переменные в промежуточных точках траектории может быть сведена к упорядоченной последовательности частных задач, методы решения которых известны [8, 20] и, в частности, использовались при решении следующих практических задач в области проектирования ракетно-космической техники:

– целенаправленного поиска программы движения РКН, обеспечивающей минимальные геометрические размеры эллипсов рассеивания ОЧ [14, 17];

– расчета программы движения РКН, обеспечивающей минимум функционала, заданного в форме затрат на выведение полезного груза [15, 21];

– построение трасс запуска космических аппаратов, обеспечивающий требуемый экономический эффект [16, 17, 22, 23, 25];

– оптимизации маршрута полета летательного аппарата для обследования рассредоточенных в пространстве объектов [17, 24, 26].

Представленный спектр научно-практических задач, решаемых с помощью рассматриваемого метода, позволяет сделать выводы об области его применения. Область применения метода ограничена лишь выполнением ряда условий, а именно:

1) наличием или возможностью поиска безусловного экстремума функционала при граничных условиях;

2) наличие опорного управления, которое удовлетворяет заданным условиям и ограничениям.

Как правило, при решении практических задач опорное управление, а также возможности поиска безусловного экстремума функционала крайне ограничены с математической точки зрения. В этом случае, как правило, применяют приближенные численные алгоритмы поиска квазиопорного управления, которые, как показывают исследования в данной области, дают приемлемые по точности результаты.

## Литература


1. *Понтрягин Л.С.* и др. Математическая теория оптимальных процессов // М.: Наука. 1969. 384 с.
2. *Беллман Р.* Динамическое программирование // М.: ИЛ. 1960. 400 с.
3. *Карманов В.Г.* Математическое программирование // М.: Физматлит. 2000. 276 с.
4. *Измайлов А.Ф. Солодов М.В.* Численные методы оптимизации // М.: Физматлит. 2003. 276 с.
5. *Кочегурова Е.А.* Теория и методы оптимизации. Томский политехнический университет // Томск: изд-во Томского политехнического университета. 2012. 157 с.
6. *Condzio J., Vial J.-P.* Warm Start and Subgradients in a Cutting Plane Scheme for Block-Angular Linear Programs // Computational Optimization and Applications. 1999. vol. 14. no. 1. pp. 17–36.
7. *Reshmin S.A.* Properties of the time-optimal control for Lagrangian single-degree-of-freedom systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 2015. vol. 60. no. 12. pp. 350–355.
8. *Albertitni F., Sontag E.* For Neutral Networks, Functions Determines Form // Neural Networks. 2003. vol. 6. pp. 975–990.
9. *Авдошкин В.В. и др.* Проблемные вопросы использования трасс запусков космических аппаратов и районов падения отделяющихся частей космического назначения: монография // СПб: ВКА имени А.Ф. Можайского. 2016. 372 с.
10. *Микони С.В.* Системный анализ методов многокритериальной оптимизации на конечном множестве альтернатив // Труды СПИИРАН. 2015. Вып. 41. С. 180–199.

11. *Reshmin S.A., Chernousko F.L.* Properties of the time-optimal feedback control for a pendulum-like system // Journal of Optimization Theory and Applications. 2014. vol. 163. no. 1. pp. 230–252.
12. *Иванов В.П.* Оптимизация вырожденного управления динамическими системами методом огибающих // Труды СПИИРАН. 2006. Вып. 3. Том 2. С. 358–365.
13. *Ананьевский И. М., Решмин С. А.* Непрерывное управление механической системой на основе метода декомпозиции // Известия РАН. Теория и системы управления. 2014. № 4. С. 3–17.
14. *Моисеев Н.Н., Иванилов Ю.П., Столярова Е.М.* Методы оптимизации // М.: Наука. 1978. 352 с.
15. *Федоренко Р.П.* Приближенное решение задач оптимального управления // М.: Наука. 1978. 486 с.
16. *Аверкиев Н.Ф., Булекбаев Д.А., Клюшников В.Ю.* Метод минимизации площади рассеивания отделяемых частей ракеты космического назначения // Двойные технологии. 2013. № 640. С. 44–46.
17. *Behncke H.* The Control of Deterministic Episode // Math. Appl.Sci. 1993. vol. 3. pp. 298–311.
18. *Gorelov Yu.N., Manturov A.I., Yurin V.E., Pyrinov N.I.* Generation Of Satellite Attitude Control Programs For Stereo Imaging. Proceedings of the 22nd Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems (ICINS 2015). 2015. pp. 120–122.
19. *Gorelov Yu.N. et al.* On Optimization of Attitude Control Programs For Earth Remote Sensing Satellite // Gyroscopy and Navigation. 2014. vol. 5. no. 2. pp. 90–97.
20. *Босс В.* Лекции по математике. Оптимизация: учебное пособие. Изд 2-е стереотипное // М.: Комкнига. 2007. Т 7. 216 с.
21. *Galkina A.S., Manturov A.I., Pyrinov N.I., Yurin V.E.* Optimal Choice Of Angular Motion Control Program In On-Board Control Systems Of Earth Remote Sensing Satellites // Proceedings of the 19th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems (ICINS 2012). 2012. pp. 291–293.
22. *Богачев С.А. и др.* Основы теории полета летательных аппаратов // СПб: ВКА имени А.Ф. Можайского. 2013. 242 с.
23. *Аверкиев Н.Ф., Жаткин А.Т.* Баллистические основы проектирования ракет-носителей // СПб: ВКА им. А.Ф. Можайского. 2014. 80 с.
24. *Кудин Г.И., Мосин Д.А.* Движение ракеты-носителя на активном участке траектории // СПб: ВКА им. А.Ф.Можайского. 2013. 75 с.
25. *Мосин Д.А., Нечипорович О.П.* Основы моделирования движения ракет-носителей // СПб: ВКА им. А.Ф. Можайского. 2009. 103 с.
26. *Wickwire K.H.* Mathematical models for the control of pest and infectious diseases // Theor. Popul. Biol. 2012. vol. 11. pp. 182–238.

**Аверкиев Николай Федорович** — д-р техн. наук, профессор, профессор кафедры навигационно-баллистического обеспечения применения космических средств и теории полета летательных аппаратов, Военно-космическая академия имени А.Ф. Можайского (ВКА им. А.Ф. Можайского). Область научных интересов: баллистика, теория полета космических аппаратов, оптимальное управление, математическое моделирование. Число научных публикаций — 137. nickolay.averckiev2018@yandex.ru; ул. Ждановская, 13, Санкт-Петербург, 197198; р.т.: +7(812)230-2815, Факс: +7(812)237-1249.

**Власов Сергей Александрович** — к-т техн. наук, доцент, доцент кафедры навигационно-баллистического обеспечения применения космических средств и теории полета летательных аппаратов Военно-космической академии имени А.Ф. Можайского (ВКА имени А.Ф.Можайского). Область научных интересов: баллистика, теория полета космических аппаратов, оптимальное управление, математическое моделирование. Число научных публикаций — 87. vlas.sergei2018@yandex.ru; ул. Ждановская, 13, Санкт-Петербург, 197198; р.т.: +7(812)230-2815, Факс: +7(812)237-1249.

**Кульвиц Алексей Владимирович** — к-т техн. наук, старший преподаватель кафедры навигационно-баллистического обеспечения применения космических средств и теории полета летательных аппаратов, Военно-космическая академия имени А.Ф. Можайского (ВКА им. А.Ф. Можайского). Область научных интересов: баллистика, теория полета космических аппаратов, оптимальное управление, математическое моделирование. Число научных публикаций — 65. larisa.stelmashenko@mail.ru; ул. Ждановская, 13, Санкт-Петербург, 197198; р.т.: +7(812)230-2815, Факс: +7(812)237-1249.

**Силла Евгений Петрович** — к-т воен. наук, ученый секретарь, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Санкт-Петербургского института информатики и автоматизации Российской академии наук (СПИИРАН). Область научных интересов: системный анализ, математическое моделирование. Число научных публикаций — 37. silla.eugeny2017@yandex.ru; 14-я линия В.О., д. 39, Санкт-Петербург, 199178; р.т.: +7(812)328-3337, Факс: +7(812)328-4450.

**DOI** 10.15622/sp.52.5

N.F. Averkiev, S.A. Vlasov, A.V. Kulvits, E.P. Silla

# A METHOD FOR PURPOSEFUL REPLACEMENT OF OPTIMIZABLE FUNCTIONALITY IN THE OPTIMAL CONTROL PROBLEMS

*Averkiev N.F, Vlasov S.A, Kulvits A.V., Silla E.P.* **A Method for Purposeful Replacement of Optimizable Functionality in the Optimal Control Problems.**

**Abstract**: In the paper we propose a method for finding the optimal management of a dynamic system, when restrictions are imposed on the management and phrasal variables at intermediate points of the trajectory. It is assumed that the initial and the final positions of a dynamic system are known, and some reference management is unknown, for which the trajectory satisfies the imposed constraints (at this the dynamic system is moved from the initial position to the final position). The formulated task is reduced to the sequence of individual tasks, whose solution methods are known, and the procedure of this reduction does not lead to the loss of solutions. In the paper the proposed method is called the “method of purposeful replacement of optimizable functionality”.

**Keywords:** optimal management, dynamic system, method of optimization, functionality, trajectory, boundary conditions, restriction.

**Averkiev Nickolay Fedorovich** — Ph.D., Dr. Sci., professor, professor of the navigation and ballistic support of space means applications and the theory of flight of aircraft, Mozhaisky Military Space Academy. Research interests: ballistics, theory of flight spacecraft, optimal control, mathematical modeling. The number of publications — 137. nickolay.averckiev2018@yandex.ru; 13, Zhdanovskaya street, St.-Petersburg, 197198, Russia; office phone: +7(812)230-2815, Fax: +7(812)237-1249.

**Vlasov Sergey Alexandrovich** — Ph.D., associate professor, associate professor of the navigation and ballistic support of space means applications and the theory of flight of aircraft, Mozhaisky Military Space Academy. Research interests: ballistics, theory of flight spacecraft, optimal control, mathematical modeling. The number of publications — 87. vlas.sergei2018@yandex.ru; 13, Zhdanovskaya street, St.-Petersburg, 197198, Russia; office phone: +7(812)230-2815, Fax: +7(812)237-1249.

**Kulvits Alexey Vladimirovich** — Ph.D., senior lecturer of the navigation and ballistic support of space means applications and the theory of flight of aircraft, Mozhaisky Military Space Academy. Research interests: ballistics, theory of flight spacecraft, optimal control, mathematical modeling. The number of publications — 65. larisa.stelmashenko@mail.ru; 13, Zhdanovskaya street, St.-Petersburg, 197198, Russia; office phone: +7(812)230-2815, Fax: +7(812)237-1249.

**Silla Eugene Petrovich** — Ph.D., scientist secretary, St. Petersburg Institute for Informatics and Automation of the Russian Academy of Sciences (SPIIRAS). Research interests: system analysis, mathematical modeling. The number of publications — 37. silla.eugeny2017@yandex.ru; 39, 14-th Line V.O., St. Petersburg, 199178, Russia; office phone: +7(812)328-3337, Fax: +7(812)328-4450.

## References

1. Pontrjagin L.S. et al. *Matematicheskaja teorija optimal'nyh processov* [The mathematical theory of optimal processes]. M.: Nauka. 1969. 384 p. (In Russ.).
2. Bellman R. *Dinamicheskoe programmirovanie* [Dynamic programming]. M.: IL. 1960. 400 p. (In Russ.).
3. Karmanov V.G. *Matematicheskoe programmirovanie* [Mathematical programming]. M.: Fizmatlit. 200 p. (In Russ.).
4. Izmajlov A.F. Solodov M.V. *Chislennye metody optimizacii* [Numerical optimization methods]. M.: Fizmatlit, 2003 p. (In Russ.).

5. Kochegurova E.A. *Teorija i metody optimizacii* [Theory and methods of optimization] Tomsk Polytechnic University. Tomsk: publishing house of Tomsk Polytechnic University. 2012. 157 p. (In Russ.).
6. Condzio J., Vial J.-P. Warm Start and Subgradients in a Cutting Plane Scheme for Block-Angular Linear Programs. *Computational Optimization and Applications*. 1999. vol. 14. no. 1. pp. 17–36.pp. 17–36.
7. Reshmin S. A. Properties of the time-optimal control for Lagrangian single-degree-of-freedom systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2015. vol. 60. no. 12. pp. 350–355.
8. Albertitni F., Sontag E. For Neutral Networks, Functions Determines Form. Neural Networks. 2003. vol. 6. pp. 975–990.
9. Avdoshin V.V. et al. *Problemnye voprosy ispol'zovanija trass zapuskov kosmicheskih apparatov i rajonov padenija otdeljajushhihsja chastej kosmicheskogo naznachenija: monografija* [Problematic issues of the use of the tracks of spacecraft and areas separating from parts for space applications: monograph]. SPb.: GCA named after A.F. Mozhaysky. 2016. 372 p. (In Russ.).
10. Mikoni S.V. [A systematic analysis of methods of multicriteria optimization on a finite set of alternatives]. *Trudy SPIIRAN – SPIIRAS Proceedings*. 2015. vol. 41. pp. 180–199. (In Russ.).
11. Reshmin S. A., Chernousko F. L. [Properties of the time-optimal feedback control for a pendulum-like system]. *Journal of Optimization Theory and Applications*. 2014. vol. 163. no. 1. pp. 230–252.
12. Ivanov V. P. [Dynamic Systems Singular Control Optimization with the Envelop Method]. *Trudy SPIIRAN - SPIIRAS Proceedings*. 2006. vol. 3. Issue 2. pp. 358–365. (In Russ.).
13. Ananievski I. M., Reshmin S. A. [Continuous control of mechanical system based on the decomposition method]. *Izvestija RAN. Teorija i sistemy upravlenija–Izv. of RAS Theory and systems management*. 2014. vol. 4. pp. 3–17. (In Russ.).
14. Moiseev N.N., Ivanilov Ju.P., Stoljarova E.M. *Metody optimizacii* [Optimization methods]. M.: Nauka. 1978. 352 p. (In Russ.).
15. Fedorenko R.P. *Priblizhennoe reshenie zadach optimal'nogo upravlenija* [Approximate solution of optimal control problems]. M.: Nauka. 1978. 486 p. (In Russ.).
16. Averkiev N.F., Bulekbaev D.A., Kljushnikov V.Ju. [Minimizing the square of the dispersion of separable parts of a space rocket]. *Dvojnye tehnologii – Dual technology*. 2013. vol. 640. pp. 44 – 46. (In Russ.).
17. *Behncke H.* The Control of Deterministic Episode. *Math. Appl.Sci*. 1993. vol. 3. pp. 298–311.
18. Gorelov Yu.N., Manturov A.I., Yurin V.E., Pyrinov N.I. Generation Of Satellite Attitude Control Programs For Stereo Imaging. Proceedings of the 22nd Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems (ICINS 2015). 2015. pp. 120–122.
19. Gorelov Yu.N. et al. On Optimization Of Attitude Control Programs For Earth Remote Sensing Satellite. Gyroscopy and Navigation. 2014. vol. 5. no. 2. pp. 90–97.
20. Boss V. *Lekcii po matematike. Optimizacija: uchebnoe posobie. Izd 2-e stereotipnoe* [Lectures on mathematics. Optimization: a tutorial. 2nd edition stereotypical]. M.:Komkniga. 2007. vol. 7. 216 p. (In Russ.).
21. Galkina A.S., Manturov A.I., Pyrinov N.I., Yurin V.E. Optimal Choice Of Angular Motion Control Program In On-Board Control Systems Of Earth Remote Sensing Satellites. Proceedings of the 19th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems (ICINS 2012). 2012. pp. 291–293.
22. Bogachev S A. et al. *Osnovy teorii poleta letatel'nyh apparatov* [Fundamentals of the theory of flight, aircraft]. SPb: GCA named after A.F. Mozhaisky. 2013. 242 p. (In Russ.).
23. Averkiev N.F., Atkin A.T. *Ballisticheskie osnovy proektirovanija raket-nositelej* [Ballistic basics of designing]. SPb: GCA named after A.F. Mozhaisky. 2014. 80 p. (In Russ.).
24. Kudin G.I., Mosin D.A. *Dvizhenie rakety-nositelja na aktivnom uchastke traektorii* [The Movement of the rockets-carriers on the active trajectory]. SPb: GCA named after A.F. Mozhaisky. 2013. 75 p. (In Russ.).
25. Mosin D.A., Nichiporovich O.P. *Osnovy modelirovanija dvizhenija raket-nositelej* [Basics of modeling of the motion of rockets-carriers]. SPb: GCA named after A.F. Mozhaisky. 2009. 103 p. (In Russ.).
26. Wickwire K.H. Mathematical models for the control of pest and infectious diseases. *Theor. Popul. Biol*. 2007. vol. 11. pp.182–238.