

А.А. АБДУЛЛИН, В.Н. ДРОЗДОВ, А.Г. МАМАТОВ
**ВЛИЯНИЕ НУЛЕЙ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ ОБЪЕКТА
НА СВОЙСТВА РЕГУЛЯТОРА**

Абдуллин А.А., Дроздов В.Н., Маматов А.Г. Влияние нулей передаточной функции объекта на свойства регулятора.

Аннотация. Настоящая работа посвящена исследованию влияния нулей передаточной функции на свойства регуляторов состояния. В настоящее время при проектировании регуляторов с использованием алгоритмов модального управления наибольшее внимание уделяется выбору желаемого распределения полюсов объекта управления. При наличии нулей передаточной функции, близких к полюсам, объект управления стремится к вырождению, что проявляется в ослаблении влияния входных управляющих сигналов на выходные сигналы. При расчете регуляторов состояния это приводит к появлению чрезмерно больших коэффициентов регулятора, чувствительных к изменению параметров объекта и снижению параметрической робастности системы управления. Существующие методы анализа математической модели объекта сводятся к количественной оценке характеристик управляемости и наблюдаемости или редукции объекта управления. Перечисленные методы обладают рядом недостатков, таких как зависимость от базиса в пространстве состояний, игнорирование части модели объекта управления. В настоящей работе для проведения анализа свойств математической модели используется инвариантная по отношению к базису характеристика объекта — матрица вырожденности. В результате исследования установлено, что коэффициенты регулятора состояния обратно пропорциональны определителю матрицы вырожденности объекта управления, определитель матрицы вырожденности равен результату полиномов передаточной функции и его величина зависит от расположения нулей передаточной функции. Предложен способ декомпозиции модели объекта управления с использованием вычетов передаточной функции. В результате преобразования полюсов, которые вызывают появление больших коэффициентов регуляторов, выделяются в виде структурной помехи в составе объекта. Проектирование систем управления для подобного представления объекта может быть реализовано с использованием теории робастного управления.

Ключевые слова: нули передаточной функции, модальное управление, регулятор состояния, вырожденность объекта, ганкелева матрица, результат полиномов, вычет функции, мультипликативная неопределенность.

1. Введение. В последние десятилетия применение алгоритмов модального управления в проектировании систем автоматического управления стало общепринятой практикой. Основной проблемой, возникающей при разработке регуляторов состояния, является выбор желаемых собственных чисел замкнутой системы, обеспечивающих требуемые показатели качества функционирования проектируемой системы управления [1-3]. Распространенными методами выбора желаемых собственных чисел являются использование корней стандартных полиномов (Баттерворта, Бесселя, Чебышева) [3-4], определение областей расположения собственных чисел на комплексной плоскости, в зависимости от требуемых показателей качества [3, 5-6], применение

мер модального доминирования [7-8]. Методы теории модального управления позволяют обеспечить любой желаемый набор собственных чисел в замкнутой системе управления, однако использование стандартных методов назначения собственных чисел зачастую приводит к неудовлетворительным свойствам разработанного регулятора, в частности, к высокой чувствительности коэффициентов регулятора к параметрам объекта, что приводит к снижению параметрической робастности системы управления [7, 9]. В связи с этим возникает необходимость предварительного структурного анализа математической модели объекта управления. Было установлено, что зачастую проблема появления чрезмерно больших по модулю коэффициентов регулятора появляется в тех случаях, когда объект управления имеет нули передаточной функции, в частности, при проектировании прецизионных безредукторных электроприводов [10]. Отсюда вытекает необходимость при анализе математической модели объекта управления учитывать не только полюса, но и нули передаточной функции объекта управления.

Проблемы структурного анализа математических моделей при разработке регуляторов состояния рассмотрены в ряде современных исследований. В [7] при назначении желаемых корней характеристического уравнения предлагается руководствоваться вводимыми в работе мерами модального доминирования. В работах [11-15] обсуждается возможность использования количественных мер управляемости и наблюдаемости объектов управления для выбора желаемых собственных чисел замкнутой системы. Предлагаемые количественные меры базируются на использовании каких-либо числовых характеристиках матриц управляемости и наблюдаемости, либо грамианов управляемости и наблюдаемости. В работах [14-15] предлагается реструктуризация и смена базиса математической модели объекта в зависимости от грамианов управляемости и наблюдаемости. Использование мер модального доминирования, а также различных численных характеристик управляемости и наблюдаемости зачастую не обеспечивает положительных результатов по причине их зависимости от выбора базиса в пространстве состояний и игнорировании нулей передаточной функции [10].

Значительное распространение при синтезе регуляторов состояния при условии наличия нулей передаточной функции получила процедура редукции — понижение порядка модели объекта управления [15-17]. Понижение порядка модели объекта управления упрощает процесс разработки регулятора состояния. Однако при синтезе регуляторов состояния на основании редуцированной модели возникает необходимость проведения дополнительных исследований свойств

системы с регулятором пониженного порядка и полной моделью объекта с возможной корректировкой регулятора состояния.

Одним из возможных решений является конструктивная доработка объекта управления, например, посредством увеличения жесткости конструкции. В этом случае можно достичь увеличения расстояния между нулями и полюсами передаточной функции объекта управления. В работах [18-19] рассматриваются методы формирования желаемого спектра передаточных нулей объекта, которые также требуют конструктивной доработки объекта управления на этапе проектирования. Однако на практике такой подход не всегда осуществим.

Инвариантной характеристикой объекта управления по отношению к используемому базису в пространстве состояний является полнота или противоположная к ней вырожденность модели объекта управления [10-11, 20]. В работе [20] исследуется влияние расстояния между полюсами передаточной функции на вырождение модели объекта, однако в этих работах также не рассматривается возможное наличие нулей передаточной функции.

В [10] вводится понятие матрицы вырожденности объекта управления:

$$P_{oc} = P_o P_c, \quad (1)$$

где P_o — матрица наблюдаемости объекта, а P_c — матрица управляемости.

Матрица вырожденности имеет вид ганкелевой матрицы [21-23] и описывает связь между пространствами входных и выходных сигналов объекта управления и инвариантна к выбору базиса пространства состояний объекта управления [10]. В работах [21-22] ганкелева матрица системы используется для идентификации необходимой размерности модели объекта управления, а также для его редукции. Однако не рассматривается ее связь со структурой модели, в частности с наличием нулей.

Настоящая работа посвящена исследованию влияния нулей передаточной функции объекта на свойства регулятора состояния. Устанавливается взаимосвязь определителя матрицы вырожденности и коэффициентов регулятора состояния. Доказывается зависимость определителя матрицы вырожденности от взаимного расположения нулей и полюсов модели объекта. Предлагается способ структурного преобразования (декомпозиции) объекта управления при проектировании регуляторов состояния для объектов с нулями передаточной функции.

Настоящая работа является продолжением исследования проблем управления объектами с нулями передаточной функции, представленного в [10].

2. Связь матрицы вырожденности и коэффициентов регулятора состояния. Рассмотрим математическую модель линейного стационарного объекта с одномерным входом и одномерным выходом (SISO):

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u, \\ y = \mathbf{C}\mathbf{x}. \end{cases} \quad (2)$$

Необходимо спроектировать регулятор состояния, обеспечивающий определенные динамические свойства системе управления объектом (2). При решении поставленной задачи используем принцип разделения процедур расчета модального управления и оценивания координат вектора состояния объекта (2).

Синтез модального регулятора удобнее всего осуществлять в том случае, когда модель объекта управления представлена в канонической управляемой форме [2, 10]:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_c = \mathbf{A}_c\mathbf{x}_c + \mathbf{B}_c u, \\ y = \mathbf{C}_c\mathbf{x}_c. \end{cases} \quad (3)$$

Передаточная функция объекта (2) является дробно-рациональной функцией комплексной переменной:

$$W(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}. \quad (4)$$

Матрицы, характеризующие модель объекта управления в канонической управляемой форме (3) в соответствии с видом передаточной функции (4) выражаются следующим образом:

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_c = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_1 \\ b_{n-1} \end{bmatrix}^T. \quad (5)$$

Представление модели объекта в каноническом управляемом базисе обеспечивает существование алгоритма управления, обеспечивающего любое заданное расположение корней характеристического уравнения замкнутой системы [7, 10]. Закон управления для объекта (2) можно записать следующим образом:

$$u = -\mathbf{K}_c\mathbf{x}_c. \quad (6)$$

Коэффициенты матрицы \mathbf{K}_c в каноническом управляемом базисе вычисляется следующим образом:

$$\mathbf{K}_c = \mathbf{a}_{cg} - \mathbf{a}_c, \quad (7)$$

где \mathbf{a}_{cg} — матрица-строка коэффициентов желаемого характеристического полинома замкнутой системы, а \mathbf{a}_c — матрица-строка коэффициентов характеристического уравнения матрицы \mathbf{A}_c .

Векторы состояния моделей (2) и (3) связаны следующим соотношением через матрицу преобразования базисов:

$$\mathbf{x}_c = \mathbf{M}_c \mathbf{x}, \quad (8)$$

при этом:

$$\mathbf{A}_c = \mathbf{M}_c \mathbf{A} \mathbf{M}_c^{-1}, \mathbf{B}_c = \mathbf{M}_c \mathbf{B}, \mathbf{C}_c = \mathbf{C} \mathbf{M}_c^{-1}. \quad (9)$$

Выразим матрицу преобразования базисов \mathbf{M}_c через матрицы управляемости объекта в разных базисах. Матрица управляемости в базисе (2) имеет следующий вид:

$$\mathbf{P}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{A}\mathbf{B} & \dots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix}.$$

Матрица управляемости в базисе (3) имеет следующий вид:

$$\tilde{\mathbf{P}}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_c & \mathbf{A}_c \mathbf{B}_c & \dots & \mathbf{A}_c^{n-1} \mathbf{B}_c \end{bmatrix}.$$

На основании (9) получаем следующее соотношение:

$$\tilde{\mathbf{P}}_c = \mathbf{M}_c \mathbf{P}_c.$$

Матрицы управляемости известны в обоих базисах, поэтому матрица преобразования базиса к каноническому управляемому виду будет иметь следующий вид:

$$\mathbf{M}_c = \tilde{\mathbf{P}}_c \mathbf{P}_c^{-1}. \quad (10)$$

На основании соотношений (8) и (10) перепишем закон управления (6) в следующем виде:

$$u = -\mathbf{K}_c \tilde{\mathbf{P}}_c \mathbf{P}_c^{-1} \mathbf{x}. \quad (11)$$

В большинстве практических случаев часть координат вектора состояния \mathbf{x} объекта (2) не измеряется напрямую, в связи с чем, возникает необходимость проектирования наблюдающего устройства. Представление модели объекта в каноническом наблюдаемом базисе гарантированно обеспечивает существование алгоритма, осуществляющего оценку вектора состояния объекта. Руководствуясь принципом дуальности Калмана, выберем матрицы канонической наблюдаемой формы следующим образом:

$$\mathbf{A}_o = \mathbf{A}_c^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \mathbf{B}_o = \mathbf{C}_c^T, \mathbf{C}_o = \mathbf{B}_c^T. \quad (12)$$

Математическая модель наблюдателя полной размерности в каноническом наблюдаемом базисе записывается следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_o = \mathbf{A}_o \tilde{\mathbf{x}}_o + \mathbf{B}_o u + \mathbf{L}_o (y - \mathbf{C}_o \tilde{\mathbf{x}}_o), \\ y = \mathbf{C}_o \tilde{\mathbf{x}}_o. \end{cases} \quad (13)$$

В соответствии со структурой матриц \mathbf{A}_o , \mathbf{C}_o матрица входа наблюдателя по ошибке имеет следующий вид:

$$\mathbf{L}_o = \mathbf{a}_{og}^T - \mathbf{a}_o^T,$$

где \mathbf{a}_{og}^T — матрица столбец коэффициентов желаемого характеристического полинома наблюдателя, \mathbf{a}_o^T — матрица столбец коэффициентов характеристического полинома матрицы \mathbf{A}_o .

Построим наблюдатель пониженной размерности (наблюдатель Льюенбергера) для модели объекта управления с матрицами (12).

В соответствии с видом матрицы \mathbf{C}_o представим вектор состояния объекта в каноническом наблюдаемом базисе в следующем виде:

$$\mathbf{x}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ y \end{bmatrix}.$$

где y — измеряемая выходная переменная, а \mathbf{w} — вектор не измеряемых переменных состояния. В связи с этим запишем модель объекта управления в каноническом наблюдаемом базисе в следующем виде:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{w}} = \mathbf{A}_{11}\mathbf{w} + \mathbf{A}_{12}y + \mathbf{B}_1u; \\ \dot{y} = \mathbf{A}_{21}\mathbf{w} + \mathbf{A}_{22}y + \mathbf{B}_2u, \end{cases} \quad (14)$$

где матрицы объекта имеют следующий вид:

$$\mathbf{A}_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{12} = \begin{bmatrix} -a_0 \\ -a_1 \\ \dots \\ -a_{n-2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{21} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}^T,$$

$$\mathbf{A}_{22} = -a_{n-1}, \quad \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} b_0 \\ \dots \\ b_{n-3} \\ b_{n-2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_2 = b_{n-1}.$$

Вектор не измеряемых состояний \mathbf{w} входит в оба уравнения модели (14), что препятствует непосредственной оценке этого вектора. Введем в рассмотрение новый вектор \mathbf{v} согласно следующему соотношению:

$$\mathbf{w} = \mathbf{v} + \mathbf{L}y, \quad (15)$$

где $\mathbf{L} = [l_0 \ \dots \ l_{n-3} \ l_{n-2}]^T$ неизвестная матрица столбец, имеющая $n-1$ строку. Воспользовавшись выражением (15) из двух уравнений (14) получим дифференциальное уравнение относительно не измеряемого вектора \mathbf{v} в следующем виде:

$$\dot{\mathbf{v}} = (\mathbf{A}_{11} - \mathbf{L}\mathbf{A}_{21})\mathbf{v} + (\mathbf{A}_{11}\mathbf{L} + \mathbf{A}_{12} - \mathbf{L}\mathbf{A}_{21}\mathbf{L} - \mathbf{L}\mathbf{A}_{22})y + (\mathbf{B}_1 - \mathbf{L}\mathbf{B}_2)u. \quad (16)$$

Определим оценку $\tilde{\mathbf{v}}$ по значениям y и u согласно выражению:

$$\dot{\tilde{\mathbf{v}}} = (\mathbf{A}_{11} - \mathbf{L}\mathbf{A}_{21})\tilde{\mathbf{v}} + (\mathbf{A}_{11}\mathbf{L} + \mathbf{A}_{12} - \mathbf{L}\mathbf{A}_{21}\mathbf{L} - \mathbf{L}\mathbf{A}_{22})y + (\mathbf{B}_1 - \mathbf{L}\mathbf{B}_2)u. \quad (17)$$

Выполнив вычитание выражения (17) из выражения (16), получим дифференциальное уравнение ошибки оценивания:

$$\dot{\mathbf{v}} - \dot{\tilde{\mathbf{v}}} = (\mathbf{A}_{11} - \mathbf{L}\mathbf{A}_{21})(\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}}).$$

Отсюда следует, что оценка $\tilde{\mathbf{v}}$ стремится к не измеряемому вектору \mathbf{v} в том случае, когда матрица $(\mathbf{A}_{11} - \mathbf{L}\mathbf{A}_{21})$ Гурвицева. Структура указанной матрицы, определяющей динамические свойства наблюдателя в соответствии с выражением (14) имеет следующий вид:

$$(\mathbf{A}_{11} - \mathbf{L}\mathbf{A}_{21}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -l_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -l_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -l_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -l_{n-2} \end{bmatrix},$$

то есть является матрицей, сопровождающей следующий полином:

$$D_o = s^{n-1} + l_{n-2}s^{n-1} + \dots + l_1s + l_0.$$

Выбрав динамические свойства наблюдателя, окончательно определим алгоритм оценивания (17). Оценка вектора $\tilde{\mathbf{x}}_o$ с использованием выхода наблюдателя (17) пониженной размерности будет иметь следующий вид:

$$\tilde{\mathbf{x}}_o = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{w}} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{v}} + \mathbf{L}y \\ y \end{bmatrix}.$$

Таким образом, независимо от типа наблюдателя — полной или пониженной размерности, может быть получена оценка вектора состояния объекта в каноническом наблюдаемом базисе.

Векторы состояния моделей (2) и (12) связаны следующим соотношением:

$$\mathbf{x}_o = \mathbf{M}_o \mathbf{x}, \quad (18)$$

при этом:

$$\mathbf{A}_o = \mathbf{M}_o \mathbf{A} \mathbf{M}_o^{-1}, \quad \mathbf{B}_o = \mathbf{M}_o \mathbf{B}, \quad \mathbf{C}_o = \mathbf{C} \mathbf{M}_o^{-1}. \quad (19)$$

Выразим матрицу преобразования базисов \mathbf{M}_o через матрицы наблюдаемости объекта в разных базисах. Матрица наблюдаемости в базисе (2) имеет следующий вид:

$$\mathbf{P}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^T & (\mathbf{C}\mathbf{A})^T & (\mathbf{C}\mathbf{A}^2)^T & \dots & (\mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1})^T \end{bmatrix}^T.$$

Матрица наблюдаемости в базисе (12) имеет следующий вид:

$$\tilde{\mathbf{P}}_0 = \left[\mathbf{C}_0^T \quad (\mathbf{C}_0 \mathbf{A}_0)^T \quad (\mathbf{C}_0 \mathbf{A}_0^2)^T \quad \dots \quad (\mathbf{C}_0 \mathbf{A}_0^{n-1})^T \right]^T.$$

На основании соотношений (19) имеем:

$$\tilde{\mathbf{P}}_0 = \mathbf{P}_0 \mathbf{M}_0^{-1}.$$

Матрицы наблюдаемости известны в обоих базисах, поэтому матрица преобразования базиса к каноническому наблюдаемому виду определяется следующим выражением:

$$\mathbf{M}_0 = \tilde{\mathbf{P}}_0^{-1} \mathbf{P}_0. \quad (20)$$

Для реализации закона управления (11) используется вектор состояния наблюдателя $\tilde{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{M}_0 \mathbf{x}$ полной или пониженной размерности, откуда находим $\mathbf{x} = \mathbf{M}_0^{-1} \tilde{\mathbf{x}}_0$. Подставив это значение в выражение (11), получим следующее соотношение для закона управления:

$$u = -\mathbf{K}_c \tilde{\mathbf{P}}_c \mathbf{P}_c^{-1} \mathbf{M}_0^{-1} \tilde{\mathbf{x}}_0.$$

В соответствии с выражением (20) последнее выражение преобразуется к следующему виду:

$$u = -\mathbf{K}_c \tilde{\mathbf{P}}_c \mathbf{P}_c^{-1} \mathbf{P}_0^{-1} \tilde{\mathbf{P}}_0 \tilde{\mathbf{x}}_0 \Rightarrow u = -\mathbf{K}_c \tilde{\mathbf{P}}_c (\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_c)^{-1} \tilde{\mathbf{P}}_0 \tilde{\mathbf{x}}_0.$$

С учетом выражения для матрицы вырожденности (1), последнее выражение перепишем в следующем виде:

$$u = -\mathbf{K}_c \tilde{\mathbf{P}}_c (\mathbf{P}_{0c})^{-1} \tilde{\mathbf{P}}_0 \tilde{\mathbf{x}}_0. \quad (21)$$

Согласно выражению (21) при расчете матрицы обратных связей регулятора состояний с наблюдателем требуется обращение матрицы вырожденности \mathbf{P}_{0c} . При стремлении определителя этой матрицы к нулю модули коэффициентов усиления матрицы обратной связи стремятся к бесконечности.

Характеристикой двух полиномов связывающей расстояния между их корнями (для передаточной функции — между нулями и полюсами) является результат полиномов. Результат полиномов передаточной функции равен произведению всех расстояний между ее нулями и полюсами. Докажем равенство определителя матрицы вырожденности и результата полиномов.

3. Связь определителя матрицы вырожденности и результата полиномов передаточной функции. Рассмотрим математическую модель линейного стационарного объекта управления, записанную в форме «вход-выход» с передаточной функцией вида (4) и в форме «вход-состояние-выход» в каноническом управляемом базисе (3).

Матрица вырожденности объекта управления \mathbf{P}_{oc} имеет вид ганкелевой матрицы. Рассчитаем коэффициенты матрицы вырожденности с учетом коэффициентов матриц (5) объекта (3):

$$\mathbf{P}_{oc} = \mathbf{P}_o \mathbf{P}_c = \begin{bmatrix} d_0 & d_1 & d_2 & \dots & d_{n-1} \\ d_1 & d_2 & d_3 & \dots & d_n \\ d_2 & d_3 & d_4 & \dots & d_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n-1} & d_n & d_{n+1} & \dots & d_{2n-2} \end{bmatrix}, \quad (22)$$

$$d_0 = CB = b_1,$$

$$d_1 = CAB = b_2 - b_1 a_1 = b_2 - d_0 a_1,$$

$$d_2 = CA^2 B = b_3 - b_1 a_2 - (b_2 - b_1 a_1) a_1 = b_3 - d_0 a_2 - d_1 a_1, \quad (23)$$

...

$$d_{n-1} = CA^{n-1} B = b_n - d_0 a_{n-1} - d_1 a_{n-2} - \dots - d_{n-2} a_1,$$

$$d_{n+k} = CA^{n+k} B = -d_k a_{n-1} - d_{k+1} a_{n-2} - \dots - d_{k+n-1} a_1, k = 0, 1, \dots, n-2.$$

Результат многочленов составляющих передаточную функцию (4) может быть получен несколькими методами: Сильвестра, Кронекера, Безу [23]. Для доказательства равенства определителя матрицы \mathbf{P}_{oc} результату полиномов передаточной функции (4) рассмотрим метод Сильвестра и метод Кронекера.

Определим результат полиномов $u(s)$ и $y(s)$ по методу Сильвестра.

Составим матрицу из коэффициентов полиномов:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & \dots & a_n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_1 & \dots & \dots & a_{n-1} & a_n & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & & & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & \dots & & & a_{n-1} & a_n \\ 0 & 0 & \dots & \dots & b_1 & b_2 & \dots & \dots & b_{n-1} & b_n \\ 0 & 0 & \dots & b_1 & b_2 & \dots & & \dots & b_n & 0 \\ \vdots & & \ddots & \dots & & & & & & \vdots \\ 0 & b_1 & \dots & \dots & b_n & 0 & \dots & \dots & & 0 \\ b_1 & \dots & \dots & b_n & 0 & \dots & & & & 0 \end{bmatrix}. \quad (24)$$

Количество строк, составленных из коэффициентов полинома $u(s)$, равняется $n-1$, количество строк, составленных из коэффициентов полинома $y(s)$, равняется n , размерность матрицы \mathbf{M} — $(2n-1) \times (2n-1)$.

Результат в форме Сильвестра выражается следующим образом [23]:

$$R(u, y) = (-1)^{n(n-1)/2} \det \mathbf{M}. \quad (25)$$

Обозначим нулевой субрезультант полиномов следующим образом:

$$R^{(0)}(u, y) = \det \mathbf{M}. \quad (26)$$

Нулевой субрезультант равен результату полиномов с точностью до знака.

Определим результат полиномов $u(s)$ и $y(s)$ по методу Кронекера.

Метод Кронекера является терминальным методом вычисления результата и позволяет, используя разреженность матрицы \mathbf{M} , уменьшить размерность матрицы необходимой для вычисления результата до размерности полинома $u(s)$: $n \times n$ [23].

Выполним формальное разложение полиномов передаточной функции (4) в ряд Лорана по отрицательным степеням s :

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{c_0}{s} + \frac{c_1}{s^2} + \dots + \frac{c_j}{s^{j+1}}.$$

Умножим обе части полученного выражения на полином $u(s)$, затем приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях s в ле-

вой и правой частях получившегося равенства. Формулы, выражающие коэффициенты c_j через коэффициенты полиномов следующие:

$$\begin{aligned}
 c_0 &= b_1, \\
 c_1 &= b_2 - c_0 a_1, \\
 c_2 &= b_3 - c_0 a_2 - c_1 a_1, \\
 &\dots \\
 c_{n-1} &= b_n - c_0 a_{n-1} - c_1 a_{n-2} - \dots - c_{n-2} a_1, \\
 c_{n+k} &= -c_k a_{n-1} - c_{k+1} a_{n-2} - \dots - c_{k+n-1} a_1, k = 0, 1, \dots, n-2.
 \end{aligned} \tag{27}$$

Вычислив величины, $c_0, c_1, \dots, c_{2n-2}$ составим из них ганкелеву матрицу:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_{n-1} \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_n \\ c_2 & c_3 & c_4 & \dots & c_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1} & c_n & c_{n+1} & \dots & c_{2n-2} \end{bmatrix}. \tag{28}$$

Обозначим C_1, \dots, C_n ее главные миноры.

Имеет место формула (Кронекер) [22]:

$$R^{(k)} = a_0^{n+m-2k} C_{n-k}. \tag{29}$$

Формула (29) связывает субрезультанты полиномов с главными минорами матрицы (28).

Для нулевого субрезультанта полиномов передаточной функции (4) выражение (29) можно переписать следующим образом:

$$R^{(0)}(u, y) = \det \mathbf{C}. \tag{30}$$

Из выражения (30) следует, что определитель ганкелевой матрицы (28), с учетом выражений (25) и (26), с точностью до знака равняется результату полиномов. В то же время ганкелева матрица (28), с учетом соотношений (23) и (27), идентична матрице вырожденности объекта (22). Таким образом, определитель матрицы вырожденности равен результату полиномов передаточной функции с точностью до знака. Приведем доказательство для утверждения (30).

Рассмотрим произведение двух матриц размерностью $(2n-1) \times (2n-1)$ каждая:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & & & & \\ \vdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\ & \vdots & 0 & c_0 & \dots & c_{n-1} & \\ & 0 & \ddots & c_1 & \dots & c_n & \\ 0 & c_0 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & c_0 & c_1 & \dots & c_n & \dots & c_{2n-1} \\ c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_{n-1} & \dots & c_{2n-2} \end{bmatrix} \cdot$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & a_1 & \ddots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & & & & \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & & & \ddots & \vdots \\ & \vdots & \ddots & 1 & a_1 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ & & & & \ddots & \ddots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ & & & & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & 1 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot$$

Матрица \mathbf{Z} составлена из элементов матрицы \mathbf{C} , матрица \mathbf{X} является верхнетреугольной матрицей, составленной из коэффициентов полинома $u(s)$.

Определим определитель произведения матриц \mathbf{Z} и \mathbf{X} , как произведение определителей:

$$\det(\mathbf{Z} \times \mathbf{X}) = (\det \mathbf{Z}) \cdot (\det \mathbf{X}) = (\det \mathbf{C}) \cdot 1^{2n-1} = \det \mathbf{C}. \quad (31)$$

С другой стороны, выполнив умножение матриц \mathbf{Z} и \mathbf{X} , с учетом соотношений (27), получим матрицу \mathbf{M} (24), использованную в методе Сильвестра, тогда с учетом (26):

$$\det(\mathbf{Z} \times \mathbf{X}) = \det \mathbf{M} = R^{(0)}(u, y). \quad (32)$$

Сопоставляя выражения (31) и (32), получаем соотношение (30).

Аналогичная схема доказательства может быть использована для утверждения (29), для всех субрезультантов полиномов.

Таким образом, чем ближе расположен ноль передаточной функции (4) к какому-либо полюсу, тем меньше определитель матрицы вырожденности и тем больше увеличиваются модули коэффициентов регулятора. Соответственно, наличие нулей близких к полюсам передаточной функции напрямую влияет на величину коэффициентов регулятора, попытка коррекции таких полюсов приводит к повышению параметрической чувствительности объекта управления.

Рассмотрим возможность декомпозиции модели объекта управления для синтеза регулятора состояния при наличии нулей передаточной функции.

4. Декомпозиция объекта управления. Рассмотрим передаточную функцию (4) объекта управления, учитывая, что результат полиномов числителя и знаменателя совпадает с определителем матрицы вырожденности. Рассмотрим наиболее часто встречающийся на практике случай, когда передаточная функция не имеет кратных полюсов. При этом условии дробно-рациональная передаточная функция может быть представлена суммой элементарных дробей:

$$W(s) = \frac{r_1}{s - \alpha_1} + \frac{r_2}{s - \alpha_2} + \dots + \frac{r_n}{s - \alpha_n}, \quad (33)$$

где α_i — полюса передаточной функции (4), в том числе комплексно сопряжённые. Из (33) следует, что числители элементарных дробей могут быть вычислены следующим образом:

$$r_i = \lim_{s \rightarrow \alpha_i} (s - \alpha_i) W(s). \quad (34)$$

Число r_i , вычисляемое согласно (34), называется вычетом функции $W(s)$ в полюсе α_i . Выполнив вычисления согласно (34), получим:

$$r_i = \frac{b_{n-1} \prod_{j=1}^{n-1} (\alpha_i - \beta_j)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-1} (\alpha_i - \alpha_j)},$$

где α_i — полюса передаточной функции $W(s)$, а β_j — нули передаточной функции.

Модуль числителя вычета в полюсе α_i пропорционален произведению расстояний этого полюса от всех нулей передаточной функции, а модуль знаменателя равен произведению расстояний этого полюса от остальных полюсов передаточной функции. Если полюс совпадает с каким-нибудь нулем передаточной функции, то соответствующий вычет равен нулю. Соответственно, чем ближе данный полюс к какому-либо нулю передаточной функции, тем меньше модуль соответствующего вычета. В структурной схеме сумме передаточных функций соответствует параллельное соединение соответствующих структурных элементов. По этой причине вычет в конкретном полюсе есть коэффициент передачи соответствующей ветви структурной схемы. Чем меньше модуль соответствующего вычета, тем меньше вклад соответствующей ветви структурной схемы в перенос энергии с входа объекта на его выход, в то время как попытки изменить данный полюс с использованием регуляторов состояния приводят к появлению чрезмерных по модулю коэффициентов регулятора.

Представим структурную схему объекта (2) с передаточной функцией (4) в виде, показанном на рисунке 1.

В такой интерпретации структурный элемент с передаточной функцией $\Delta(s)$ можно рассматривать как мультипликативную неопределенность для объекта с передаточной функцией $W_o(s)$.

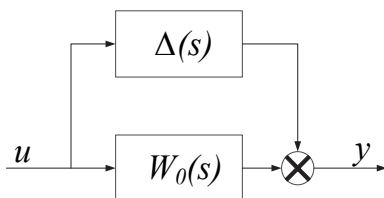


Рис. 1. Декомпозированная структурная схема объекта управления

Обозначим m_Δ сумму модулей вычетов в тех полюсах, которые относятся к передаточной функции $\Delta(s)$, а $m_\Sigma = \sum_{i=1}^n |r_i|$ — сумму модулей всех вычетов ряда (33). Построение $\Delta(s)$ следует осуществлять таким образом, чтобы выполнялось следующее условие:

$$\frac{m_{\Delta}}{m_{\Sigma}} \leq \delta,$$

где число δ характеризует часть потока энергии от входа к выходу, которая оказывает малое влияние на общее поведение объекта при подаче управляющего воздействия. Это число подлежит выбору, исходя из условий функционирования объекта и требований к проектируемой системе управления.

Представление объекта управления в виде, приведенном на рисунке 1, характерно в теории робастного управления. Использование теории робастного управления для проектирования систем управления, в том числе на базе пакета программ MATLAB, рассмотрены в работах [5-6, 24-25]. Следует отметить, что необходимо более детальное исследование возможностей синтеза регуляторов по предложенной схеме представления объекта управления, в том числе с использованием теории робастного управления.

5. Пример. Рассмотрим линейный объект управления с передаточной функцией:

$$W(s) = \frac{s+c}{(s+a)(s+b)}. \quad (35)$$

Вычеты в полюсах объекта (35):

$$r_a = \frac{c-a}{b-a}, r_b = \frac{c-b}{a-b}.$$

Представим объекта управления в трех канонических формах: диагональной, управляемой и наблюдаемой, и составим матрицы управляемости и наблюдаемости для каждой формы представления объекта.

Каноническая диагональная форма:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} r_a \\ r_b \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \quad 1],$$

$$\mathbf{P}_c = \begin{bmatrix} \frac{a-c}{a-b} & \frac{a \cdot (c-a)}{a-b} \\ \frac{c-b}{a-b} & \frac{b \cdot (b-c)}{a-b} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_o = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -a & -b \end{bmatrix}.$$

Каноническая управляемая форма:

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a \cdot b & -(a+b) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_c = [c \quad 1],$$

$$\mathbf{P}_{c1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -a-b \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_{o1} = \begin{bmatrix} c & 1 \\ -a \cdot b & c-b-a \end{bmatrix}.$$

Каноническая наблюдаемая форма:

$$\mathbf{A}_o = \begin{bmatrix} 0 & -a \cdot b \\ 1 & -(a+b) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_o = \begin{bmatrix} c \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_o = [0 \quad 1]$$

$$\mathbf{P}_{c2} = \begin{bmatrix} c & -a \cdot b \\ 1 & c-b-a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_{o2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -a-b \end{bmatrix}.$$

Составим матрицу вырожденности объекта управления, рассчитаем ее определитель, а также результат полиномов передаточной функции:

$$\mathbf{P}_{oc} = \begin{bmatrix} 1 & -(a+b-c) \\ -(a+b-c) & a^2 + a \cdot b - c \cdot a + b^2 - c \cdot b \end{bmatrix},$$

$$\det(\mathbf{P}_{oc}) = (c-b)(a-c), \quad \text{res}(W(s)) = (b-c)(a-c).$$

Несложно убедиться, что матрица вырожденности объекта одинакова во всех рассмотренных базисах. Также, очевидно, что определитель матрицы вырожденности и результат полиномов совпадают с точностью до знака.

Пусть желаемый полином передаточной функции замкнутой системы будет иметь следующий вид:

$$D_g = s^2 + a_1 s + a_2.$$

Предположим, что для объекта спроектирован наблюдатель полной размерности, восстанавливающий переменные состояния объекта.

Коэффициенты регулятора по состояниям наблюдателя рассчитываются в соответствие с (7) и (21):

$$K_U(1) = \frac{a_1 \cdot c + a \cdot b - a \cdot c - b \cdot c - a_2}{(c-b) \cdot (a-c)};$$

$$K_U(2) = \frac{-a_1 \cdot a \cdot c + a_1 \cdot a \cdot b + a_2 \cdot c - a_1 \cdot b \cdot c - a \cdot b^2 - a^2 \cdot b + a^2 \cdot c + b^2 \cdot c + a \cdot b \cdot c}{(c-b) \cdot (a-c)}$$

Из приведенных соотношений следует, что значения коэффициентов регулятора обратно пропорциональны определителю матрицы вырожденности объекта.

Проведем численное моделирование системы с использованием следующих параметров: $a=25$, $b=15$, $a_1=100$, $a_2=2400$, $c=10 \dots 30$.

На рисунке 2 приведена зависимость модуля определителя матрицы вырожденности объекта в зависимости от расположения нуля объекта. На рисунке 3 приведена зависимость модулей коэффициентов передачи по состояниям наблюдателя в зависимости от расположения нуля объекта.

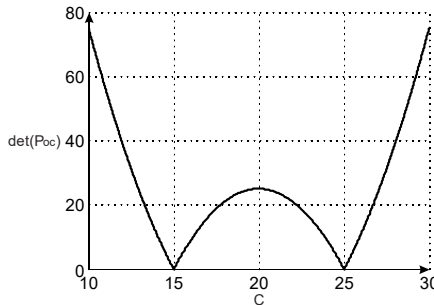


Рис. 2. Модуль определителя матрицы вырожденности

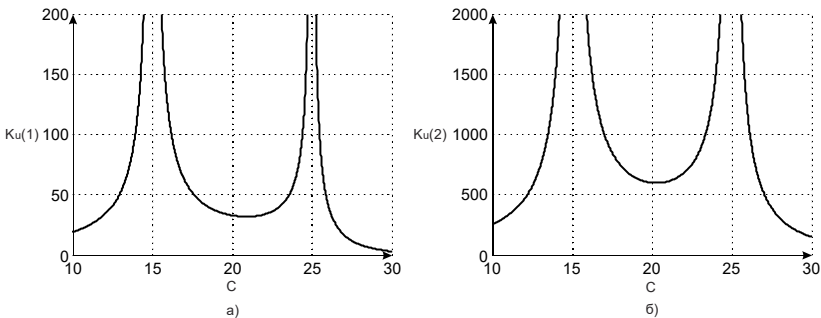


Рис. 3. Модули коэффициентов регулятора: а) - $K_U(1)$; б) - $K_U(2)$

Представленные зависимости наглядно демонстрируют обратную зависимость коэффициентов регулятора от значения определителя матрицы вырожденности.

На рисунке 4 представлены значения модулей вычетов передаточной функции в зависимости от расположения нуля объекта.

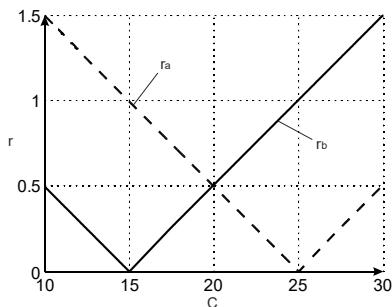


Рис. 4. Вычеты передаточной функции объекта управления

Очевидно, что при приближении нуля к полюсу, значение вычета по этому полюсу уменьшается, то есть уменьшается количество энергии, передаваемое на выход системы по подпространству, соответствующему этому полюсу.

6. Заключение. В результате проведенного исследования было установлено, что нули передаточной функции могут существенно влиять на свойства регуляторов состояния. Коэффициенты регулятора обратно пропорциональны определителю матрицы вырожденности объекта управления. Определитель матрицы вырожденности объекта управления равен произведению расстояний между всеми полюсами и всеми нулями объекта управления — результату полиномов передаточной функции. Соответственно, попытка коррекции полюса, близко расположенного к какому-либо нулю передаточной функции объекта, влечет за собой чрезмерный рост абсолютных значений коэффициентов регулятора. С другой стороны, подобный полюс слабо влияет на связь между пространствами входных и выходных сигналов объекта. В связи с этим полюса, находящиеся вблизи нулей, разумно выделять в виде передаточной функции мультипликативной неопределенности в составе объединенного объекта управления. Выделение подобных полюсов целесообразно осуществлять путем сравнения модулей вычетов передаточной функции во всех полюсах.

Литература

1. Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л. Избранные главы теории автоматического управления с примерами на языке MATLAB // СПб: Наука. 2000. 475 с.
2. Singh K.V., Ouyang H. Pole assignment using state feedback with time delay in friction-induced vibration problems // Acta Mechanica. 2013. vol. 224. no. 3. pp. 645–656.

3. *Chu E.K.* Optimization and pole assignment in control system design // International Journal of Applied Mathematics and Computer Science. 2001. vol. 11. no. 5. pp. 1035–1053.
4. *Abdullin A.A., Drozdov V.N., Plotitsyn A.A.* Modified Design Method of an Optimal Control System for Precision Motor Drive // WSEAS Transactions on Systems and Control. 2014. vol. 9. no. 1. pp. 652–657.
5. *Gazdos, F., Marholt, J.* Optimization of closed-loop poles for robust constrained control // Proceedings of the 2015 20th International Conference on Process Control (PC 2015). 2015. pp. 158–163.
6. *Nurges. U.* Robust pole assignment via reflection coefficients of polynomials // Automatica (Journal of IFAC). 2006. vol. 42. no. 7. pp. 1223–1230.
7. *Балонин Н.А.* Новый курс теории управления движением // СПб.: Изд-во С.-Петербург. ун-та. 2000. 160 с.
8. *Ефимов С.В., Гайворонский С.А., Замятин С.В., Суходоев М.С.* Определение желаемой области расположения доминирующих полюсов замкнутой системы с учетом её нулей // Известия Томского политехнического университета. 2008. Т. 312. № 5. С.57–61.
9. *Anisimov A.A., Kotov D.G., Tararykin S.V., Tyutikov V.V.* Analysis of Parametric Sensitivity and Structural Optimization of Modal Control Systems with State Controllers // Journal of Computer and System Sciences International. 2011. vol. 50. no. 5. pp. 698–719.
10. *Дроздов В.Н., Абдуллин А.А.* Проблемы управления объектами с нулями передаточной функции. // Труды СПИИРАН. 2016. № 1(44). С. 114–132.
11. *Ушаков А.В., Бирюков Д., Дударенко Н.А.* Контроль вырождения динамических объектов и систем: граничный подход // Известия ВУЗов. Приборостроение. 2013. Т. 56. № 4. С. 34–37.
12. *Воронин А.В.* Квалиметрия достижимости и возмущаемости линейных динамических систем // Известия Томского политехнического университета. 2013. Т. 323. № 5. С. 74–78.
13. *Чуканов С.Н.* Количественная оценка управляемости и наблюдаемости сложных динамических сетей // Информатика и системы управления. 2015. №4(46). С. 58–66.
14. *Tararykin, S.V., Anisimov, A.A.* Synthesis of robust control systems with state observers for electromechanical objects based on gramian method // Proceedings of the 9th International Conference on Power Drives Systems (ICPDS 2016). 2016. pp. 1–5.
15. *Rergis C.M., Messina A.R., Betancourt R.J.* Model-order reduction using truncated modal balanced realization // North American Power Symposium (NAPS 2015). 2015. pp. 1–6.
16. *Apolonskii V.V., Tararykin S.V.* Methods for the Synthesis of Reduced State Controllers of Linear Dynamic Systems // Journal of Computer and Systems Sciences International. 2014. vol. 53. no. 6. pp. 799–807.
17. *Романова И.К.* Современные методы редукции нелинейных систем и их применение для формирования моделей движущихся объектов // Вестник МГТУ им. Н.Э.Баумана. Серия «Машиностроение». Спец.выпуск «Специальная робототехника и мехатроника». 2012. С. 122–133.
18. *Kouvaritakis B, MacFarlane A.G.J.* Geometric approach to analysis and synthesis of system zeros. Part 1. Square systems // International Journal of Control. 1976. vol. 23. no. 2. pp. 149–166.
19. *Asanov A.Z., Dem'yanov D.N.* Assigning the set of zeros in control systems with parallel compensation // Journal of Computer and Systems Sciences International. 2013. vol. 52. no. 5. pp. 726–736.
20. *Ушаков А.В., Дударенко Н.А.* Структура собственных векторов матриц состояния многоканальных систем как вырождающий фактор // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2012. Т.12. №5(81). С. 52–57.

21. *Fazel M., Pong T.K., Sun D., Tseng P.* Hankel matrix rank minimization with applications to system identification and realization // *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*. 2013. vol. 34. no. 3. pp. 946–977.
22. *Alavian A., Rotkowitz M.C.* On a hankel-based measure of decentralized controllability and observability // *IFAC-PapersOnLine*. 2015. vol. 28. no. 22. pp 227–232.
23. *Калинина Е.А., Утешев А.Ю.* Теория исключения: Учеб. Пособие // СПб.: Изд-во НИИ химии СПбГУ. 2002. 72 с.
24. Методы робастного, нейро-нечеткого и адаптивного управления: учебник / Под ред. Н.Д. Егупова // М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2001. 744 с.
25. *Dlapa M.* Parametric uncertainties and time delay robust control design toolbox // *IFAC-PapersOnLine*. 2015. vol. 28. no. 14. pp. 296–301.

Абдуллин Артур Александрович — к-т техн. наук, доцент кафедры электротехники и прецизионных электромеханических систем, Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики» (Университет ИТМО). Область научных интересов: системы управления объектами с упругими связями, структурная и параметрическая идентификация. Число научных публикаций — 12. artur.abdullin@gmail.com; Кронверкский проспект, 49, Санкт-Петербург, 197101; п.т.: +79062763010.

Дроздов Валентин Нилович — д-р техн. наук, профессор, профессор кафедры электротехники и прецизионных электромеханических систем, Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики» (Университет ИТМО). Область научных интересов: цифровое управление техническими системами, влияние нулей на регулятор, управление промышленным электроприводом, дискретные системы управления техническими объектами, проблемы управляемости и наблюдаемости. Число научных публикаций — 199. drozdovuprint@rambler.ru; Кронверкский проспект, 49, Санкт-Петербург, 197101; п.т.: +7(921)653-55-84.

Маматов Александр Геннадьевич — аспирант кафедры электротехники и прецизионных электромеханических систем, Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики» (Университет ИТМО), инженер кафедры электротехники и прецизионных электромеханических систем, Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики» (Университет ИТМО). Область научных интересов: системы управления объектами с упругими связями, проблемы управляемости и наблюдаемости, оптимальное управление техническими объектами.. Число научных публикаций — 4. amamatov@corp.ifmo.ru; Кронверкский проспект, 49, Санкт-Петербург, 197101; п.т.: +79516692517.

Поддержка исследований. Работа выполнена при государственной финансовой поддержке ведущих университетов Российской Федерации (субсидия 074-U01).

A.A. ABDULLIN, V.N. DROZDOV, A.G. MAMATOV
**INFLUENCE OF TRANSFER FUNCTION ZEROS ON
 CONTROLLER PARAMETERS**

Drozдов V.N., Abdullin A.A., Mamatov A.G. Influence of Transfer Function Zeros on Controller Parameters.

Abstract. The paper is devoted to the influence of transfer function zeros on state feedback controller parameters. Nowadays, during the modal control system design process, the most attention is paid to the analysis of transfer function poles. If transfer function zeros are located closely to the poles, the control object tends to singularity, when the influence of the input control signals to the output signals becomes weaker. This fact leads to the designing of state-space controllers with extremely high values of control coefficients. Available methods for selecting the desired poles of closed loop systems are represented by the following variants: quantitative evaluation of the controllability and observability of object models and object model reduction. These methods have some disadvantages: dependence on the state-space representation of the control object model, ignoring some parts and characteristics of the control object model. In this paper, to analyze the state feedback controller parameters the invariant of the state-space representation characteristic is used – catalecticant (Hankel) matrix. As a result, it was found that control coefficients of the state feedback controller are inversely proportional to the determinant of the catalecticant matrix of the control object, and the determinant of the catalecticant matrix is equal to the resultant of transfer function polynomials. A method of converting the block diagram of the control object model using the residues of the transfer function was suggested. As a result of the conversion, poles, which cause high values of control coefficients, are isolated as a multiplicative uncertainty in the object model structure. The robust control theory can be used for control system designing with such organization of the control object.

Keywords: zeros of transfer function, modal control, state feedback controller, Hankel matrix, resultant of polynomials, residue, multiplicative uncertainty.

Abdullin Artur Aleksandrovich — Ph.D., associate professor of electrical engineering and precision electromechanical systems department, ITMO University (Saint Petersburg National Research University of Information Technologies, Mechanics and Optics). Research interests: control systems of technical objects with elastic coupling, structural and parametric identification. The number of publications — 12. artur.abdullin@gmail.com; 49, Kronverksky Pr., St. Petersburg, 197101, Russia; office phone: +79062763010.

Drozдов Valentin Nilovich — Ph.D., Dr. Sci., professor, professor of electrical engineering and precision electromechanical systems department, ITMO University (Saint Petersburg National Research University of Information Technologies, Mechanics and Optics). Research interests: discrete control systems of technical objects, controllability and observability problems, discrete control systems of technical objects, controllability and observability problems. The number of publications — 199. drozdovuprint@rambler.ru; 49, Kronverksky Pr., St. Petersburg, 197101, Russia; office phone: +7(921)653-55-84.

Mamatov Aleksandr Gennad'yevich — Ph.D. student of electrical engineering and precision electromechanical systems department, ITMO University (Saint Petersburg National Research University of Information Technologies, Mechanics and Optics), engineer of electrical engineering and precision electromechanical systems department, ITMO University (Saint Peters-

burg National Research University of Information Technologies, Mechanics and Optics). Research interests: control systems of technical objects with elastic coupling, controllability and observability problems. The number of publications — 4. amamatov@corp.ifmo.ru; 49, Kronverksky Pr., St. Petersburg, 197101, Russia; office phone: +79516692517.

Acknowledgements. This research is supported by Government of Russian Federation (Grant 074-U01).

References

1. Andrievskij B.R., Fradkov A.L. *Izbrannye glavy teorii avtomaticheskogo upravlenija s primerami na jazyke MATLAB* [Selected chapters of control theory with examples in MATLAB]. Saint-Petersburg: Nauka. 2000. 475 p. (In Russ.).
2. Singh K.V., Ouyang H. Pole assignment using state feedback with time delay in friction-induced vibration problems. *Acta Mechanica*. 2013. vol. 224. no. 3. pp. 645–656.
3. Chu E.K. Optimization and pole assignment in control system design. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*. 2001. vol. 11. no. 5. pp. 1035–1053.
4. Abdullin A.A., Drozdov V.N., Plotitsyn A.A. Modified Design Method of an Optimal Control System for Precision Motor Drive. *WSEAS Transactions on Systems and Control*. 2014. vol. 9. no. 1. pp. 652–657.
5. Gazdos, F., Marholt, J. Optimization of closed-loop poles for robust constrained control. Proceedings of the 2015 20th International Conference on Process Control (PC 2015). 2015. pp. 158–163.
6. Nurges. U. Robust pole assignment via reflection coefficients of polynomials. *Automatica (Journal of IFAC)*. 2006. vol. 42. no. 7. pp. 1223–1230.
7. Balonin N.A. *Novyj kurs teorii upravlenija dvizheniem* [New course on the theory of motion control]. Saint-Petersburg: Izd-vo S.-Peterb. un-ta. 2000. 160 p. (In Russ.).
8. Efimov S.V., Gayvoronskiy S.A., Zamyatin S.V., Suhodoev M.S. [Determination of the desirable arrangement area of dominating poles of the closed system in view of its zeroes]. *Izvestija Tomskogo politehnicheskogo universiteta – Bulletin of the Tomsk Polytechnic University*. 2008. vol. 312. no. 5. pp. 57–61. (In Russ.).
9. Anisimov A.A., Kotov D.G., Tararykin S.V., Tyutikov V.V. Analysis of Parametric Sensitivity and Structural Optimization of Modal Control Systems with State Controllers. *Journal of Computer and System Sciences International*. 2011. vol. 50. no. 5. pp. 698–719.
10. Drozdov V.N., Abdullin A.A. [Control problems of objects with zeros of the transfer function]. *Trudy SPIIRAN – SPIIRAS Proceedings*. 2016. vol. 1(44). pp. 114–132. (In Russ.).
11. Ushakov A.V., Birjukov D., Dudarenko N.A. [Control over dynamic objects and systems degeneration: gramian approach]. *Izvestija VUZov. Priborostroenie – Journal of Instrument Engineering*. 2013. vol. 56. no. 4. pp. 34–37. (In Russ.).
12. Voronin A.V. [Qualimetry of accessibility and disturbance of linear dynamic systems]. *Izvestija Tomskogo politehnicheskogo universiteta – Proceedings of the Tomsk Polytechnic University*. 2013. vol. 323. no. 5. pp. 74–78. (In Russ.).
13. Chukanov S.N. [Quantitative evaluation of controllability and observability of complicated dynamic networks]. *Informatika i sistemy upravlenija – Information and Control Systems*. 2015. vol. 4(46). pp. 58–66. (In Russ.).
14. Tararykin, S.V., Anisimov, A.A. Synthesis of robust control systems with state observers for electromechanical objects based on gramian method. Proceedings of the 9th International Conference on Power Drives Systems (ICPDS 2016). 2016. pp. 1–5.

15. Rergis C.M., Messina A.R., Betancourt R.J. Model-order reduction using truncated modal balanced realization. North American Power Symposium (NAPS 2015). 2015. pp. 1–6.
16. Apolonskii V.V. and Tararykin S.V. Methods for the Synthesis of Reduced State Controllers of Linear Dynamic Systems. *Journal of Computer and Systems Sciences International*. 2014. vol. 53. no. 6. pp. 799–807.
17. Romanova I.K. [Modern methods of non-linear systems order reduction and their applications for forming models of moving objects]. *Vestnik MGTU im. N.Je. Baumana. Serija «Mashinostroenie. 2012. Spec.vypusk «Special'naja robototekhnika i mehatronika» – Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series «Mechanical Engineering» Special Issue «Special Robotics and Mechatronics»*. 2012. pp. 122–133. (In Russ.).
18. Kouvaritakis B, MacFarlane A.G.J. Geometric approach to analysis and synthesis of system zeros. Part 1. Square systems. *International Journal of Control*. 1976. vol. 23. no. 2. pp. 149–166.
19. Asanov A.Z., Dem'yanov D.N. Assigning the set of zeros in control systems with parallel compensation. *Journal of Computer and Systems Sciences International*. 2013. vol. 52. no. 5. pp. 726–736.
20. Ushakov A.V., Dudarenko N.A. [Eigenvectors structure of state matrices of multi-channel systems as a degenerate factor]. *Nauchno-tehnicheskij vestnik informacionnyh tehnologij, mehaniki i optiki – Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*. 2012. vol. 12. no. 5(81). pp. 52–57.
21. Fazel M., Pong T.K., Sun D., Tseng P. Hankel matrix rank minimization with applications to system identification and realization. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*. 2013. vol. 34. no. 3. pp. 946–977.
22. Alavian A., Rotkowitz M.C. On a hankel-based measure of decentralized controllability and observability. *IFAC-PapersOnLine*. 2015. vol. 28. no. 22. pp 227–232.
23. Kalinina E.A., Uteshev A.Ju. *Teorija isključenja: Ucheb. posobie* [Elimination theory: tutorial]. Saint-Petersburg: Izd-vo NII himii SPbGU. 2002. 72 p. (In Russ.).
24. *Metody robustnogo, nejro-nechetkogo i adaptivnogo upravlenija: Uchebnik. Pod red. N.D. Egupova* [Methods of robust, neuro-fuzzy and adaptive control: textbook. Edited by Egupov N.D.]. Moscow: Izd-vo MGTU im. N.Je. Baumana. 2001. 744 p. (In Russ.).
25. Dlapa M. Parametric uncertainties and time delay robust control design toolbox. *IFAC-PapersOnLine*. 2015. vol. 28. no. 14. pp 296–301.