

А.М. ЖУКОВА

**НАВИГАЦИОННЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ ПЛОСКОГО
ШАРНИРНОГО МНОГОУГОЛЬНИКА**

Жукова А. М. **Навигационный алгоритм для плоского шарнирного многоугольника.**

Аннотация. Улучшены существующие навигационные алгоритмы для плоского шарнирного многоугольника общего вида. Представленный алгоритм строит путь между двумя произвольными конфигурациями шарнирного многоугольника, состоящий из не более чем восьми шагов.

Ключевые слова: полигональный шарнирный механизм, пространство модулей, клеточный комплекс, навигационный алгоритм.

Zhukova A. M. **Navigation Algorithm for a Planar Polygonal Linkage.**

Abstract. An improvement of existing navigation algorithms for a generic polygonal linkage is presented. Our algorithm constructs a path between two arbitrary configurations of a polygonal linkage. This path contains at most eight steps.

Keywords: polygonal linkage, moduli space, cell complex, navigation algorithm.

1. Введение. Конфигурационные пространства шарнирных многоугольников естественным образом возникают в топологии роботостроения и хорошо изучены [1–3]. В данной статье описан навигационный алгоритм для этих пространств. Некоторые подходы к навигации обсуждались в [4–6]. В [7] был построен навигационный алгоритм, работающий за $O(n)$ шагов, где n – число сторон многоугольника.

Результат, представленный в этой статье, является улучшением результата, полученного в [8]. В ней был построен алгоритм с не более чем 17 шагами. Он основан на разбиении пространства модулей шарнирного многоугольника на клетки, построенном в [9], а точнее, на 1-остове этого разбиения. Иными словами, существует некоторый граф Γ , вложенный в пространство модулей шарнирного многоугольника. Путь по пространству модулей выглядит следующим образом: от произвольной конфигурации многоугольника мы достигаем некоторой подходящей вершины графа, затем движемся по ребрам, пока не достигнем подходящей вершины, расположенной недалеко от произвольной финальной конфигурации, переход к которой является последним шагом построения пути. При этом в статье [8] был предложен алгоритм прокладывания пути между двумя произвольными вершинами графа Γ за не более чем 15 переходов по ребрам графа. В данной статье этот результат улучшен за счет использования особых вершин графа Γ , описанных в Утверждении 1. Оказывается, что на границе любой клетки

максимальной размерности найдется по крайней мере одна такая вершина. В данной статье предложен алгоритм, строящий путь между двумя произвольными особыми вершинами.

При этом алгоритм обладает следующими свойствами:

1. Число шагов по графу (т. е. число пройденных ребер) не превосходит шести. Таким образом, этот алгоритм имеет константную длину.
2. Тем не менее нахождение некоторых из этих шести шагов может потребовать линейного времени $O(n)$, где n – число ребер многоугольника.
3. Каждый шаг по ребру графа реализуется с помощью изгибания некоторого выпуклого шарнирного четырехугольника. Отметим, что изгибания четырехугольников уже хорошо изучены [8].
4. Каждый шаг может быть реализован непосредственно механическим способом с помощью добавления нескольких дополнительных ребер, что приводит к шарнирному механизму с одной степенью свободы [8].

В данной статье мы строим только алгоритм навигации по графу Γ . Алгоритмы для непосредственной реализации переходов по ребрам графа в виде изгибания многоугольника на плоскости были построены в [8].

2. Пространства модулей плоских шарнирных многоугольников. Шарнирным n -угольником называется последовательность положительных чисел $L = (l_1, \dots, l_n)$. Ее следует понимать как набор жестких стержней с длинами l_i , соединенных циклически с помощью вращающихся шарниров.

Мы предполагаем, что выполняется условие замыкания: длина каждого стержня меньше суммарной длины остальных стержней.

Конфигурацией шарнирного многоугольника L на плоскости \mathbb{R}^2 называется последовательность точек $R = (p_1, \dots, p_n)$, $p_i \in \mathbb{R}^2$, такая, что $l_i = |p_i, p_{i+1}|$, и $l_n = |p_n, p_1|$.

Определение 1. Множество всех конфигураций, профакторизованное по действию группы изометрий плоскости, сохраняющих ориентацию, называется пространством модулей, или конфигурационным пространством $M(L)$ шарнирного многоугольника L .

Определение 2. Также $M(L)$ можно определить следующим эквивалентным образом:

$$M(L) = \{(u_1, \dots, u_n) \in (S^1)^n : \sum_{i=1}^n l_i u_i = 0\} / SO(2).$$

Из второго определения видно, что $M(L)$ не зависит от порядка длин ребер l_i . Для удобства мы считаем стороны многоугольника упорядоченными по убыванию длин:

$$l_1 \geq l_2 \geq \dots \geq l_n.$$

Если никакая конфигурация L не лежит на одной прямой, то пространство $M(L)$ – гладкое многообразие размерности $n - 3$ [3]. В этом случае говорят, что шарнирный многоугольник имеет *общий вид*. Мы будем рассматривать только шарнирные многоугольники общего вида.

Определение 3. Подмножество $I \subset [n]$ называется длинным, если

$$\sum_{i \in I} l_i > \sum_{i \notin I} l_i.$$

Иными словами

$$\sum_{i \in I} l_i > \frac{|L|}{2},$$

где $|L|$ – периметр многоугольника. Если множество I является в $[n]$ дополнением к длинному, то оно называется коротким.

Для шарнирных многоугольников общего вида любое подмножество ребер является либо длинным, либо коротким.

Определение 4. Разбиение множества $[n]$ называется допустимым, если все его элементы – непустые и короткие подмножества.

Например, для шарнирного пятиугольника $L = (1, 1, 1, 1, 1)$ разбиение $(\{1, 2\} \{4\} \{3, 5\})$ является допустимым, а разбиение $(\{1\} \{2, 3, 4, 5\})$ – нет.

На пространстве $M(L)$ может быть введена структура регулярного клеточного разбиения.

Теорема 1. [9] На конфигурационном пространстве $M(L)$ шарнирного многоугольника L общего вида существует структура регулярного CW-комплекса $\mathcal{K}(L)$. Его полное комбинаторное описание выглядит следующим образом:

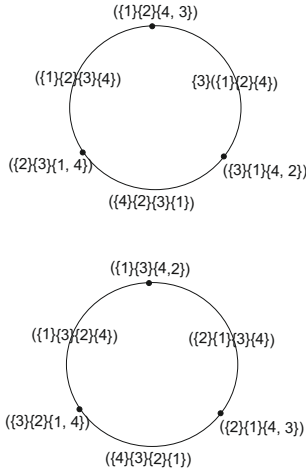


Рис. 1. Клеточное разбиение пространства модулей четырехугольника $(1, 1, 1, 0.5)$

1. k -мерные клетки комплекса $\mathcal{K}(L)$ помечены циклически упорядоченными допустимыми разбиениями множества $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ на $(n - k)$ непустые части.
2. Клетка C лежит на границе другой замкнутой клетки C' в том и только в том случае, если ее метка $\lambda(C)$ получается измельчением метки $\lambda(C')$.

Замечание. Для удобства мы записываем циклически упорядоченное разбиение в виде линейной последовательности множеств, не забывая при этом о циклическом порядке. Еще раз отметим, что в разбиении порядок элементов внутри множеств неважен, однако важен порядок самих этих множеств. Например:

$$(\{1\} \{3\} \{4, 2, 5, 6\}) \neq (\{3\} \{1\} \{4, 2, 5, 6\}) = (\{3\} \{1\} \{2, 4, 5, 6\}).$$

Пример. Пусть $n = 4$, $l_1 = l_2 = l_3 = 1$, $l_4 = 0.5$. Известно [1], что пространство $M(L)$ – объединение двух дизъюнктивных окружностей. Клеточный комплекс $\mathcal{K}(L)$ приведен на рисунке 1.

Нас особенно интересует *вершинно-реберный граф* Γ клеточного комплекса $\mathcal{K}(L)$, то есть его 1-остов, рассмотренный как (комбинатор-

ный) граф. Следующее следствие из Теоремы 1 полностью описывает комбинаторику графа Γ .

Следствие 1. Метки на вершинах графа Γ являются всеми циклическими разбиениями множества $[n]$ на три непустых коротких множества, а метки на ребрах являются всеми циклическими разбиениями множества $[n]$ на четыре непустых коротких множества. Две вершины с метками λ и λ' соединены ребром тогда и только тогда, когда метка λ может быть получена из метки λ' перемещением некоторых элементов из одного множества в другое.

Пример. Вершины с метками

$$(\{1, 2, 5, 6\} \{3, 4\} \{7, 8\}) \text{ и } (\{1, 2\} \{3, 4, 5, 6\} \{7, 8\})$$

соединены ребром, помеченным

$$(\{1, 2\} \{5, 6\} \{3, 4\} \{7, 8\}).$$

Граф Γ можно рассматривать как дискретное приближение пространства модулей. Его вложение в $M(L)$ описано в явном виде в [8].

3. Алгоритм навигации на графе Γ . Общий алгоритм навигации выглядит следующим образом.

Пусть даны две конфигурации плоского шарнирного многоугольника общего вида (без сонаправленных ребер). Точки многообразия $M(L)$, соответствующие этим конфигурациям, находятся внутри некоторых клеток клеточного разбиения $\mathcal{K}(L)$. На границе этих клеток можно найти вершины особого вида, описанные в Утверждении 1. Способ прокладывания путей от произвольных конфигураций до вершин на границе мы не обсуждаем.

В этом разделе построен алгоритм для прокладывания пути между двумя особыми вершинами графа Γ .

3.1. Особые вершины графа Γ

Утверждение 1. В клеточном комплексе $M(L)$ на границе любой клетки α максимальной размерности найдется хотя бы одна вершина α' , такая что:

- 1. В метке вершины α' элементы 1, 2, 3 находятся в разных множествах;*
- 2. Одно из множеств метки вершины α' – одноэлементное (то есть, учитывая пункт 1, является одним из множеств $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$).*

Доказательство. Пусть в метке клетки α элементы 1, 2, 3 расположены по возрастанию по часовой стрелке (другой случай рассматривается аналогично). Метка имеет вид $(\{1\} a \{2\} b \{3\} c)$, где a, b, c – некоторые последовательности одноэлементных множеств. Рассмотрим два возможных случая:

1. $\{1, c\}$ и $\{2, b\}$ – короткие множества. Пусть a' – некоторое (возможно, пустое) максимальное по включению подмножество множества a такое, что множество $\{1, c, a'\}$ – короткое. Тогда либо $a = a'$, либо для любого $i \in a'' = a \setminus a'$ множество $\{1, c, a', i\}$ – длинное, а значит, множество $\{1, c, a', 3\}$ – тоже длинное. В обоих случаях $\{2, b, a''\}$ – короткое. Значит, следующее разбиение является допустимым:

$$(\{1, c, a'\} \{2, b, a''\} \{3\}).$$

2. Одно из множеств $\{1, c\}$ и $\{2, b\}$ – длинное (оба одновременно быть длинными не могут, т. к. их сумма должна быть меньше периметра многоугольника). Пусть это будет множество $\{1, c\}$. Тогда рассмотрим два случая:

- (a) $\{1, a\}$ – короткое. Кроме того, $\{3, b\}$ – тоже короткое, поскольку $\{1, c\}$ – длинное. Повторяя рассуждения из первого пункта, получаем подходящее допустимое разбиение:

$$(\{1, a, c'\} \{2\} \{3, b, c''\}).$$

- (b) $\{1, a\}$ – длинное. Тогда $\{3, b, c\}$ – короткое. Кроме того, $\{2, a\}$ – короткое, поскольку $\{1, c\}$ – длинное. Значит, следующее разбиение является допустимым:

$$(\{1\} \{2, a\} \{3, b, c\}).$$

Мы построим путь по ребрам графа Γ между двумя произвольными вершинами, подходящими под условия Утверждения 1. Каждый шаг пути – это переход по одному ребру графа.

Для пары $i, j \in \{1, 2, 3\}$ обозначим через i_j множество тех элементов, которые в метке первой вершины находятся в одном множестве с элементом i , а в метке второй вершины – в одном множестве с элементом j . При этом мы не включаем i в множество i_i .

В течение путей мы будем иногда разбивать такие множества, например, мы представим $2_3 = 2'_3 \cup 2''_3$ и перенесем $2'_3$ в другое подмножество метки. При этом каждый раз переносимое множество i'_j является некоторым (возможно, пустым) максимальным по включению множеством, которое можно перенести (так, чтобы разбиение оставалось допустимым).

3.2 Алгоритм построения пути, не меняющего ориентацию старшей тройки ребер

Пусть в начальной и конечной вершине искомого пути элементы 1, 2 и 3 идут в одном и том же циклическом порядке. Пусть они расположены по возрастанию по часовой стрелке (второй случай обрабатывается аналогично). Рассмотрим два возможных случая.

- Одноэлементное множество в метках обеих вершин одно и то же. Пусть оно будет $\{1\}$ (остальные случаи обрабатываются аналогично). Тогда метка первой вершины выглядит так:

$$(\{1\} \{2, 2_2, 2_3\} \{3, 3_2, 3_3\}).$$

Путь между вершинами строится следующим образом:

1. Вторая вершина пути:

$$(\{1, 2'_3\} \{2, 2_2, 2''_3\} \{3, 3_2, 3_3\}).$$

2. Имеем либо для любого $i \in 2''_3$ $\{1, 2'_3, i\}$ – длинное, а значит, либо $\{1, 2'_3, 3\}$ – длинное, либо $2''_3 = \emptyset$. В обоих случаях множество $\{2_2, 2''_3, 3_2\}$ – короткое. Третья вершина пути:

$$(\{1, 2'_3\} \{2, 2_2, 2''_3, 3_2\} \{3, 3_3\}).$$

3. Множество $\{3, 3_3, 2''_3\}$ – короткое, так как оно – подмножество одного из множеств финальной метки. Четвертая вершина пути:

$$(\{1, 2'_3\} \{2, 2_2, 3_2\} \{3, 3_3, 2''_3\}).$$

4. Пятая, конечная вершина пути:

$$(\{1\} \{2, 2_2, 3_2\} \{3, 3_3, 2_3\}).$$

- Одноэлементные множества клеток различны. Пусть в первой вершине это $\{1\}$, а во второй – $\{2\}$ (остальные случаи обрабатываются аналогично). Тогда метка первой вершины выглядит так:

$$(\{1\} \{2, 2_1, 2_3\} \{3, 3_1, 3_3\}).$$

Путь между вершинами строится следующим образом:

1. Вторая вершина пути:

$$(\{1, 3_1\} \{2, 2_1, 2_3\} \{3, 3_3\}).$$

2. Третья вершина пути:

$$(\{1, 3_1\} \{2, 2_1\} \{3, 3_3, 2_3\}).$$

3. Четвертая, конечная вершина пути:

$$(\{1, 2_1, 3_1\} \{2\} \{3_3, 2_3\}).$$

Таким образом, путь, не меняющий ориентации тройки $(1, 2, 3)$, требует не больше четырех переходов по ребрам графа.

3.3 Алгоритм построения пути, меняющего ориентацию старшей тройки ребер

Пусть в начальной и конечной вершине искомого пути элементы 1, 2 и 3 идут в различном циклическом порядке. Для определенности пусть в первой вершине они идут по возрастанию по часовой стрелке. Известно [1], что эти вершины находятся в одной компоненте связности пространства $M(L)$ тогда и только тогда, когда множество $\{2, 3\}$ – короткое. Если оно является длинным, путей между этими вершинами нет. Пусть оно короткое.

Возможны четыре различных случая.

- Одноэлементные множества этих вершин совпадают и не равны $\{1\}$. Пусть эти множества равны $\{2\}$ (второй случай рассматривается аналогично). Тогда метка первой вершины выглядит так:

$$(\{1, 1_1, 1_3\} \{2\} \{3, 3_1, 3_3\}).$$

Путь между вершинами строится следующим образом:

1. Вторая вершина пути:

$$(\{1, 1_1, 1_3, 3'_1, 3'_3\} \{2\} \{3, 3''_1, 3''_3\}).$$

2. Заметим, что $\{3''_1, 3''_3\} \neq \emptyset$, так как иначе первое множество было бы длинным. Третья вершина пути:

$$(\{1, 1_1, 1_3, 3'_1, 3'_3\} \{2, 3\} \{3''_1, 3''_3\}).$$

3. Для любого $i \in \{3''_1, 3''_3\}$ имеем $\{1, 1_1, 1_3, 3'_1, 3'_3, i\}$ – длинное, следовательно, и $\{1, 1_1, 1_3, 3'_1, 3'_3, 3\}$ – тоже длинное, а значит, $\{2, 3''_1, 3''_3\}$ – короткое. Четвертая вершина пути:

$$(\{1, 1_1, 1_3, 3'_1, 3'_3\} \{3\} \{2, 3''_1, 3''_3\}).$$

4. Пятая вершина пути:

$$(\{1, 1_1, 3'_1\} \{3, 1_3, 3'_3\} \{2, 3''_1, 3''_3\}).$$

5. Шестая вершина пути:

$$(\{1, 1_1, 3'_1\} \{3, 1_3, 3_3\} \{2, 3''_1\}).$$

6. Седьмая, конечная вершина пути:

$$(\{1, 1_1, 3_1\} \{3, 1_3, 3_3\} \{2\}).$$

- Одноэлементные множества этих вершин различны и не равны $\{1\}$. Пусть у первой вершины одноэлементное множество – $\{2\}$ (второй случай – обрабатывается обращением аналогичного пути для другой ориентации старшей тройки ребер). Тогда метка первой вершины выглядит так:

$$(\{1, 1_1, 1_2\} \{2\} \{3, 3_1, 3_2\}).$$

Путь между вершинами строится следующим образом:

1. Вторая вершина пути:

$$(\{1, 1_1, 1_2, 3'_1, 3'_2\} \{2\} \{3, 3''_1, 3''_2\}).$$

2. Заметим, что $\{3'_1, 3''_2\} \neq \emptyset$, так как иначе первое множество было бы длинным. Третья вершина пути:

$$(\{1, 1_1, 1_2, 3'_1, 3'_2\} \{2, 3\} \{3''_1, 3''_2\}).$$

3. Для любого $i \in \{3''_1, 3''_2\}$ имеем $\{1, 1_1, 1_3, 3'_1, 3'_2, i\}$ – длинное, следовательно, и $\{1, 1_1, 1_3, 3'_1, 3'_2, 3\}$ – тоже длинное, а значит, $\{2, 3''_1, 3''_2\}$ – короткое. Четвертая вершина пути:

$$(\{1, 1_1, 1_2, 3'_1, 3'_2\} \{3\} \{3''_1, 3''_2, 2\}).$$

4. Поскольку $l_3 \leq l_2$, множество $\{3, 1_2, 3'_2\}$ не превосходит $\{2, 1_2, 3'_2\}$, а значит, является коротким. Пятая вершина пути:

$$(\{1, 1_1, 3'_1\} \{3, 1_2, 3'_2\} \{2, 3''_1, 3''_2\}).$$

5. Шестая вершина пути:

$$(\{1, 1_1, 3_1\} \{3, 1_2, 3'_2\} \{2, 3''_2\}).$$

6. Седьмая, конечная вершина пути:

$$(\{1, 1_1, 3_1\} \{3\} \{2, 1_2, 3_2\}).$$

- Одноэлементные множества вершин различны, и ровно одно из них – $\{1\}$. Пусть оно будет во второй вершине, а одноэлементное множество первой вершины будет $\{2\}$ (второй случай обрабатывается обращением аналогичного пути для другой ориентации старшей тройки ребер). Тогда метка первой вершины выглядит так:

$$(\{1, 1_2, 1_3\} \{2\} \{3, 3_2, 3_3\}).$$

Путь между вершинами строится следующим образом:

1. Вторая вершина пути:

$$(\{1, 1_2, 1_3, 3'_2, 3'_3\} \{2\} \{3, 3''_2, 3''_3\}).$$

2. Заметим, что $\{3''_2, 3''_3\} \neq \emptyset$, так как иначе $\{1, 1_2, 2_3, 3'_2, 3'_3\}$ было бы длинным. Третья вершина пути:

$$(\{1, 1_2, 2_3, 3'_2, 3'_3\} \{2, 3\} \{3''_2, 3''_3\}).$$

3. Для любого $i \in \{3'_1, 3''_2\}$ имеем $\{1, 1_2, 1_3, 3'_1, 3'_2, i\}$ – длинное, следовательно, и $\{1, 1_2, 1_3, 3'_1, 3'_2, 3\}$ – тоже длинное, а значит, $\{2, 3''_1, 3''_2\}$ – короткое. Четвертая вершина пути:

$$(\{1, 1_2, 1_3, 3'_1, 3'_2\} \{3\} \{2, 3''_2, 3''_3\}).$$

4. Пятая вершина пути:

$$(\{1, 1_2, 1_3, 3'_1, 3'_2\} \{3, 3''_3\} \{2, 3''_2\}).$$

5. Шестая вершина пути:

$$(\{1, 1_3, 3'_1\} \{3, 3''_3\} \{2, 1_2, 3_2\}).$$

6. Седьмая, конечная вершина пути:

$$(\{1\} \{3, 1_3, 3_3\} \{2, 1_2, 3_2\}).$$

- Одноэлементные множества обеих вершин равны $\{1\}$ Тогда метка первой вершины выглядит так:

$$(\{1\} \{2, 2_2, 2_3\} \{3, 3_2, 3_3\}).$$

Рассмотрим два случая:

1'. Множество $\{1, 3_2, 3_3\}$ – короткое. Тогда вторая вершина пути:

$$(\{1, 3_2, 3_3\} \{2, 2_2, 2_3\} \{3\}).$$

2'. Множество $\{2_2, 2_3\} \neq \emptyset$, поскольку иначе $\{1, 3_2, 3_3\}$ было бы длинным. Третья вершина пути:

$$(\{1, 3_2, 3_3\} \{2_2, 2_3\} \{3, 2\}).$$

3'. Поскольку $\{2, 2_2, 2_3\}$ – короткое, то $\{3, 2_2, 2_3\}$ – тоже короткое. Четвертая вершина пути:

$$(\{1, 3_2, 3_3\} \{3, 2_2, 2_3\} \{2\}).$$

4'. Пятая вершина пути:

$$(\{1, 3_3\} \{3, 2_2, 2_3\} \{2, 3_2\}).$$

5'. Шестая вершина пути:

$$(\{1, 3_3\} \{3, 2_3\} \{2, 2_2, 3_2\}).$$

6'. Седьмая, конечная вершина пути:

$$(\{1\} \{3, 2_3, 3_3\} \{2, 2_2, 3_2\}).$$

1". Множество $\{1, 3_2, 3_3\}$ – длинное. Значит, $\{2, 3, 2_2, 2_3\}$ – короткое. Вторая вершина пути:

$$(\{1\} \{2, 3, 2_2, 2_3\} \{3_2, 3_3\}).$$

2". Третья вершина пути:

$$(\{1, 3'_3\} \{2, 3, 2_2, 2_3\} \{3_2, 3''_3\}).$$

3". Либо $3''_3 = \emptyset$, либо для $i \in 3''_3$ множество $\{1, 3'_3, i\}$ – длинное, а значит, $\{1, 3'_3, 3\}$ – тоже длинное. В обоих случаях множество $\{2, 2_2, 3_2, 3''_3\}$ – короткое. Пятая вершина пути:

$$(\{1, 3'_3\} \{3, 2_3\} \{2, 2_2, 3_2, 3''_3\}).$$

4". Шестая вершина пути:

$$(\{1\} \{3, 2_3, 3'_3\} \{2, 2_2, 3_2, 3''_3\}).$$

5". Седьмая, конечная вершина пути:

$$(\{1\} \{3, 2_3, 3_3\} \{2, 2_2, 3_2\}).$$

Таким образом, путь, меняющий ориентацию тройки $(1, 2, 3)$, требует не больше шести переходов по ребрам графа.

4. Заключение. Граф Γ является комбинаторным приближением пространства модулей $M(L)$ шарнирного многоугольника L . Предлагаемый алгоритм строит путь между двумя произвольными вершинами графа Γ , подходящими под условия Теоремы 1. Путь состоит из не более чем четырех шагов в случае, когда ориентации старшей тройки ребер в конфигурациях, определяемых этими вершинами, одинаковы, и из не более чем шести шагов в случае, когда ориентации старшей тройки ребер в этих конфигурациях различны.

Литература

1. Farber M., Schuetz D. Homology of planar polygon spaces // *Geom. Dedicata*. 2007. no. 125. pp. 75–92.
2. Farber M., Hausmann J.-C., Schuetz D. On the conjecture of Kevin Walker // *Journal of Topology and Analysis*. 2009. no. 1. pp. 65–86.
3. Kapovich M. and Millson J. On the moduli space of polygons in the Euclidean plane // *J. Diff. Geom.* 1995. no. 42. pp. 430–464.
4. Aichholzer O., Demaine E. D., Erickson J., Hurtado F., Overmars M., Soss M., Toussaint G. Reconfiguring convex polygons // *Computational Geometry*. 2001. no. 20. pp. 85–95.
5. Hausmann J.-C. Controle des bras articulés et transformations de Mobius // *L'Enseignement Mathématique*. 2005. no. 51 pp. 87–115.
6. Khimshiashvili G., Panina G., Siersma D. Coulomb control of polygonal linkages // *J. of Dynamical and Control Systems*. 2014. vol. 4. no. 20. pp. 491–501.
7. Lenhart W. J., Whitesides S. H. Reconfiguring closed polygonal chains in Euclidean d -space // *Discrete and Computational Geometry*. 1995. vol. 1. no. 13. pp. 123–140.
8. Panina G., Siersma D. Motion planning and control of a planar polygonal linkage // arXiv:1401.7860. to appear in *J. Symb. Comp.*
9. Panina G. Moduli space of planar polygonal linkage: a combinatorial description // arXiv:1209.3241.

References

1. Farber M., Schuetz D. Homology of planar polygon spaces. *Geom. Dedicata*. 2007. no. 125. pp. 75–92.
2. Farber M., Hausmann J.-C., Schuetz D. On the conjecture of Kevin Walker. *Journal of Topology and Analysis*. 2009. no. 1. pp. 65–86.
3. Kapovich M. and Millson J. On the moduli space of polygons in the Euclidean plane. *J. Diff. Geom.* 1995. no. 42. pp. 430–464.
4. Aichholzer O. et al. Reconfiguring convex polygons. *Computational Geometry*. 2001. no. 20. pp. 85–95.
5. Hausmann J.-C. Controle des bras articulés et transformations de Mobius. *L'Enseignement Mathématique*. 2005. no. 51. pp. 87–115.
6. Khimshiashvili G., Panina G., Siersma D. Coulomb control of polygonal linkages. *J. of Dynamical and Control Systems*. 2014. vol. 4. no. 20. pp. 491–501.
7. Lenhart W. J., Whitesides S. H. Reconfiguring closed polygonal chains in Euclidean d -space. *Discrete and Computational Geometry*. 1995. vol. 1. no. 13. pp. 123–140.

8. Panina G., Siersma D. Motion planning and control of a planar polygonal linkage. arXiv:1401.7860. to appear in *J. Symb. Comp.*
9. Panina G. Moduli space of planar polygonal linkage: a combinatorial description. arXiv:1209.3241.

Жукова Алена Михайловна – к.ф.-м.н., старший преподаватель кафедры проблем конвергенции естественных и гуманитарных наук факультета свободных искусств и наук, Санкт-Петербургский государственный университет (СПбГУ). Область научных интересов: шарнирные механизмы, теория Морса, пространства модулей, комбинаторная геометрия. Число научных публикаций – 7. a.zhukova@spbu.ru; Университетская наб. д. 7/9, Санкт-Петербург, 199034; р.т.: 8-931-239-59-13.

Zhukova Alena Mikhailovna – Ph.D., senior lecturer of the problems of convergence in natural sciences and humanities department of liberal arts and sciences faculty, Saint Petersburg State University (SPbSU). Research interests: linkages, Morse theory, moduli spaces, combinatorial geometry. The number of publications – 7. a.zhukova@spbu.ru; 7/9, Universitetskaya nab., Saint-Petersburg, 199034, Russia; office phone: 8-931-239-59-13.

Поддержка исследований. Работа осуществлена при частичной финансовой поддержке конкурса "Молодая математика России". Автор благодарна Г. Ю. Паниной за постановку задачи.

Acknowledgements. The work is partly supported by the contest «Young Russian Mathematics», the author is thankful to G. Yu. Panina for formulating the problem.

РЕФЕРАТ

Жукова А. М. Навигационный алгоритм для плоского шарнирного многоугольника.

Мы работаем с конфигурациями плоских шарнирных многоугольников. Такой многоугольник лежит на плоскости и может двигаться на ней, изменяя углы между своими сторонами. При этом разрешены самопересечения и самонакрытия. Пространство конфигураций такого многоугольника, профакторизованное по действию группы движений плоскости, сохраняющих ориентацию, называется *пространством модулей*, или *конфигурационным пространством шарнирного многоугольника*.

Несмотря на то, что число степеней свободы растет с увеличением ребер шарнирного многоугольника, управление его движениями оказывается нетривиальной задачей, так как растет и топологическая сложность его конфигурационного пространства.

В статье предложен быстрый алгоритм, строящий путь между двумя произвольными конфигурациями шарнирного многоугольника общего вида. Полученный путь содержит не более восьми шагов. Этот результат является улучшением результатов Г. Паниной и Д. Сирсмы (семнадцать шагов алгоритма в худшем случае). Мы используем вершинно-реберный граф Γ клеточного разбиения конфигурационного пространства, введенного Г. Паниной. Реализация переходов по ребрам этого графа равносильна изгибаниям на плоскости некоторых шарнирных четырехугольников, решение этой задачи построили Г. Панина и Д. Сирсма. Мы выбираем особые вершины этого графа и доказываем, что на границе произвольной клетки разбиения максимальной размерности найдется такая особая вершина. В статье мы конструируем путь по ребрам этого графа между двумя произвольными особыми вершинами за не более чем шесть переходов. Еще два шага нужны для соединения точек, соответствующих произвольным конфигурациям с этими особыми вершинами, что выходит за пределы данной статьи.

SUMMARY

Zhukova A. M. **Navigation Algorithm for a Planar Polygonal Linkage.**

We work with configurations of polygonal linkages. A polygonal linkage can be considered as a polygon in the plane that can bend by changing its angles. Self-intersections and self-overlappings of the edges and vertices of the polygon are allowed. The space of all possible configurations of such a polygon factorized by the action of orientation-preserving isometries is called the moduli space or the configuration space of a polygonal linkage.

Although the number of the degrees of freedom increases with the number of edges of a polygon, the navigation problem is not a simple one, since the topological complexity of its moduli space increases as well.

We present a fast algorithm that constructs a path between two arbitrary configurations of a generic polygonal linkage. The constructed path consists of at most eight steps. This result is an improvement of the earlier results of G. Panina and D. Siersma (seventeen steps in the worst case).

We use the vertex-edge graph Γ of a cellular complex on the configuration space, introduced by G. Panina. The mechanical realisation of the move along an edge of this graph is a bending of some quadrilateral linkage. The algorithm for this realisation was constructed by G. Panina and D. Siersma. In our algorithm we use a special kind of the vertices of Γ . We prove that there is at least one vertex of such kind on the boundary of every cell of maximal dimension. We give the construction of a path between two vertices of this special kind along the edges of Γ that contains at most six edges. Two more steps are needed to connect two points on the moduli space, that correspond to two arbitrary configurations, with two special vertices, which goes beyond the scope of this paper.