УДК 519.72

А.А. Мусаев, Ю.П. Сердюков

СООТНОШЕНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ СИГНАЛОВ КАК КРИТЕРИЙ ОЦЕНКИ ФИЗИЧЕСКОЙ СКОРОСТИ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

Мусаев А.А., Сердюков Ю.П. **Соотношение неопределенности сигналов как критерий оценки физической скорости передачи информации.**

Аннотация. Получено более детальное представление формулы Шеннона для определения пропускной способности канала связи. В модифицированном виде в нем учитывается параметры сигнала, как во временном, так и частотном диапазоне.

Предложена и описана новая методика расчета соотношения неопределенности для сигналов. Приведены примеры расчетов соотношения неопределенности для различных классов сигналов с использованием энергетического метода, метода моментов и с применением предложенного подхода.

Ключевые слова: потенциальная пропускная способность канала связи, формула Шеннона, физическая пропускная способность канала связи, оптимальные сигналы, соотношение неопределенности, метод моментов, энергетический метод, весовые функции.

Musaev A.A., Serdyukov Yu.P. **The Uncertainty Relation Between the Signals as a Criterion for Evaluation of the Physical Data Rate.**

Abstract. More detailed representation of Shannon's formula for determining the channel capacity is developed. In a modified form it takes into account the parameters of the signal in both time and frequency range. Proposed and described a new method of calculating the uncertainty relation for the signals. Examples of calculations of the uncertainty relation for different classes of signals using existing methods and proposed approach are presented.

Keywords: potential channel capacity, Shannon formula, the physical bandwidth of the communication channel, the best signals, uncertainty relation, the method of moments, the energy method, weighting functions.

1. Введение. В представленной работе рассмотрен один из аспектов проблемы повышения скорости передачи информации, как для импульсно-модулированных сигналов, что характерно для каналов связи непрерывного типа, так и для каналов связи дискретного типа, где информация представлена в цифровом виде [1]. Связано это с необходимостью использования при передаче информации сигналов, *наилучшим образом согласованных с характеристиками канала связи*. Основополагающую роль при этом играет соотношение неопределенности.

В качестве отправной точки проводимого в данной работе исследования используется определение потенциальной пропускной способности канала связи C, данное Шенноном и имеющее вид [1, 2]:

$$C = \max_{\{A\}} \frac{I_T}{T} = \max_{\{A\}} \left[H(\lambda) - H_y(\lambda) \right], \quad (1)$$

где $\{A\}$ — множество возможных методов передачи и приема. При заданных свойствах канала связи по нему может быть передано I_T — количество информации, получаемое за время T; $H(\lambda)$ — априорная энтропия передаваемого сообщения λ за единицу времени; $H_y(\lambda)$ — средняя апостериорная энтропия в единицу времени.

Предположим, что выполняются следующие два условия:

— помеха в канале связи представляет собой белый шум с нормальным законом распределения и спектральной плотностью N_0^2 со средней мощностью P_n пропорциональной полосе пропускания канала связи Δf, т.е.:

$$P_n = N_0^2 \Delta f,$$

— средняя мощность сигнала P_s фиксирована, причем сигнал и шум статистически независимы и взаимодействуют аддитивно, пропускная способность канала связи с шириной полосы пропускания Δf отвечает выражению:

$$C = \Delta f \, log_2 \left[1 + \left(\frac{P_s}{P_n} \right)_{inp} \right]. \tag{2}$$

2. Представление формулы Шеннона к виду, учитывающему характеристики канала связи и передаваемых по нему сигналов. Представим выражение (2) с учетом характеристик сигнала носителя, используя результаты, полученные в [3]. Воспользуемся таким параметром как число степеней свободы сигнала M на один отсчет (импульс) [3]. Он определяется длительностью самого сигнала Δt_s и шириной его полосы Δf_s. С учетом того факта, что передача информации по каналам связи осуществляется с использованием сигналов конечной длительности, то очевидно, что спектр сигнала не является конечной величиной. При этом время передачи одного отсчета (импульса) ограничено и не может быть больше чем время его корреляции τ_s, т.е.:

$$\Delta t_s \le \tau_s \approx 1/2\Delta f_{es} ,$$

где Δf_{es} — эффективная ширина полосы частот спектра сигнала, вычисленная тем или иным способом. Тогда число степеней свободы определяется как:

$$M \approx \Delta f_{es} \Delta t_s. \tag{3}$$

Введем также параметр, характеризующий соотношение частотной полосы пропускания канала связи и ширины эффективной частотной полосы сигнала, т.е.:

$$K_{cs} = \frac{\Delta f_{es}}{\Delta f}. \qquad (4)$$

Энергетическое отношение α^2 средней мощности сигнала и помехи в эффективной полосе частот занимаемой самим сигналом Δf_{es}, с учетом соотношений (3) и (4) могут быть представлены так:

$$\alpha^2 = \frac{P_s \Delta t_s \Delta f_{es}}{N_0^2 \, K_{cs} \Delta f_{es}} = \frac{M}{K_{cs}} \left(\frac{P_s}{P_n}\right)_{inp}.$$

На основании полученных результатов представим формулу (2) в следующем виде:

$$C = \Delta f \, log_2 \left(1 + \frac{\alpha^2 K_{cs}}{\Delta f_{es} \Delta t_s}\right). \qquad (5)$$

Произведение $\Delta f_{es} \Delta t_s$ представляет по своей сути соотношение неопределенности [4]. Однако в данной интерпретации оно применимо только для класса сигналов конечной длительности. Поэтому в выражении (5) заменим Δt_s на Δt_{es}, где Δt_{es} — эффективная длительность не конечного сигнала, определяемая в соответствии с методикой вычисления соотношения неопределенности. Причем

$$0 < \Delta t_{es} \le \Delta t_s. \qquad (6)$$

Таким образом, с учетом неравенства (6) имеем:

$$C_{\text{пр}} = \Delta f \log_2 \left(1 + \frac{\alpha^2 K_{cs}}{\Delta f_{es} \Delta t_s}\right) < \Delta f \log_2 \left(1 + \frac{\alpha^2 K_{cs}}{\Delta f_{es} \Delta t_{es}}\right).$$

Правую часть неравенства обозначим как:

$$C_{ph} = \Delta f \log_2 \left(1 + \frac{\alpha^2 K_{cs}}{\Delta f_{es} \Delta t_{es}}\right). \qquad (7)$$

Величина C_{ph}, по сути, является некоторым видоизменением формулы Шеннона, определяющая потенциальную физическую пропускную способность канала связи и учитывающая как характеристики сигнала, так и канала связи.

Очевидно, что в современных системах передачи данных используются сигналы малой длительности. При неизменной ширине полосы пропускания канала связи уменьшение периода следования и длительности сигнала приводит к возникновению дополнительного источника ошибок связанного с так называемыми межсимвольными искажениями [5]. Из формулы (7) также следует, что пропускная способность канала связи определяется и классом используемых сигналов носителей информации, критерием оценки которых является соотношение неопределенности.

Таким образом, соотношение неопределенности позволяющее оценить эффективность того или иного класса носителей используемых при передаче информации является объективным критерием. Оно должно быть применимо для всех классов физических сигналов и давать объективную оценку.

3. Соотношение неопределенности и методы его вычислений. Существует два основных методологических подхода, обеспечивающих повышение скорости передачи информации. Первый из них относится к синтезу оптимальных сигналов, причем само понятие оптимальности определяется контекстом решаемой задачи. Другой путь связан с совершенствованием методов обработки сигналов, как на передающей, так и на приемной стороне. В настоящей статье рассматривается метод, основанный на оценке оптимальности сигналов, используемых при передаче информации [1]. Определяющей мерой такой оценки является область, занимаемая сигналом на плоскости время–частота и описываемое соотношением неопределенности [4]. На практике критерий оценки эффективности сигналов используется при проектировании аппаратуры передачи данных, обработке информации. В качестве примера можно привести публикации зарубежных и отечественных авторов [6-10].

Как правило, соотношение неопределенности основывается на вычислении произведения величин, характеризующих эффективную длительность сигнала во временной области и эффективную ширину его частотной полосы. При этом выбор метода численной оценки такого произведения зависит от класса изучаемых сигналов.

Так, например, для сигналов, у которых временные или спектральные характеристики асимптотически убывают как во временной, так и в частотной областях со скоростью меньшей, чем ${}^{1}/_{t}$ или ${}^{1}/_{\omega}$ соответственно, эффективные длительность сигнала и ширину его спектра определяют как интервал времени и диапазон частот, в которых сосредоточена заданная часть полной энергии сигнала. Обычно за такой уровень принимают значение 0,9-0,95 от полной энергии. При этом соотношение между «существенной» и «несущественной» частью энергии сигнала опирается в большей степени на практические соображения. Такой подход к оценке оптимальности сигнала получил название энергетического метода [11].

Рассмотрим его более подробно. Указанный метод сводится к нахождению (например, во временной области) эффективной длительности сигнала Δt_{es} из условия:

$$\int_{-\Delta t_{es}/2}^{\Delta t_{es}/2} s^2(t)dt = k\int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)dt, \qquad (8)$$

где $s(t)$ — описание сигнала во временной области. Через k обозначен уровень значимости существенной части от всей энергии сигнала, при этом $0 < k < 1$.

В соответствии с теоремой Парсеваля [12], аналогичное выражение вида (8) может быть записано и в частотной области:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\Delta\omega_{es}/_2}^{\Delta\omega_{es}/_2} s(\omega)^2\, d\omega = \frac{k}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} s(\omega)^2\, d\omega,$$

где $s(\omega)$ — спектральная характеристика сигнала $s(t)$.

Здесь и далее используется понятие круговой частоты ω, поэтому эффективную ширину спектра сигнала *обозначим* через $\Delta\omega_{es}$.

Второй метод вычисления соотношения неопределенности опирается на определение длительности сигнала и протяженности спектра, заимствованного из теории вероятностей. В литературе такой способ оценки известен как метод моментов [4]. В его основе лежит представление длительностей сигнала и ширины спектра через второй центральный момент. Обеспечение сопоставимости оценок достигается нормировкой относительно полной энергии сигнала, которая для физических сигналов конечна, т.е.:

$$\Delta t_{es}^2 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty}(t - t_0)^2 s^2\,(t)dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} s^2\,(t)dt}, \tag{9}$$

где Δt_{es} — эффективная длительность сигнала $s(t)$; t_0 — середина сигнала $s(t)$, определяемая соотношением:

$$t_0 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} ts^2\,(t)dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} s^2\,(t)dt}. \tag{10}$$

Аналогично, эквивалентная ширина спектра $\Delta\omega_{es}$ выражается как:

$$\Delta\omega_{es}^2 = \frac{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 s^2\,(\omega)d\omega}{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} s^2\,(\omega)d\omega}. \tag{11}$$

Заметим, что в силу независимости спектральной функции $s(\omega)$ от смещения $s(t)$ во времени, положено $\omega_0 = 0$.

Величины Δt_{es} и $\Delta\omega_{es}$ характеризуют в некотором смысле «ширину» функций $s(t)$ и $s(\omega)$. Между ними существуют определенные отношения, выражающиеся в виде неравенства $\Delta t_{es}\Delta\omega_{es} \geq \frac{1}{2}$, которое в литературе называется соотношением неопределенности.

Вместе с тем для данного метода имеется существенное ограничение на область применения. Так конечность величины оценки произведения $\Delta t_{es}\Delta\omega_{es}$ с использованием метода моментов имеет место только в том случае, если временные и спектральные характеристики сигнала $s(t)$ отвечают требованию сходимости интегралов (9) и (11). Из анализа этих выражений следует, что для выполнения этого условия необходимо, чтобы $o[s(t)] < \frac{1}{t}$ и $o[s(\omega)] < \frac{1}{\omega}$.

Следует отметить, что метод моментов, базирующийся на соотношениях (9) и (11), может также быть интерпретирован как метод, использующий функции веса. При этом $p(t) = p(\omega) \equiv 1$ как во временной, так и в частотной областях.

4. Сравнительный анализ характеристик метода моментов и энергетического метода вычисления соотношения неопределенности. Материал данного сопоставительного анализа методов вычисления соотношения неопределенности опирается на результаты, полученные в [13]. Показано, что метод моментов не всегда приводит к получению конечной оценки. Поэтому при его проведении были использованы классы тестовых сигналов, конечных по длительности, для которых оба рассмотренных метода работоспособны. В качестве таковых используются сигналы треугольной формы. Кроме того, для энергетического метода оценки соотношения неопределенности будет дополнительно рассмотрен сигнал прямоугольной формы.

Задачей приводимого эксперимента является иллюстрация разброса расчетных значений соотношения неопределенности для различных типов сигналов и методов расчета.

Замечание 1: для энергетического метода расчета соотношения неопределенности уровень значимой энергии выбран равным 0,9.

Замечание 2: амплитуды тестовых сигналов и их длительности выбраны равными 1.

Результаты эксперименты представлены в ниже приведенной таблице 1.

Таблица 1.Сводная таблица оценок величин соотношения неопределенности для различных методов расчета

Тип сигнала	Метод расчета	
	Энергетический по уровню 0,9	Стандартный метод моментов
Гауссов	5,41	0,5
Треугольный	4,68	1,33
Прямоугольный	4,81	не определяется

Из анализа данных, приведенных в таблице 1, можно сделать следующие предварительные выводы:

1. разброс вычисляемых величин соотношения неопределенности различными методами значителен;
2. энергетический метод расчета соотношения неопределенности дает большие значения, а процедура его вычисления сложнее (она двухступенчатая);
3. метод моментов не применим для класса сигналов прямоугольной формы.

Таким образом, актуально построение метода вычисления соотношения неопределенности:

— позволяющего расширить класс сигналов, для которых оценка величина произведения $\Delta t_{es}\Delta\omega_{es}$ конечна,

— исключающего субъективизм в выборе значимости между «существенной» или «несущественной» частью оценки характеристик сигнала во временной и частотных областях, как это наблюдается в энергетическом методе расчета.

5. Модифицированное соотношение неопределенности. В представленной работе описывается методика вычисления соотношения неопределенности на основе метода моментов с использованием весовых функций, что позволяет расширить диапазон классов сигналов, для которых оно выражается конечным числом. Данный подход описан в [13].

Воспользуемся некоторыми понятиями теории меры [14]. Меру, характеризующую протяженность сигнала $s(t)$ во временной области, обозначим как $mes[s(t)]$. Она представляется некоторым числовым значением (не обязательно конечным), выражающим линейную протяженность сигнала на оси времени. Аналогичным образом определим меру линейной протяженности спектральной характеристики $s(\omega)$ по оси частот, обозначив ее как $mes[s(\omega)]$. Обе меры являются размерными величинами.

На основании свойств преобразования Фурье, меры линейных длительности сигнала по времени и ширины частотного спектра взаимосвязаны и определяются следующими возможными вариантами отношений:

1. длительность сигнала $s(t)$ конечна, т.е. $mes[s(t)] = const$, тогда ширина его спектра $s(\omega) \to \infty$ или $mes[s(\omega)] \to \infty$;

2. мера длительности сигнала $mes[s(t)] \to \infty$, так что его мера в частотной области $mes[s(\omega)] = const$;

3. меры длительности сигнала и ширины его спектра — неконечные величины, т.е. $mes[s(t)] \to \infty$ и $mes[s(\omega)] \to \infty$.

Следует отметить, что *случай 3* имеет место для единственного класса сигналов, а именно описываемых *гауссовской* функцией. Кроме того, варианты 1 и 2 эквивалентны в том смысле, что замена переменных ω на t или t на ω приводит их к тождественной форме, что обусловлено свойствами симметрии преобразования Фурье.

Сформулируем основные требования к весовым функциям. Они должны обладать следующими *свойствами*:

1. *учитывать связь между длительностью сигнала и шириной его спектра;*
2. *быть непрерывными функциями.*

Выражения для весовых функций во временной и в частотной областях, с учетом приведенного понятия линейной меры и их свойств, представим, соответственно, как $p(t) = p[t, T_0]$ и $p(\omega) = p[\omega, \Omega_0]$.

При этом величины T_0 и Ω_0 определим в виде:

$$T_0 = \frac{2\pi}{mes[s(\omega)]}, \tag{12}$$

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{mes[s(t)]}. \tag{13}$$

В качестве иллюстрации запишем весовую функцию во временной области исходя из условия $mes[s(\omega)] \to \infty$. С учетом выше изложенных соображений, данная весовая функция равна $p(t) = p[t, 0] = 1$.

Таким образом, при $T_0 = 0$ или $\Omega_0 = 0$ значения $p(t, 0) = 1$ или $p(\omega, 0) = 1$, соответственно.

Частный случай: для гауссова сигнала $T_0 = 0$ и $\Omega_0 = 0$ и соответственно, $p(t, 0) = p(\omega, 0) = 1$.

Предложенный выше подход по формированию весовых функций позволяет строить их в виде

$$p(t, \quad T_0) = \begin{cases} 1, |t| \le T_0, \\ 0, |t| > T_0; \end{cases} \tag{14}$$

и

$$p(\omega, \Omega_0) = \begin{cases} 1, |\omega| \le \Omega_0, \\ 0, |\omega| > \Omega_0; \end{cases} \tag{15}$$

где T_0 и Ω_0 определяются, соответственно, соотношениями (12) и (13). Заметим, что функции веса могут иметь и другие, более сложные формы записи, отличные от представления выражениями (14) и (15), но удовлетворяющие указанным выше свойствам.

Для обеспечения размерности в модифицируемых формулах расчета эффективной длительности и ширины спектра сигнала, так же как и в формулах (9) и (10), производится нормировка с применением введенных функций веса. Таким образом, модифицированные выражения для $\overline{\Delta t}_{es}$ и $\overline{\Delta\omega}_{es}$ будут иметь вид:

$$\overline{\Delta t}_{es}^2 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty}(t-t_0)^2 s^2\,(t)\,p(t,\ T_0)dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} s^2\,(t)\,p(t,\ T_0)dt}; \qquad (16)$$

$$\overline{\Delta\omega}_{es}^2 = \frac{\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+\infty} \omega^2 s^2\,(\omega)\,p(\omega,\ \Omega_0)d\omega}{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} s^2\,(\omega)\,p(\omega,\ \Omega_0)d\omega}, \qquad (17)$$

где $p(t, T_0)$ и $p(\omega,\ \Omega_0)$ определяются формулами (14) и (15).

Установим связь введенных нами величин $\overline{\Delta t}_{es}$ и $\overline{\Delta\omega}_{es}$ с величинами Δt_{es} и $\Delta\omega_{es}$ соответственно.

Замечание. Так как модуль спектра сигнала $s(\omega)$ не зависит от смещения $s(t)$ во времени можно положить в формуле (10) $t_0 = 0$. Кроме того, для упрощения дальнейших выкладок сигнал $s(t)$ считаем симметричным относительно нуля на оси времени и нормируем его таким образом, чтобы энергия равнялась единице, т.е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} s^2\,(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} s^2\,(\omega)d\omega = 1.$$

Отметим, что введенные упрощения не сказываются на общности дальнейших результатов.

Докажем нижеследующее утверждение.

Утверждение 1. Соотношение неопределенности, найденное модифицированным и не модифицированным методом моментов связаны неравенством $\overline{\Delta t}_{es}\overline{\Delta\omega}_{es} \le \Delta t_{es}\Delta\omega_{es}$.

Доказательство. Частный случай 1. Для гауссова сигнала верно:

$$\Delta t_s \to \infty \text{ и } \Delta\omega_s \to \infty$$

и потому в соответствии с (12) и (13) $T_o = 0$ и $\Omega_0 = 0$ из чего следует, что

$$p(t, 0) = p(\omega, 0) = 1$$

или

$$\overline{\Delta t}_{es} = \Delta t_{es} \qquad (18)$$

и

$$\overline{\Delta\omega}_{es} = \Delta\omega_{es}. \qquad (19)$$

Таким образом, на основании (18) и (19) следует:

$$\overline{\Delta t}_{es}\overline{\Delta\omega}_{es} = \Delta t_{es}\Delta\omega_{es}.$$

Частный случай 2. Рассмотрим класс сигналов, у которых Δt_s конечная величина. Очевидно, что $\Delta\omega_s \to \infty$. На основании соотношения (12) и (14) следует:

$$T_0 = \frac{2\pi}{mes[s(\omega)]} = 0$$

или

$$p(t, 0) = 1$$

и потому

$$\int_{-\Delta t_s/_2}^{\Delta t_s/_2} t^2 s^2(t)\, p(t, T_o) dt = \int_{-\Delta t_s/_2}^{+\Delta t_s/_2} t^2 s^2(t) dt\,. \qquad (20)$$

В частотной области на основании формул (13) и (15) запишем:

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{mes[s(t)]} = \frac{2\pi}{\Delta t_s}$$

или

$$p(\omega) = \begin{cases} 1, |\omega| \leq \Omega_0, \\ 0, |\omega| > \Omega_0\,. \end{cases}$$

Из чего следует, что выполняется неравенство:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 s^2(\omega)\, p(\omega, \Omega_0) d\omega < \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 s^2(\omega) d\omega. \qquad (21)$$

Итак, *утверждение 1* доказано, т.е. $\overline{\Delta t_{es}}\,\overline{\Delta\omega_{es}} \leq \Delta t_{es}\,\Delta\omega_{es}$.

*Следствие***.** В силу симметричности преобразования Фурье, аналогичное неравенство может быть доказано и для сигналов обладающих следующими временными характеристиками $\Delta t_s \to \infty$ и конечной шириной спектра $\Delta\omega_s$.

Итак, приведенные выше рассуждения позволили установить связь между модифицированным и стандартным методами оценки соотношения неопределенности. Доказано, что расчетная величина соотношения неопределенности полученная на основе модифицированного метода меньше, чем на основе стандартного метода моментов.

Не менее важным аспектом подтверждения эффективности описанного модифицированного метода моментов является также установление класса сигналов $s(t)$ или спектральных функций $s(\omega)$, для которых произведение $\overline{\Delta t}_{es}\overline{\Delta\omega}_{es}$ не является конечной величиной, при условии конечности их энергии.

Известно, что для классов сигналов $s(t)$, асимптотическое поведение которых отвечает условию $o[s(t)] \geq \frac{1}{t}$, стандартный метод моментов не позволяет получить конечную оценку произведения $\Delta t_{es}\Delta\omega_{es}$. Это существенно ограничивает область его применения. Аналогичное ограничение действует и для сигналов со спектральными характеристиками для которых выполняется неравенство $o[s(\omega)] \geq \frac{1}{\omega}$.

Утверждение 2. В классе сигналов с ограниченной энергией не существует сигналов, у которых $\overline{\Delta t}_{es}\overline{\Delta\omega}_{es} \to \infty$.

Замечание. Как и ранее (см. доказательство утверждения 1) для упрощения дальнейших выкладок сигнал $s(t)$ считаем симметричным относительно нуля на оси времени и нормируем его таким образом, чтобы энергия равнялась единице.

Доказательство. Допустим, что в классе сигналов *с ограниченной энергией* может быть построен сигнал, для которого соотношение неопределенности, найденное модифицированным методом моментов, не выражается конечным числом. Это возможно, если спектральная функция $s(\omega)$ сигнала такова, что $\overline{\Delta\omega}_{es} \to \infty$ или во временной области существует сигнал $s(t)$ для которого эффективная длительность $\overline{\Delta t}_{es} \to \infty$.

Рассмотрим первый случай. Для доказательства сформулированного утверждения достаточно установить, что:

$$\overline{\Delta\omega}_{es}^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 s^2(\omega) p(\omega, \Omega_0) d\omega \to \infty. \qquad (22)$$

Для расходимости несобственного интеграла (22) необходимо выполнения, во-первых, условия неограниченности спектральной функции $s(\omega)$ т.е. его $mes[s(\omega)] \to \infty$.

На основании свойств преобразования Фурье при $mes[s(\omega)] \to \infty$, длительность сигнала s(t) конечна. Учтем также свойства весовой функции $p(\omega, \Omega_0)$. Она имеет вид:

$$p(\omega, \Omega_0) = \begin{cases} 1, |\omega| \leq \Omega_0 \\ 0, |\omega| > \Omega_0 \end{cases},$$

где $\Omega_0 = \frac{2\pi}{mes[s(t)]} = \frac{2\pi}{\Delta t_s}$. Таким образом, интеграл в правой части выражения (22) конечен.

Следствие. С учетом симметрии преобразования Фурье, аналогичные рассуждения для сигналов у которых $\overline{\Delta t}_{es} \to \infty$ приводят также к получению конечной оценки эффективной длительности сигнала

Поэтому не существует сигналов с ограниченной энергией, для которых величина произведения $\overline{\Delta t}_{es}\overline{\Delta\omega}_{es} \to \infty$.

Проведенные выше исследования модифицированного метода моментов и сопоставление его с классическим методом показали, что использование весовых функций в методе моментов приводит к существенному расширению класса сигналов, для которых соотношение неопределенности выражается конечным числом.

Известен класс сигналов, для которого соотношение неопределенности, найденное классическим методом моментов, дает его нижнюю границу. Эти сигналы описываются гауссовской функцией. Очевидно, что сопоставление численных значений соотношения неопределенности для этого класса сигналов и найденных как классическим, так и модифицированным методом, позволит оценить грубость последнего.

Гауссовский сигнал во временной и частотной областях имеет вид [4]:

$$s(t) = Aexp[\frac{-t^2}{2a^2}]$$

и

$$s(\omega) = A(a\sqrt{2\pi})exp[\frac{-a^2\omega^2}{2}].$$

Здесь A — амплитуда импульса; постоянная a имеет смысл некоторой условной длительности гауссова импульса, определяемого как 0.606 от амплитуды импульса. Не снижая общности проводимых ниже выкладок, примем в качестве упрощения значения коэффициентов $a = A = 1$. Тогда:

$$s(t) = exp[\frac{-t^2}{2}]$$

и

$$s(\omega) = (\sqrt{2\pi})exp[\frac{-\omega^2}{2}].$$

Сигналы различаются между собой только на константу 2π. Заметим также, что непосредственное вычисление интегралов для определения Δt_{es} и $\Delta\omega_{es}$ дают следующие значения $\Delta t_{es} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ и $\Delta\omega_{es} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Таким образом, произведение $\Delta t_{es}\Delta\omega_{es} = \frac{1}{2}$, что является нижней границей значения величины соотношения неопределенности, найденного классическим методом моментов.

Найдем нижнюю границу значения соотношения неопределенности для гауссовского сигнала в случае расчета модифицированным методом моментов.

С учетом свойств весовых функций для гауссова сигнала процедура вычисления соотношения неопределенности по формулам (16) и (17) приводит к стандартному методу моментов. Это означает, что величина произведения, вычисленная по приведенным выше формулам, равна $\overline{\Delta t}_{es}\overline{\Delta\omega}_{es} = 0{,}5$.

Таким образом, нижняя граница оценки соотношения неопределенности для гауссова сигнала, *вычисленная модифицированным методом*, не отличается от аналогичной оценки, найденной стандартным методом.

Ниже приведена таблица 2 с примерами расчета соотношения неопределенности модифицированным методом для различных типов сигналов.

Таблица 2. Дополнительная сводная таблица оценок расчетных величин соотношения неопределенности для различных методов расчета

Тип сигнала	Метод расчета		
	Энергетический по уровню 0,9	Стандартный метод моментов	Модифицированный метод моментов
Гауссов	5,41	0,5	0,5
Треугольный	4,68	1,33	1,1
Прямоугольный	4,81	не определяется	0,61

Замечание. При определении оценок величин соотношения неопределенности проводились для сигналов с заданными параметрами, а именно: их длительности и амплитуды соответственно равны 1.

Очевидно, что несмотря на простую форму весовых функций, их характеристики определяются свойствами самого сигнала, т.е. от их эффективной длительности и ширины спектра. Описанный метод адаптивен к свойствам сигнала и применим к классам сигналов с ограниченной энергией.

6. Заключение. В настоящей работе получено представление соотношения Шеннона, позволяющее оценить потенциальную физическую пропускную способность канала связи с учетом ряда параметров, как самого канала связи, так и сигналов передаваемых по нему. Показано, что одним из факторов, влияющих на пропускную способность канала связи, являются классы сигналов используемых для передачи информации. Их выбор опирается на соотношение неопределенности.

Проведен анализ методов расчета соотношения неопределенности. Описан метод расчета соотношения неопределенности на основе метода моментов с использованием весовых функций, зависящих от свойств сигнала во временной и частотной областях. Предложенный метод применим для сигналов конечной энергии.

Литература

1. *Скляр Б.* Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение // М.: Вильямс. 2003.1104 с.
2. *Шувалов В.П.* Прием сигналов с оценкой их качества // М.: Связь. 1979. 237 с.
3. *Новоселов О.Н., Фомин А.Ф.* Основы теории и расчета информационно-измерительных систем // М.: Машиностроение. 1980. 280 с.
4. *Гоноровский И.С.* Радиотехнические цепи и сигналы: учебник для вузов // М.: Дрофа. 2006. 719 с.
5. *Васильев К.К.* Глушков В.А., Дормидонтов А.В., Нестеренко А.Г. Теория электрической связи: учебное пособие // Ульяновск: УлГТУ. 2008. 452 с.
6. Shi J., Liu X., Zhang N. On uncertainty principles for linear canonical transform of complex signals via operator methods // Signal, Image and Video Processing. 2014. vol. 8(1). pp. 85–93.
7. *Dang P., Deng G.T., Qian T.* A Tighter Uncertainty Principle for Linear Canonical Transform in Terms of Phase Derivative // IEEE Transactions on Signal Processing. 2013. vol. 61. pp. 5153–5164.
8. *Dang P., Deng G.T., Qian T.* A sharper uncertainty principle // Journal of functional analysis. 2013. vol. 265. pp. 2239–2266.
9. *Agaskar A. Lu Y.M.* A spectral graph uncertainty principle // IEEE Trans. on Inform. Theory. 2013. vol. 59. no. 7. pp. 4338–4356.
10. *Захарченко В., Пак О.В., Максименко В.И., Васильев А.Ф.* Формулировка принципа неопределенности при стробоскопической обработке сигналов // Известия вузов России. Радиоэлектроника. 2012. Вып. 4. С. 3–5.
11. *Зюко* А.Г. Теория электрической связи // М.: Радио и связь. 1998. 433 с.
12. *Эдвардс Р.* Ряды Фурье в современном изложении. Том 1 // М.: Мир. 1985. 264 с.
13. *Мусаев А.А., Сердюков Ю.П.*. Обобщенное соотношение неопределенности для сигналов // Известия Санкт-Петербургского Государственного технологического университета. 2015. № 30(56). С. 66–70.
14. *Зорич В.А.* Математический анализ. Часть 2 // М.: Наука. 1984. 640 с.
15. *Харди Г., Литтлвуд Дж., Полиа Г.* Неравенства // М.: ИИЛ. 1948. 456 с.

References

1. Sclyar B. *Cifrovaya svyas. Teoreticheskie osnovy i practicheskoe primenenie* [Digital communications. Theoretical bases and practical application]. M.: Wiliams. 2003. 1104 p. (In Russ.).
2. Shuvalov V.P. *Priem signalov c ocenkoy ih kachestva* [Receiving signals with the evaluation of their quality]. M.: Svyas. 1979. 237 p. (In Russ.).
3. Novoselov O.N., Fomin A.F. *Osnovi teorii i rascheta informacionno-izmeritelnih system* [Fundamentals of the theory and calculation of information and measuring systems]. M.: Mashinostroenie. 1980. 280 p. (In Russ.).
4. Gonorovski I.S. *Radiotehnicheskie cepi i signaly: uchebnik dlya vusov* [Radio Circuits and Signals: Textbook for high schools]. M.: Drofa. 2006. 719 p. (In Russ.).
5. Vasilyev K.K., Glushkov V.A., Dormidontov A.V., Nesterenko A.G. *Teoriya electricheskoy svyasi: Uchebnoe posobie* [Theory of electrical communication: a training manual]. Ulyanivsk: UlSTU. 2008. 452 p. (In Russ.).
6. Shi J., Liu X., Zhang N. On uncertainty principles for linear canonical transform of complex signals via operator methods. *Signal, Image and Video Processing*. 2014. no. 8(1). p. 85–93.
7. Dang P., Deng *G.T.*, Qian T.A Tighter Uncertainty Principle for Linear Canonical Transform in Terms of Phase Derivative. *IEEE Transactions on Signal Processing*. 2013. vol. 61. pp. 5153–5164.

8. Dang P., Deng G.T., Qian T. A sharper uncertainty principle. *Journal of functional analysis*. 2013. vol. 265. pp. 2239–2266.
9. Agaskar A., Lu Y.M. A spectral graph uncertainty principle. *IEEE Trans. on Inform. Theory*. 2013. vol. 59. no. 7. pp. 4338–4356.
10. Zaharchenko V.D., Pak O.V., Maksimenco V.I., Vasiljev A.F. [The formulation of the uncertainty principle with the stroboscopic signal processing]. *Izvestiya vusov. Radioelectronika – Journal of Instrument Engineering*. 2012. no 4, pp. 3–5. (In Russ.).
11. Zyuko A.G., Klovskiy D.D., Korgik V.I. *Teoriya electricheskoi svjasi* [Theory of electrical communication]. M.: Radio and Communications. 1998. 433 p. (In Russ.).
12. Edvards R. *Ryady Furie v sovremennon izlogenii* [Fourier series in today's presentation]. Vol. 1. M.: Mir. 1985. 264 p. (In Russ.).
13. Musaev A.A., Serdyukov Ju.P. [The generalized uncertainty relation for signals]. *Izvestiya Sankt-Peterburgskogo gosudarstvennogo tehnologicheskogo universiteta – Bulletin of the Saint Petersburg State Institute of Technology*. 2015. no. 30(56). pp. 66–70. (In Russ.).
14. Zorich V.A. *Matematicheskiy analys* [Mathematical analysis]. Part 2. M.: Nauka. 1984. 640 p. (In Russ.).
15. Hardy G., Littlewood J., Polia G. *Neravenstva* [Inequalities]. M.: IIL. 1948. 456 p. (In Russ.).

Мусаев Александр Азерович — д-р техн. наук, профессор, ведущий научный сотрудник лаборатории информационных технологий в системном анализе и моделировании, Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации Российской академии наук (СПИИРАН), декан факультета информационных технологий и управления, Санкт-Петербургский государственный технологический институт (технический университет), научный консультант, ОАО Специализированная инжиниринговая компания «Севзапмонтажавтоматика». Область научных интересов: прикладная статистика, анализ данных, прогнозирование. Число научных публикаций — 220. amusaev@technolog.edu.ru; 14-я линия В.О., д. 39, Санкт-Петербург, 199178; р.т.: +7-(812)-494-9323, Факс: +7(812)350-1113.

Musaev Alexander Azerovich — Ph.D., Dr. Sci., professor, leading researcher, laboratory of IT in System Analysis and Modeling of St. Petersburg Institute for Informatics and Automation of Russian Academy of Sciences (SPIIRAS), dean of IT and control systems department, St. Petersburg State Technological Institute (technical university), expert, public corporation Specialized Engineering Company "Sevzapmontageautomatica". Research interests: data analysis, complicated dynamic processes prognosis and control, stochastic chaos systems. The number of publications — 220. amusaev@technolog.edu.ru; 39, 14-th Line V.O., St. Petersburg, 199178, Russia, SPIIRAS; office phone: +7-(812)-494-9323, Fax: +7 (812)350-1113.

Сердюков Юрий Павлович — д-р техн. наук, доцент, профессор кафедры медицинской информатики и физики, Северо-Западный государственный медицинский университет имени И. И. Мечникова (СЗГМУ им. И.И. Мечникова). Область научных интересов: обработка и передача информации, теория сигналов, спектральный анализ. Число научных публикаций — 73. serdyukov_yu@mail.ru; ул. Кирочная, 41, Санкт-Петербург, 191015; р.т.: +7(812) 5431953.

Serdyukov Yury Pavlovich — Ph.D., Dr. Sci., associate professor, professor of medical informatics and physics department, Mechnikov North-West State Medical University. Research interests: processing and information transfer, theory of signals, spectral analysis. The number of publications — 73. serdyukov_yu@mail.ru; 41, Kirochnaya Str., St. Petersburg, 191015, Russia; office phone: +7(812) 5431953.

РЕФЕРАТ

Мусаев А.А., Сердюков Ю.П. **Соотношение неопределенности сигналов как критерий оценки физической скорости передачи информации.**

Проведен анализ пропускной способности канала связи в соответствии с определением данным Шенноном. Показано, что в нем не учитывается ряд характеристик, как самого сигнала, так и канала связи в частотной области. Именно это и явилось стимулом к его преобразованию и придания этому соотношению более практическую направленность.

Получено более детальное представление формулы Шеннона для определения пропускной способности канала связи. В модифицированном виде в нем учитывается параметры сигнала, как во временном, так и частотном диапазоне. Учитывается также эффективность использования частотной полосы канала связи.

Полученная оценка по своей сути является оценкой физической пропускной способностью канала связи на базе соотношения Шеннона.

Одной из составляющих введенного модифицированного соотношения для пропускной способности канала связи по Шеннону является соотношение неопределенности.

Для повышения достоверности полученного результата проведен анализ известных методов расчета соотношения неопределенности. Выявлены их недостатки и определена область их применения в практике. Предложена и описана новая методика расчета соотношения неопределенности для сигналов, которая, собственно, и должна использоваться при проведении вычислений соотношения неопределенности.

Приведены примеры расчетов соотношения неопределенности для различных классов сигналов с использованием энергетического и метода моментов и в том числе с применением предложенного метода.

Показано что для гауссовского сигнала оценка величины соотношения неопределённости найденных модифицированным и стандартным методом моментов совпадают.

SUMMARY

Musaev A.A., Serdyukov Yu.P. **The Uncertainty Relation Between the Signals as a Criterion for Evaluation of the Physical Data Rate.**

The analysis of channel capacity in accordance with the definition according to Shannon. It is shown that it ignores certain characteristics of both the signal and the communication channel in the frequency domain. That is what was the incentive for some of its transformation and make it more action-oriented relationship.

We get more detailed understanding of Shannon's formula for determining the channel capacity. In a modified form it takes into account the parameters of the signal in both time and frequency range. Also takes into account efficient use of the frequency band of the communication channel. This estimate is essentially an assessment of the physical capacity of the communication channel on the basis of the ratio of the Shannon.

One of the components introduced to the modified ratio of the communication channel Shannon is the uncertainty relation. To improve the reliability of the results analyzed known methods for calculating the uncertainty relation. Revealed their weaknesses and identify areas of their application in practice.

Proposed and described a new method of calculating the uncertainty relation for the signals that actually should be used during the calculation of the uncertainty relation.

Examples of calculations of the uncertainty relation for different classes of signals using the energy and the method of moments, including with the use of the proposed method. It is shown that, for a Gaussian signal estimate of the uncertainty relation, and found a modified standard method of moments coincide.