

С.Ф. Свинын, А.И. Попов
**ФИНИТНЫЕ БАЗИСНЫЕ ФУНКЦИИ В ЗАДАЧАХ
ФОРМИРОВАНИЯ ВЫБОРОК СИГНАЛОВ КОНЕЧНОЙ
ПРОТЯЖЕННОСТИ**

Свинын С.Ф., Попов А.И. Фinitные базисные функции в задачах формирования выборок сигналов конечной протяженности.

Аннотация. В статье рассматриваются вопросы применения систем базисных функций, определенных на конечных интервалах аргументов, в задаче формирования дискретных выборок сигналов. Такие базисы позволяют обосновать объемы сеток выборок реальных сигналов при ситуациях, когда их спектры инфинитны и характеризуются определенной степенью затухания в области высоких частот. Для финитных функциональных зависимостей, у которых аргументом не является время, теряет смысл понятие частоты Найквиста.

Ключевые слова: инфинитный спектр, дискретная выборка, конечная энергия сигнала, компактный носитель, вейвлеты Добеши, быстрые спектральные преобразования.

Svinyin S.F., Popov A.I. Finite Basic Functions in the Tasks of Sampling Signals of Finite Qxtension.

Abstract. The article deals with the application of systems of the basic functions, defined on finite argument intervals, in the problem of obtaining discrete signal samples. These mathematical bases allow justifying the size of signal sample lattices for actual situations where their spectra are infinite and are characterized by a certain degree of attenuation at high frequencies. For expressions with finite functions, which do not have the time as argument, the conception "the Nyquist frequency" loses its significance.

Keywords: signal, infinite spectrum, sampling, finite energy, compact carrier, Daubechies wavelets, fast spectral transforms.

Введение. В 2015 году исполнилось 100 лет со дня опубликования Э. Уиттекером статьи, в которой детально исследовался так называемый «кардинальный ряд» в математике [1]. Автор дал общему члену $\sin(\pi x)/(\pi x)$ этого ряда обозначение $\text{sinc}(x)$, и существенным было то, что аргумент функции рассматривался как абстрактная математическая переменная, не связанная с какими-либо физическими величинами. Во главу угла был положен принцип финитности полосы спектра аналитических целых функций, и для абсолютно точного их восстановления требовалась фильтрация с помощью идеальных фильтров низкой частоты (ФНЧ). Предполагалось, что эти фильтры обладают частотной характеристикой в виде гест-функции, и абсцисса точки ее разрыва впоследствии получила впоследствии название частоты среза и обозначалась как ω_c .

С 30-40-х годов XX века кардинальный ряд получил широкое распространение в теории связи после того, как В.А. Котельников и К. Шеннон дали формулировки теорем отсчетов [2,3]. С 50-х годов в мировой литературе появилось большое число работ, опиравшихся при

анализе сигналов – функций времени на принцип финитности спектров. Возникли проблемы фактора усеченности ряда, неидеальной фильтрации, интерполяционного критерия восстановления функции и т.д. Важный шаг был сделан, когда стали применяться энергетические критерии оценок ошибок восстановления. Обзор первой группы отечественных работ по теории выборок дал академик А.А. Харкевич в 1958 году [4]. Он обратил внимание на условность термина «граничная частота полосы» для реальных сигналов и на необходимость расширения теорем отсчетов на область случайных сигналов, которые могут иметь очень широкий и, к тому же, гладкий спектр в области высоких частот. Им же замечено, что для сигналов, длительность которых превышает так называемый интервал корреляции, теорема Котельникова в применении к процессам с неограниченным спектром должна рассматриваться как приближенное утверждение.

В дальнейшем появились возможности строить модели, лишь приближенно отражающие точность первичных данных измерений сигналов. Наиболее распространенные причины ошибок, возникающих в процессе дискретных выборок, были рассмотрены в работе [5]. Очевидно, что усечение ряда практически не ставит под сомнение формулировки теорем отсчетов для функций времени, если длительность сигнала значительно превышает (в десятки, сотни тысяч и более раз) величину периода самой низкочастотной его составляющей. Для функций, аргумент которых не является временем, это условие выполняется далеко не всегда. Функции конечной (финитной) протяженности имеют инфинитные спектры. Этот факт приобретает особое значение для функций нескольких переменных, когда они определены на компактных носителях (ограниченных по размерам площадях, параллелепипедах и т.д.). Создается основа для восстановления по дискретным выборкам финитных сигналов посредством систем финитных базисных функций, свойства которых существенно отличаются от свойств бесконечного кардинального ряда. Значительное распространение в теории аппроксимации, начиная с 70-80-х годов, получили локальные базисные функций, в том числе рассматриваемые на компактных носителях. В этой статье отразим их роль в теории выборок.

2. Финитность сигналов – инфинитность спектров. С 1960-х годов XX века приоритет в исследованиях в рамках теории выборок получил энергетический подход. Обращено внимание на класс функций с конечной энергией, т.е. удовлетворяющих условию [6]:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt < \infty. \quad (1)$$

В краткой заметке [7] задача оценки ошибки восстановления была поставлена следующим образом: имеется «неизвестная» (по их мнению) функция времени $f(t)$, но с ограниченным спектром. Требовалось приближенно восстановить ее на некотором конечном интервале времени $(-T, T)$, зная выборки с шагом $h < (1/\omega_c)$. Авторы вывели аналитическую формулу для модуля разности функции и усеченного кардинального ряда в виде неравенства:

$$\varepsilon = \left| f(t) - \sum_{i=-k}^k f(ih) \frac{\sin \frac{\pi}{h}(t - ih)}{\pi(t - ih)} \right| \leq \frac{\sqrt{2}}{\pi} E \left| \sin \left(\frac{\pi t}{h} \right) \right| \sqrt{\frac{Th}{T^2 - t^2}}, \quad (2)$$

где энергию E они считали конечной, причем полной и равной спектральной энергии E_c :

$$E = E_c = \int_{-\omega_c}^{\omega_c} F^2(\omega) d\omega.$$

Различные оценки ошибок, обусловленных отбрасыванием высокочастотной части спектра, рассматривались на протяжении десятков лет во многих других работах. В частности, в статье [8] приводились доказательства наличия значительной вычислительной неустойчивости процесса восстановления при малейшем отклонении произведения $2\omega_c T$ от теоретического значения, как в сторону его уменьшения, так и в сторону увеличения. В монографии отечественных авторов Я.И. Хургина и В.П. Яковлева [6].

В другой широко известной статье [9] предлагался ответ на вопрос о подходе к ограниченности ширины полосы. Подчеркивался тот факт, что «реальные сигналы где-то начинаются и где-то кончаются, и, следовательно, их полоса не может быть ограниченной». В этой работе были введены определения, уточняющие критерии восстановления: «сигнал, ограниченный во времени на уровне ε » и «полоса частот $(-\omega_c, \omega_c)$, ограниченная на уровне ε ».

По аналогии с ними введем понятие энергии E_ε , ограниченной на уровне ε как значение интеграла энергии для функций, интегрируемых с квадратом, отличающееся на величину ε от полной энергии E . Также будем иметь в виду равенство Парсеваля для таких функций при $\omega > 0$:

$$E = \int_{-T}^T f^2(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty F^2(\omega) d\omega, \quad (3)$$

Наиболее полные анализы многочисленных работ по теории

отсчетов и ее приложений в канун 80-х годов, включая разложения по базисам, отличающимся от кардинального ряда, проделаны в виде больших обзоров, опубликованные в 1977 году [10,11]. Авторы обоих работ проанализировали в сумме около пятисот публикаций. В том числе выделены достижения в области развития подходов к дискретизации функций нескольких переменных (ФНП). В связи с этим вопросы формирования выборок многомерных сигналов, начиная с функций двух переменных, когда фактор инфинитности спектров явно проявляется, кратко затронем в следующем разделе.

3. О выборках сигналов – функций двух и более переменных.

Традиционная теория отсчетов одномерных функций с финитным спектром была расширена и на процессы обработки двумерных изображений. Обобщения результатов можно найти в монографиях [13,14]. В первой из них делается предположение, что спектр изображения $F(\omega_x, \omega_y)$ финитен и равен нулю вне определенного прямоугольника $|\omega_x| \leq \omega_{cx}$, $|\omega_y| \leq \omega_{cy}$. Затем берутся ортогонально расположенные отсчеты с шагами $1/2\omega_{cx}$ и $1/2\omega_{cy}$ и непрерывное изображение $f(x,y)$ выражается через дискретные значения $f(n_1/2\omega_{cx}, n_2/2\omega_{cy})$. Интерполяционная функция двумерной дискретизации получает вид:

$$w(x, y) = \left(\frac{\sin(2\pi\omega_x x)}{2\pi\omega_x x} \right) * \left(\frac{\sin(2\pi\omega_y y)}{2\pi\omega_y y} \right), \quad (4)$$

где w – интерполяционная функция двумерной дискретизации.

В монографии [13] теорема двумерной дискретной выборки изображений приведена в следующей формулировке: «Если $F(\omega_x, \omega_y)$ имеет носитель, содержащийся в интервале $[-\pi/T_x, \pi/T_x] * [-\pi/T_y, \pi/T_y]$, то:

$$f(x, y) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(iT_x, kT_y) h_x(x - iT_x) h_y(y - kT_y), \quad (5)$$

где:

$$h_x = \frac{\sin(\pi x T_x)}{\pi x T_x}, \quad h_y = \frac{\sin(\pi y T_y)}{\pi y T_y} \gg.$$

Существуют теоремы многомерных выборок, разработанные для случаев, когда число независимых переменных может быть три и более. Примерами могут служить результаты, полученные Ф. Реза [11], а также Д. Петерсеном и Д. Миддлтоном [15]. В их работах формулировки теорем доказываются с позиций теории функций с финитным спектром, представляющим собой вариант искусственного расширения одномерного спектра на многомерные пространства

волновых чисел. Очевидно, что в приложениях для N -мерных евклидовых пространств сигналов проблемы выбора нескольких полос фиксированной ширины каждая (т.е. границ множеств волновых чисел $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N$) многократно возрастают по сравнению с проблемами для функций одной переменной. Области ненулевых частот фиксируются вокруг начала координат как прямоугольники, параллелепипеды, гиперкубы и т.п. Возникает основное противоречие математической теории непрерывных сигналов, поскольку в реальности финитным сигналам должны соответствовать инфинитные спектры и наоборот. Проблема замены многомерных функциональных зависимостей их цифровыми отображениями авторы пытались решить, в частности, за счет периодического продолжения спектров за пределы геометрических форм основных носителей информации. Но тогда нужно периодически продолжать и сами многомерные функции $f(x_1, x_2, \dots, x_N)$, что далеко не всегда соответствует картинам реальных физических полей.

Рассмотрим вначале вопрос применения финитных базисных функций на примерах анализа профилей поля магнитной индукции на поверхности Земли, затем оценим всю картину поля на участке площадью в несколько сотен квадратных километров, полученную как результат измерений методом аэромагниторазведки. Графическое изображение данного участка поля приведено на рисунке 1.

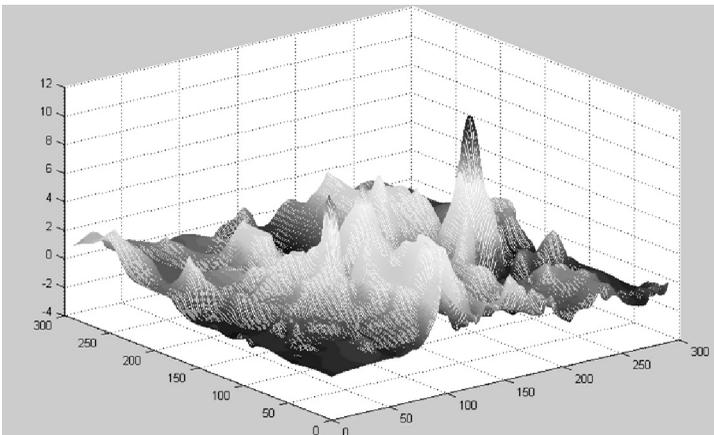


Рис. 1. График поля магнитной индукции на одном из участков поверхности Земли

По осям x, y указаны номера отсчетов, по оси ординат – значения индукции в микроТесла.

4. Базисные функции, заданные на компактных носителях.

Среди базисов, заданных на компактных носителях, особое место занимают полиномиальные базисные сплайны (В-сплайнов). С точки зрения применения в теории выборок они интересны, прежде всего, тем, что соответствующие преобразования Фурье элементов аппроксимирующих В-сумм имеют своим результатом простые аналитические выражения [16], напоминающие во многом общий член кардинального ряда Уиттекера-Котельникова-Шеннона. Основное отличие состоит в том, что непрерывным независимым аргументом является частота, а не время:

$$F_B(\omega) = B(0) \left(\frac{\sin\left(\frac{\omega h}{2}\right)}{\frac{\omega h}{2}} \right)^{m+1}. \quad (6)$$

Здесь h – расстояние между равноотстоящими узлами сплайна, m – степень сплайна. Узлы могут являться опорными точками для выбора оптимальной частоты отсчетов с точки зрения алгоритма минимизации ошибок. График спектральной плотности $F_{B3}(\omega)$ кубического В-сплайна показан на рисунке 2.

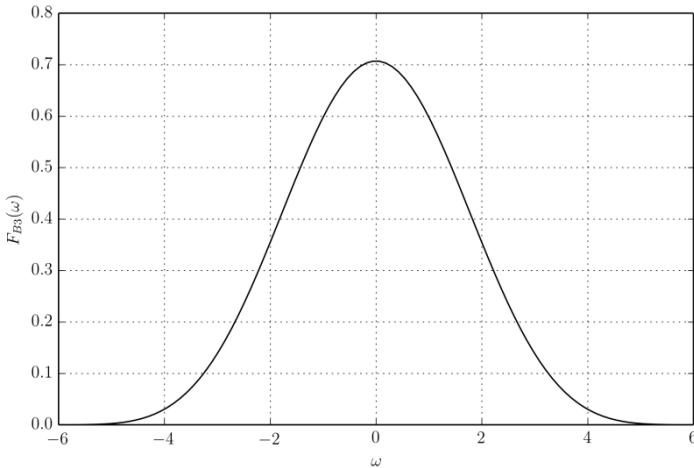


Рис. 2. Спектр одномерного кубического В-сплайна

Рассмотрим функцию $f(x)$ одного аргумента, заданную на замкнутом отрезке $[a,b]$. Известно, что функция достаточной степени гладкости может быть приближенно представлена в виде суммы

«взвешенных» В-сплайнов целой степени m дефекта 1:

$$f(x) \cong \sum_{i=-m}^{n+m} b_i B_i(x), \quad (7)$$

где b_i – коэффициенты. Графики последовательностей В-сплайнов 1-й и 3-й степени показаны на рисунке 3 для случая расстояния между узлами $h=3$.

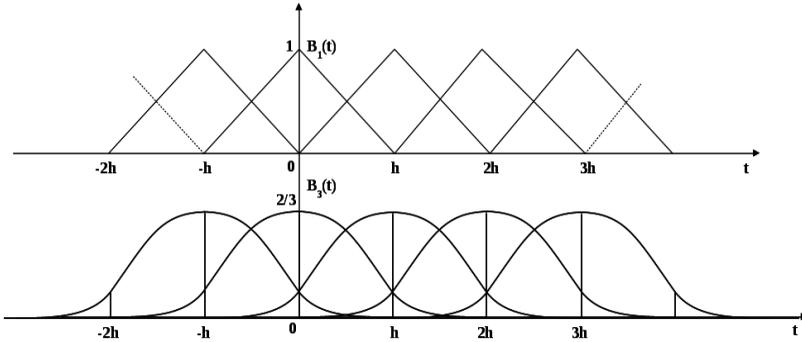


Рис. 3. Последовательности В-сплайнов 1-й и 3-й степени

Введем, кроме использованного выше термина «спектральная энергии сигнала E_c » [6], понятие энергии спектра аппроксимирующей последовательности В-сплайнов $E_{as}(\omega)$. Тогда можно с некоторой степенью приближения записать интегральное соотношение:

$$\int_0^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \cong \int_0^{\infty} |F_{as}(\omega)|^2 d\omega. \quad (8)$$

Спектры $F(\omega)$ и $F_{as}(\omega)$ инфинитны, но очевидно, что энергия последовательности, заданной на конечном интервале $[a, b]$, при ограничениях на диапазон значений сигнала $f(x)$, конечна. Спектральную энергию как интеграл от квадрата модуля $F_{as}(\omega)$, можно разбить на две части – низкочастотную (НЧ) и высокочастотную (ВЧ):

$$\left(\frac{1}{\pi}\right) \int_0^{\infty} |F_{as}(\omega)|^2 d\omega = \left(\frac{1}{\pi}\right) \int_0^{\omega_c} |F_{as}(\omega)|^2 d\omega + \left(\frac{1}{\pi}\right) \int_{\omega_c}^{\infty} |F_{as}(\omega)|^2 d\omega. \quad (9)$$

Частоту ω_c назовем граничной частотой эффективной ширины полосы НЧ-спектра последовательности. Эта полоса может быть рассчитана по энергии НЧ-части, рассчитанной «с точностью до ε » по

отношению к полной энергии.

На основании теоремы математического анализа об интегральных неравенствах, определим ВЧ-часть энергии последовательности:

$$\varepsilon = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_e}^{\infty} (F_{as}(\omega))^2 d\omega < C_1 h^2 \int_{\omega_e}^{\infty} \left(\frac{\sin(\omega h/2)}{\omega h/2} \right)^{2m+2} d\omega < C_1 h^2 \int_{\omega_e}^{\infty} \left(\frac{2}{\omega h} \right) d\omega = \frac{2^{m+2} C_1}{(2m+1)\pi^{2m+1}} h, \quad (10)$$

где C_1 – коэффициент, зависящий от количества узлов сплайна.

Из данного выражения следует, что энергия высокочастотных составляющих последовательности В-сплайнов, аппроксимирующей непрерывный сигнал $f(x)$, пропорциональна значению шага выборки h с множителем, зависящим от степени сплайна m .

В формуле (10) интервал между узлами, равный шагу выборки $h=2\pi/\omega_e$, может быть рассчитан по значению энергии E ВЧ-части спектра последовательности.

Покажем, что неравенство (10) выполняется, на примере фрагмента одного из профилей $f(x)$ (сплошная линия) магнитного поля, графики которых приведены на рисунке 4. Расстояния между точками измерений по оси абсцисс на практике составляют $h_x=x_{i+1}-x_i=0,25$ км.

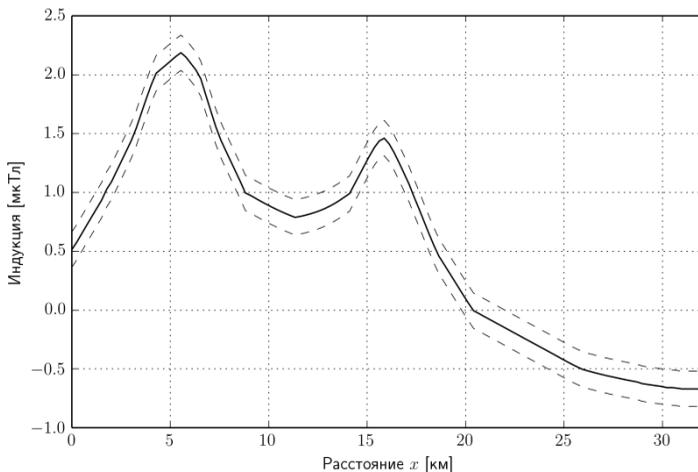


Рис. 4. Графики профилей поля электромагнитной индукции, наведенной на поверхность Земли

Аппроксимацию сигнала выразим в виде последовательности сглаживающих кубических В-сплайнов в соответствии с формулой

аппроксимации (7). Формулы сглаживания для сплайнов различных степеней разработаны в [17,18]. Аналитическое выражение для модуля амплитудного спектра последовательности В-сплайнов целой степени принимает вид [19]:

$$|F_{as}(\omega_x)| = B_0 \left| \frac{\sin(\omega_x h / 2)}{\omega_x h / 2} \right|^{m+1} * \left| \sum_{i=0}^n b_i e^{-j\omega_x h} \right|, \quad (11)$$

где B_0 – амплитуда В-сплайна с нулевым индексом. Подчеркнем, что аргументом при построении поля является физическое расстояние x вдоль поверхности, и пространственную частоту при выполнении преобразования Фурье обозначим ω_x .

Узлы сплайна x_i для упрощения расчетов, проиндексируем в целых числах: $i = -m, \dots, 0, 1, \dots, n+m$. График спектра при $m=3$ показан на рисунке 5.

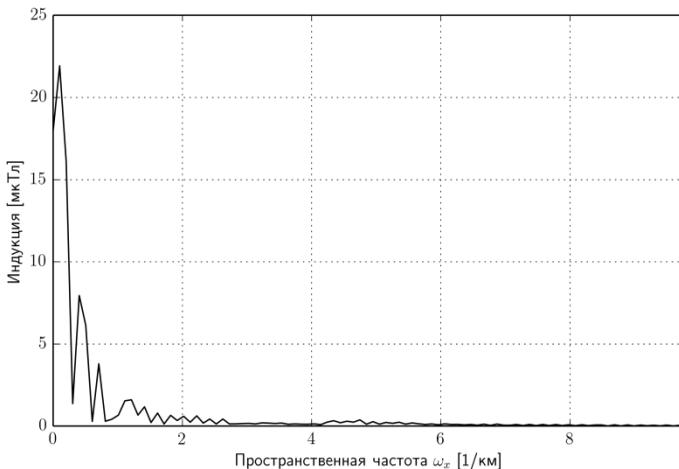


Рис. 5. График спектра аппроксимирующей последовательности кубических В-сплайнов

Значение энергии ВЧ-части спектра как отклонение от полной энергии должно удовлетворять неравенству:

$$\varepsilon(\omega_x) \leq \left(\frac{1}{\pi} \right) \int_{\omega_{ex}}^{\omega_x} |F_{as}(\omega_x)|^2 d\omega_x. \quad (12)$$

Величина полной энергии спектра $E_c(\omega_x)$ аппроксимирующей

суммы (4) в результате применения формулы:

$$E_c = \left(\frac{1}{\pi}\right) \int_0^{\infty} |F_{as}(\omega_x)|^2 d\omega_x, \quad (13)$$

получилась равной $E_c=137,0607$.

Если задать отклонение ε от E_c равным, например, на уровне в 0,5%, то величина $E_\varepsilon = 136,3754$. Из равенства (9) получается, что соответствующая относительная граничная частота ω_ε эффективной полосы, равна 0,354. Шаг выборки при этом $h=2,825$, что в пересчете на километры дает число $h_x=0,706$ км.

При меньшей величине отклонения ε , равной, например, 0,1%, получаем следующие результаты: $E_\varepsilon=136,924$, $\omega_\varepsilon=1,280$, $h=0,781$ и в пересчете на километры получаем величину $h_x=0,195$ км. Это означает, что выбранный геофизиками при проведении реальных измерений шаг h_x выборки точек отсчетов вдоль оси x равен 0,25 км, что соответствует несколько большему значению погрешности, чем 0,1%.

5. Ортонормированные вейвлеты с компактными носителями. Роль алгоритмов быстрых вейвлет-преобразований. Значительный прогресс в использовании вейвлетов в различных приложениях связан, в первую очередь, с наличием быстрых алгоритмов спектральных дискретных преобразований, класс которых значительно шире множества быстрых преобразований в базисе комплексных экспоненциальных функций. Для решения проблемы организации минимальных выборок сигнала, обеспечивающих необходимую точность восстановления, следует провести исследование собственных спектров вейвлет-коэффициентов. Такие системы вейвлет-функций, как производные от функции Гаусса, вейвлеты Морле, вейвлеты Шеннона и др. теоретически определены на всей оси, но могут рассматриваться как локальные. Но основную роль в алгоритмах дискретных быстрых вейвлет-преобразований (БВП) играют ортонормированные вейвлет-базисы, заданные на компактных носителях.

Для применения энергетического критерия точности восстановления сигнала по вейвлет-коэффициентам необходимы два основных оператора: кратномасштабный анализ [14] и вычисление октавного спектра энергии [21]. Достоинством октавного спектра является то, что он, как и спектр Фурье, инвариантен по отношению к сдвигам во времени стационарных сигналов. Свойством кратномасштабного анализа обладают и некоторые вейвлеты, рассматриваемые на всей оси $t \in (-\infty, \infty)$, например, вейвлеты

Шеннона [22, 23].

Преобразуем непрерывный сигнал $f(x)$ к дискретному виду – представим его как вектор-строку, содержащий n действительных чисел $f_i, i=0,1,\dots, n-1$. В алгоритмах быстрых вейвлет-преобразований фактически используются целочисленные итерации одного единственного оператора масштабирования D_σ ($\sigma>1$), описывающего растяжение [20]. Обычно используется масштаб $\sigma=2$, при котором материнский вейвлет удовлетворяет тождеству:

$$D_2\psi(t) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k\psi(t-k). \quad (14)$$

Для функций $f \in L^2(R)$ частная сумма с вейвлет-коэффициентами c_k интерпретируется как разность между двумя приближениями f – с разрешениями 2^{j+1} и 2^j , и кратномасштабный анализ использует наборы сеток приближения. Приближение с разрешением 2^j содержит всю необходимую информацию для вычисления с более грубым разрешением 2^{j-1} .

На рисунке 6 приведен граф быстрого преобразования Хаара (БПХ) на $n=2^3=8$ отсчетов с добавлением операторов вычисления составляющих октавного спектра.

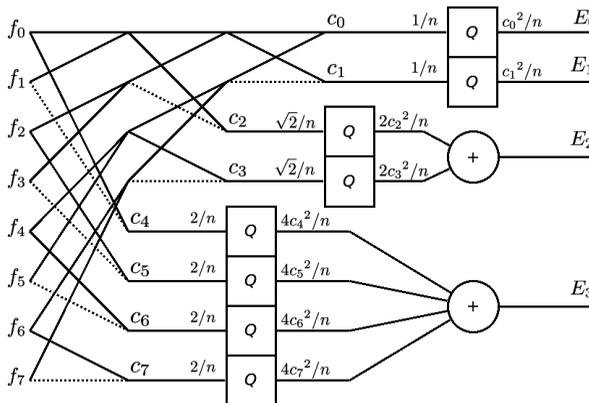


Рис. 6. Граф быстрого преобразования Хаара: c_k – коэффициенты Хаара, Q – квадраторы, E_s – значения октавных составляющих спектральной энергии дискретного сигнала

Авторами было разработано программное обеспечение на языке программирования Python3 с использованием библиотеки SciPy для вычисления значений вейвлет-коэффициентов. На рисунке 7 приведена

гистограмма части значений коэффициентов быстрого преобразования Хаара (БПХ) исходного вектора $\{f_i\}$, содержащего $n=2^p=64$ отсчетов отсчетов. Говорят, что «сигнал имеет длину 64». Показатель степени p , означающий максимальное число итераций, носит название порядка дискретного преобразования.

Величина интегральной по всем октавам спектральной энергии вектора коэффициентов Хаара $\{c_k\}$, вычисляется квадратичная сумма о вида [21]:

$$E_\varepsilon = ((c_0^2 + c_1^2) + 2^{-1}(c_2^2 + c_3^2) + 2^{-2} \sum_{k=4}^{2^{p-4}-1} c_k^2 + 2^{-3} \sum_{k=8}^{2^{p-3}-1} c_k^2 + \dots + 2^{-p} \sum_{k=2^{p-1}}^{2^p-1} c_k^2) n. \quad (15)$$

Ее значение получается равным $E_\varepsilon=135,297$.

Выполним быстрое преобразование Хаара повторно для сетки отсчетов, в 2 раза более частой, т.е. для длины сигнала в 128 отсчетов для того же самого отрезка. В этом случае значение энергии равно $E_\varepsilon=137,248$.

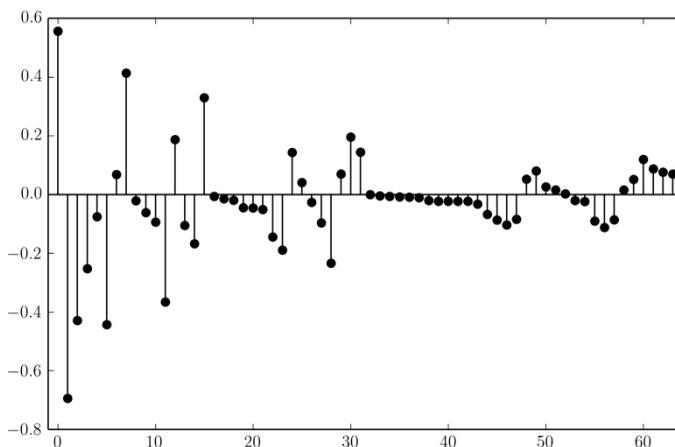


Рис. 7. Значения вейвлет-коэффициентов Хаара функции, график которой изображен на рисунке 4

На рисунке 8 показан график, а на рисунке 9 гистограмма вейвлета Добеши Db4. Значение спектральной энергии, определяемое в результате быстрого вейвлет-преобразования, как и в случае БПХ,

вычисляется как квадратичная сумма по всем октавам вектора коэффициентов Добеши $\{c_k\}$:

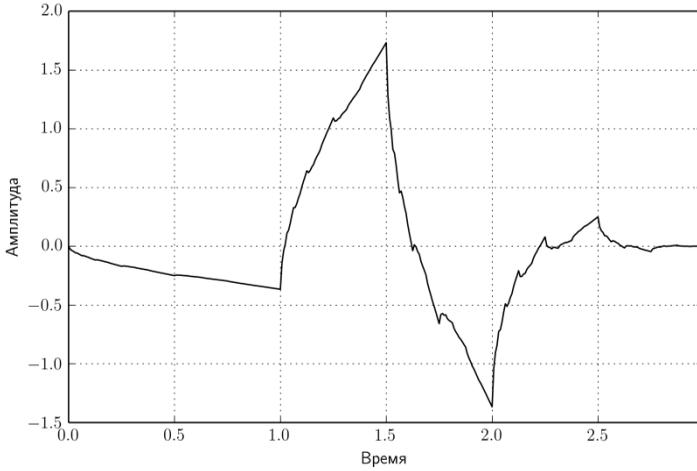


Рис. 8. График материнского вейвлета Db4.

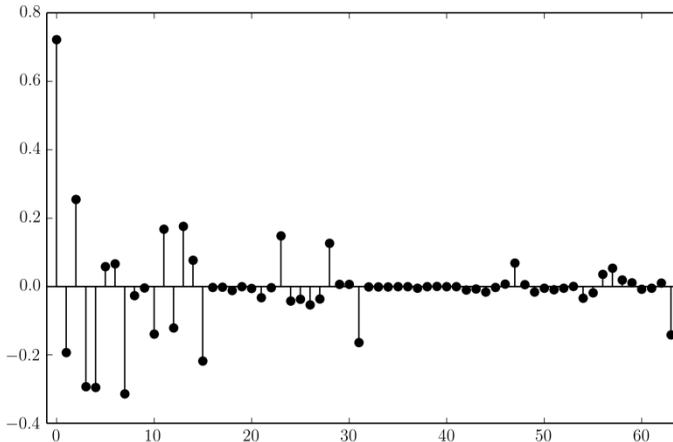


Рис. 9. Гистограмма первых, наиболее значащих по модулю коэффициентов разложения функции $f(x)$ по базисным функциям семейства Db4

$$E_\varepsilon = \left(\sum_{k=0}^3 c_k^2 + 2^{-1} \sum_{k=4}^{2^{p-4}-1} c_k^2 + 2^{-2} \sum_{k=2^{p-4}}^{2^{p-3}-1} c_k^2 + \dots + 2^{-p} \sum_{k=2^{p-1}}^{2^p-1} c_k^2 \right) n. \quad (16)$$

Когда разрешение 2^j увеличивается, то аппроксимация

совокупности коэффициентов сходится к исходному сигналу $f(x)$ [13]. Аналогично, сходимость последовательности энергий E_ε при увеличении номера итерации j может быть установлена по неравенству

$$\left| E_{\varepsilon,j+1} - E_{\varepsilon,j} \right| \leq \varepsilon, j = 1, 2, \dots \quad (17)$$

В частности, при длине дискретного сигнала $2^p=64$ $E_\varepsilon=137, 158$, а при длине, равной 128, она составляет $E_\varepsilon= 137,498$.

6. Заключение. В статье развивается подход к проблеме выборок непрерывных сигналов с позиций теории функций с конечной энергией, причём обладающих инфинитным спектром. Существуют две модели, аналитически описывающие процессы убывания спектра в высокочастотной области: одна - соответствующая гиперболическому закону $F(\omega)\sim\omega^{-m}$, другая – экспоненциальному закону с основанием a : $F(\omega)\sim a^{-\omega}$ [4]. В качестве примеров, подтверждающих возможности энергетического подхода к расчету необходимого шага выборки финитных функций с интегрируемым квадратом, приведены варианты моделей, использующих базисные функции с компактными носителями - В-сплайны и вейвлеты. Сходимость алгоритмов быстрых вейвлет-преобразований к сигналу $f(x)$ в пространстве C_∞ при увеличении числа итераций $j=1,2,3, \dots$ доказана в [14].

Роль таких моделей и финитных базисов должна возрастать при переходе к алгоритмам получения дискретных выборок многомерных непрерывных сигналов – функций вида $f(x_1, x_2, \dots, x_N)$, примером которых является поле, показанное на рис.1. Важным свойством локальных ортогональных базисов в пространстве многомерных сигналов, а также их спектров является свойство сепарабельности. Об энергетическом подходе к проблеме выборок применительно к финитным сигналам – функциям двух и более переменных авторы намерены написать следующую статью.

Литература

1. *Whittaker E.* On the Functions which are represented by Expansions of the Interpolation Theory // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. 1915. vol. 35. pp. 181–194.
2. *Котельников В.* О пропускной способности «эфира» и проволоки в электросвязи // Успехи физических наук (Приложение). 2006. Т. 176. №7. С. 762–770.
3. *Shannon C.* Communications in the Presence of Noise // Proc. IRE. 1949. Vol. 37. no. 1. pp. 10–21.
4. *Харкевич А.А.* О теореме Котельникова // Радиотехника. 1958. Т.1. №8. С. 3–10.
5. *Папоулис А.* Анализ ошибок в теории выборок // ТИИЭР. 1966. Т.54. №7. С. 34–43.
6. *Хургин Я.И., Яковлев В.П.* Финитные функции в физике и технике // М.: Наука. 1971. 408 с.
7. *Цыбаков Б.С., Яковлев В.П.* О точности восстановления функции с помощью конечного числа членов ряда Котельникова // Радиотехника и электроника. 1959. Т.4. № 3. С. 542.
8. *Ландау Г.* Метод выборок, передача информации и частота Найквиста // ТИИЭР. 1967. Т.55. №10. С.56–62.

9. *Слепян А.Д.* О ширине полосы // ТИИЭР. 1976. Т.64. №3. С. 4–14.
10. *Хургин Я.И., Яковлев В.П.* Прогресс в Советском Союзе в области теории финитных функций и ее применений в физике и технике // ТИИЭР. 1977. Т.65. №7. С. 16–45.
11. *Джеерри А.* Теорема отсчетов Шеннона, ее различные обобщения и ограничения // ТИИЭР. 1977. Т.65. №11. С. 53–89.
12. *Eldar Y.C.* Sampling Theory: Beyond Bandlimited Systems // University Printing House. Cambridge CB2 8BS. UK. 2015. 799 p.
13. *Птачек М.* Цифровое телевидение. Теория и техника // М.: Радио и связь. 1990. 528 с.
14. *Малла С.* Вейвлеты в обработке сигналов // М.: Мир. 2005. 672 с.
15. *Petersen D., Middleton D.* Sampling and Reconstruction of Wave-Number-Limited Functions in N-dimensional Euclidean Spaces // Information and Control. 1962. no. 5. pp. 279–323.
16. *Марчук Г.И., Агошков В.И.* Введение в проекционно-сеточные методы // М.: Наука. 1981. 416 с.
17. *Гребенников А.И.* Метод сплайнов и решение некорректных задач теории приближений // М.: Изд. МГУ. 1983. 208 с.
18. *Мирошниченко В.Л.* Об интерполяции и аппроксимации сплайнами // Вычислительные системы. 1983. Вып. 100. С. 83–100.
19. *Свинын С.Ф.* Базисные сплайны в теории отсчетов сигналов // СПб: Наука. 2003. 118 с.
20. *Блаттер К.* Вейвлет-анализ. Основы теории // М.: Техносфера. 2006. 272 с.
21. *Ахмед Н, Рао К.* Ортогональные преобразования при обработке цифровых сигналов // М.: Связь. 1980. 248 с.
22. *Benedetto J., Ferreira P.* Modern Sampling Theory: Mathematics and Applications // Springer Science and Business Media LLC. 2012. 158 p.
23. *Benedetto J.* Sampling Theory and Wavelets // Signal Processing for multimedia. Ed. J.S. Burns. IOS Press. 1999. pp.19–33.

References

1. Whittaker E. On the functions which are represented by expansions of the interpolation theory. *Proc. Soc. Edinburgh*. 1915. vol. 35. pp. 181–194.
2. Kotelnikov V.A. [About bandwidth of “ether” and wire in telecommunications]. *Uspehi fizicheskikh nauk – Advances in Physical Sciences*. 2006. vol. 176. no. 7. pp. 762–770. (In Russ.).
3. Shannon C. Communications in the presence of noise. *Proc. IRE*. 1949. vol. 37. no. 1. pp. 10–21.
4. Harkevich A.A. [About Kotelnikov's theorem]. *Radiotekhnika – Radiotechnics*. 1958. vol. 1. no. 8. pp. 3–10. (In Russ.).
5. Papoulis A. [Error analysis in sampling theory]. *TIIEP – Institute of engineers in electronics and radiotechnics proceedings*. 1966. vol. 54. no. 7. pp. 34–43. (In Russ.).
6. Hurgin Ja.I., Jakovlev V.P. *Finitnye funkcii v fizike i tehnike* [Finite functions in science and technics]. М.: Nauka. 1971. 408 p. (In Russ.).
7. Cybakov B.S., Jakovlev V.P. [About accuracy of recovery of functions with a finite number of terms of the Kotelnikov series] *Radiotekhnika i jelektronika – Radiotechnics and electronics*. 1959. vol. 4. no. 3. pp. 542. (In Russ.).
8. Landau G. [Sampling method, information transfer and Nyquist frequency] *TIIEP – Institute of engineers in electronics and radiotechnics proceedings*. 1967. vol. 55. no. 10. pp. 56–62. (In Russ.).
9. Slepjan A.D. [About bandwidth]. *TIIEP – Institute of engineers in electronics and radiotechnics proceedings*. 1976. vol. 64. no. 3. pp. 4–14.
10. Hurgin Ja.I., Jakovlev V.P. [Progress in the Soviet Union in the field of finite functions theory and its applications in physics and technics] *TIIEP – Institute of engineers in*

- electronics and radiotechnics proceedings*. 1977. vol. 65. no. 7. pp. 16–45. (In Russ.).
11. Jerri A. [Shannon's sampling theorem, it's various generalizations and constraint]. *TIHER – Institute of engineers in electronics and radiotechnics proceedings*. 1977. vol 65. no. 11. pp. 53–89. (In Russ.).
 12. Eldar Y.C. *Sampling Theory: Beyond Bandlimited Systems*. University Printing House. Cambridge CB2 8BS. UK. 2015. 799 p.
 13. Ptachek M. *Cifrovoe televidenie. Teorija i tehnika* [Digital television. Theory and Technics]. M.: Radio i svjaz', 1990. 528 p. (In Russ.).
 14. Malla S. *Vejvlety v obrabotke signalov* [Wavelets in signal processing]. M.: Mir. 2005. 672 p. (In Russ.).
 15. Petersen D., Middleton D. Sampling and Reconstruction of Wave-Number-Limited Functions in N-dimensional Euclidean Spaces. *Information and Control*. 1962. no. 5. pp. 279–323.
 16. Marchuk G.I., Agoshkov V.I. *Vvedenie v proekcionno-setochnye metody* [Introduction to projection-grid methods]. M.: Nauka. 1981. 416 p. (In Russ.).
 17. Grebennikov A.I. *Metod splajnov i reshenie nekorrektnykh zadach teorii priblizhenij* [Spline method and solutions of some incorrect problems in approximation theory]. M.: Izd. MGU. 1983. 208 p. (In Russ.).
 18. Miroshnichenko V.L. [About spline interpolation and approximation] *Vychislitel'nye sistemy – Computer systems*. 1983. no. 100. pp. 83–100. (In Russ.).
 19. Svin'in S.F. *Bazisnye splajny v teorii otschetov signalov* [Basic splines in the signals sampling theory]. Spb: Nauka. 2003. 118 p. (In Russ.).
 20. Blatter K. *Vejvlet-analiz. Osnovy teorii* [Wavelet analysis: a primer]. M.: Tehnosfera. 2006. 272 p. (In Russ.).
 21. Ahmed N., Rao K. *Orthogonal'nye preobrazovanija pri obrabotke cifrovyyh signalov* [Orthogonal transforms for digital signal processing] M.: Svjaz'. 1980. 248 p. (In Russ.).
 22. Benedetto J., Ferreira P. *Modern Sampling Theory: Mathematics and Applications*. Springer Science and Business Media LLC. 2012. 158 p.
 23. *Benedetto J. Sampling Theory and Wavelets. Signal Processing for multimedia*. Ed. J.S. Burns. IOS Press. 1999. pp.19–33.

Свинин Сергей Федорович — д-р техн. наук, профессор, ведущий научный сотрудник лаборатории автоматизации научных исследований, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Санкт-Петербургского института информатики и автоматизации Российской академии наук (СПИИРАН). Область научных интересов: цифровая обработка сигналов. Число научных публикаций — 160. svinyins@mail.ru; 14-я линия В.О., д. 39, Санкт-Петербург, 199178; р.т.: +7(812)323-5139, Факс: +7(812)328-4450.

Svinyin Sergey Fedorovich — Ph.D., Dr. Sci., associate professor, leading researcher of laboratory for research automation, St. Petersburg Institute for Informatics and Automation of the Russian Academy of Sciences (SPIIRAS). Research interests: digital processing of biomedical signals. The number of publications — 160. svinyins@mail.ru; 39, 14-th Line V.O., St. Petersburg, 199178, Russia; office phone: +7(812)323-5139, Fax: +7(812)328-4450.

Попов Александр Игоревич — к-т техн. наук, доцент кафедры прикладной информатики, Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова. Область научных интересов: цифровая обработка сигналов в электрофизиологии, информационные системы, автоматизация научных исследований. Число научных публикаций — 31. aleneus@gmail.com, <http://dsplab.narf.u.ru>; Набережная Северной Двины, 17, Архангельск, 163000; р.т.: 8(8182)21-61-00, Факс: 8(8182)28-76-14.

Popov Aleksandr Igorevich — Ph.D., associate professor, associate professor of applied informatics department, Northern (Arctic) Federal University. Research interests: digital signal processing in electrophysiology, information systems, automation of researches. The number of publications — 31. aleneus@gmail.com, <http://dsplab.narf.u.ru>; 17, Northern Dvina Embankment, Arkhangelsk, 163000, Russia; office phone: 8(8182)21-61-00, Fax: 8(8182)28-76-14.

РЕФЕРАТ

Свиньин С.Ф., Попов А.И. **Финитные базисные функции в задачах формирования выборок сигналов конечной протяженности.**

Теоремы Котельникова-Шеннона для выборок отсчетов непрерывных сигналов – функций времени с финитным спектром, базируются на применении кардинального ряда Уиттекера. Они предполагают бесконечную длительность ряда. В реальности имеет место его усечение, которое мало влияет на ошибку восстановления, если длительность сигнала значительно превышает (на несколько порядков) период самой низкочастотной его составляющей. Для функций времени это условие часто выполняется. Но сигналы конечной длительности, особенно с разрывными значениями на границах, не являются целыми функциями. Спектры таких сигналов инфинитны и их значения в области высоких частот должны учитываться.

Проблемы восстановления непрерывной информации по дискретным выборкам значительно возрастают, если пространства функций имеют размерности два, три и более, а формы носителей сигналов расширяются до прямоугольников, параллелепипедов, гиперкубов и т.д. Существуют методы многомерного анализа, ориентированные на принцип финитности спектров и на операции их периодического продолжения в области высоких частот. Такой подход требует рассмотрения периодических продолжений и для исходных сигналов, что порождает искажения, поскольку получающиеся многомерные картины далеко не всегда соответствуют реальным физическим полям.

В статье оцениваются возможности и перспективы методов расчета необходимых выборок сигналов на основе теории финитных функций с конечной энергией с применением равенства Парсевала. Исследуются соотношения между полной энергией в пространстве сигнала и последовательностью спектральных энергий коэффициентов разложения сигналов по базисным функциям с компактными носителями. В качестве примеров финитных базисных функций приводятся полиномиальные В-сплайны, а также ортонормированные вейвлеты семейства Добеши.

В-сплайнам соответствуют аналитические выражения для описания их спектров Фурье, которые инфинитны. Уровень энергии спектра используется для оценки шага выборки. Вейвлетам Добеши присущи алгоритмы быстрых вейвлет-преобразований. Их результаты в виде наборов коэффициентов, а также октавный принцип накопления спектральной энергии, с ростом числа итераций обеспечивают необходимую величину шага.

Предложенный энергетический критерий расчета длин выборок финитных сигналов с применением финитных базисов имеет значительные перспективы для расширения на область сигналов – функций двух, трех и более переменных. Этому способствует свойство сепарабельности многомерных В-сплайнов и ортонормированных вейвлет-функций с компактным носителем, а также подобное свойство их спектров.

SUMMARY

Svinyin S.F., Popov A.I. **Finite Basic Functions in the Tasks of Sampling Signals of Finite Qxtension.**

Kotelnikov-Shannon sampling theorems of continuous signals - time functions with finite spectrum are based on the application of the Whittaker cardinal series. They presuppose the infinite duration of the series. In reality, there is a truncation, which has insignificant effect on error recovery, if the duration of the signal significantly exceeds (by several orders of magnitude) the period of the low-frequency component of it. For a function of time, this condition is often performed. But the signals of finite duration, especially with discontinuous values at the borders, are not integral functions. The spectra of these signals are infinite and their values at high frequencies beyond the Nyquist frequency must be counted.

The problems regarding restoration of continuous information using discrete samples increase significantly, if the function spaces have two, three or more dimensions, and the forms of signal carriers are expanded to rectangles, parallelepipeds, hypercube, etc. The methods of multidimensional analysis, oriented to the principle of finite spectra and operations of their periodic continuation technique to the areas of high frequencies, exist. These methods require consideration of the periodic extension for the original signals, causing the distortions, because a multidimensional picture does not always correspond to the real physical field.

In the article, the possibilities and perspectives of methods of calculating the required step of signal samples based on the finite functions theory with finite energy and with the use of Parseval equality are estimated. We investigate the relation between the total energy of space signal and the sequence of spectral energy coefficients of decomposition for basic functions with compact carriers. As the examples of the finite basic functions, the polynomial B-splines and orthonormal wavelets Daubechies are used.

B-splines have analytical expression to describe their own Fourier spectra, which are infinite. The energy level of the spectrum is used to estimate a sampling step. As for Daubechies wavelets, they are characterized by fast algorithms of wavelet transforms. The results of these transforms obtained in the form of coefficients sequences, as well as the principle of octave spectral energy accumulation during increasing number of iterations, provide the necessary step.

The proposed energy criterion for computing the lengths of samples of finite signals with finite basic functions has considerable perspectives for expansion to spaces of functions with two, three, or more variables. This is achieved due to the separability property of multidimensional B-splines and orthonormal wavelet functions with compact carriers and similar property of their spectra.