УДК 681.3

А.Ю. Переварюха

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ФРАКТАЛЬНЫХ ОБЪЕКТОВ В ДИНАМИКЕ МОДЕЛЕЙ УПРАВЛЕНИЯ БИОРЕСУРСАМИ

Переварюха А.Ю. **Об определении фрактальных объектов в динамике моделей управления биоресурсами.**

Аннотация. Настоящая статья посвящена разработке методов исследования ряда нелинейных эффектов в динамических системах, моделирующих процессы управляемых биологических систем. В предыдущей работе показаны проблемы практического моделирования биоресурсов, связанные с явлениями, выходящими за рамки интерпретации в предполагаемой области применения. Наблюдаемые экспериментально, но не имеющие строгих определений сложные переходные режимы оказывают важное влияние и требуют специальных методов анализа. Вводится классификация и предлагается метод исследования инвариантных множеств в фазовом пространстве динамических систем, моделирующих воспроизводство популяций рыб.

Ключевые слова: нелинейная динамика, математическая экология.

Perevarukha A.U. **On the determination of fractal objects in the dynamics of bioresources management models.**

Abstract. This article is devoted to the development of computational methods for the study of the nonlinear effects in the dynamic systems modeling the processes of controlled biological systems. In a previous paper shows the practical problems of modeling biological resources associated with the phenomena that go beyond the interpretation of of the area you application. Observed experimentally, but do not have strict definitions of complex transients have an important impact and require special methods of analysis. We introduce a classification and a method for research in the computing environment of invariant sets in phase space of dynamical systems, modeling the reproduction of fish populations.

Keywords: nonlinear dynamics, mathematical ecology.

1. Введение. Динамические системы, в частности, используемые в моделировании унимодальные отображения и некоторые отображения со знакопеременным шварцианом, обладают возможностью резкого проявления изменений, появления топологически неэквивалентных фазовых портретов. Разрабатываемые для практических задач модели характеризуются возникновением инвариантных негладких многообразий, сложных подмножеств, несвязной и бесконечно слоистой структуры, за которыми с подачи Бенуа Мандельброта закрепился термин «фрактальные» [1]. Привычно читателю в связи с упоминанием фракталов представляют различные диковинные геометрические построения – такие, как ковер Серпинского, снежинка Хельги фон Кох или функция Вейерштрасса, однако нас будут интересовать не столь наглядные построения, а некие инвариантные множества, порождаемые траекторией динамической системы, требующие разработки специальных вычислительных методов исследования.

Теоретические математические исследования на основе анализа вычислительных экспериментов позволили установить сходство асимптотически устойчивых стационарных состояний нелинейных динамических систем, названных Д. Рюэлем «странными», и указанных самоподобных геометрических построений на основе вычисления фрактальной (хаусдорфовой) размерности.

Важность исследования подобных объектов в том, что качественно различные режимы поведения траектории могут критическим образом влиять на результаты практической интерпретации численных расчетов, полученных в ходе моделирования. Данная статья посвящена методам определения фрактальных границ областей притяжения, экспериментально обнаруженных ранее в исследовании предложенных автором моделей, разработанных для анализа последствий управления репродуктивным процессом популяций при постоянной эксплуатации их запасов.

2. Неочевидность интерпретации моделей биологических процессов. В арсенале математической экологии существует ряд обобщенных типов моделей, развивавшихся практически параллельно различными научными школами. Однако стоит уделить внимание не только адекватности модели описываемым процессам как формализации некоторой эмпирической зависимости, необходимо рассматривать методы применения математического аппарата. Необоснованный выбор модели или неправильное применение, недостаточное исследование свойств, неправильная классификация математического аппарата приводит к противоречивым выводам.

В случае существования нескольких моделей с противоположным по смыслу поведением необходимо формулировать гипотезы в виде утверждений, требующих обоснований, опровергая противоречивые. Любое математическое описание процессов в данной практической области (кроме регрессионных моделей) базируется на биологическом обосновании, которое будем называть теоретическим базисом. Часто базис строился на умозрительных предположениях, без подтверждения анализом реальных данных, как для дискретных моделей описывающих квадратичную зависимость смертности от плотности.

Рассмотрим теоретический базис моделей теории формирования пополнения. Необходимо ответить на вопросы, как качественно может меняться динамика популяции при изменении определенных параметров, удельной скорости воспроизводства или промысловой смертности? Наши исследования приводят к выводам, что увеличение репродуктивного потенциала популяции повышает число возможных изменений качественных режимов динамики популяций. В некоторых работах, например [2], утверждалось, что повышение репродуктивного потенциала приводит к хаотизации динамики изменения численности популяций рыб. Промысел в таких работах представляется средством стабилизации непредсказуемых колебаний, что необоснованно данными наблюдений и противоречит выводам Рикера, изложенным в работе с красноречивым названием «Big effect from small causes: two examples from fish population dynamics» о существенных последствиях незначительного перелова нерестовой части популяции лососевых [3].

3. Возможности интервального расширения. В цикле работ [4–7] по анализу и разработке новых непрерывно-дискретных моделей воспроизводства осетровых рыб нами были показаны результаты:

1. Сценарий хаотизации Фейгенбаума [8], наблюдаемый в моделях динамики популяций, неразрывно связан с не интерпретируемыми биологически эффектами (кризисами аттрактора, субдукцией, перемежаемостью) при изменении поведения траектории.

2. Реализация сценария хаотизации в динамических системах вида $x_{n+1} = f(\mathbf{a}; x_n)$ через каскад бифуркаций удвоения периода цикла является следствием выполнения критериев теоремы Сингера [9], не имеющих отношения к биологической проблематике характеристиках, включающих отношения второй и третьей производных функции [5].

3. Известные ранее модели формирования пополнения, удовлетворяющие критериям Сингера, оказываются взаимно противоречивыми при анализе знака влияния фактора, отражаемого введенным в модель бифуркационным параметром [4].

4. Для биологических моделей возможны другие виды хаотического режима, несвязанные с образованием аттрактора Фейгенбаума, определенный как переходный хаотический режим [7].

5. Возможно возникновение хаотического аттрактора подковообразной структуры после обратной касательной бифуркации.

Учитывая все неявные противоречия и полученные вновь результаты, необходимо ставить проблему новых методов представления в моделях теории формирования пополнения параметра, отражающего репродуктивный потенциал популяции (мальтузианский параметр). Цель модификации заключается в преодолении невозможности биологической интерпретации сложных нелинейных эффектов, свойственных динамическим системам. Покажем возможные математические методы для обхода проблемы.

Предложение **1**. Представление мальтузианского параметра популяции не ограничено точечной числовой величиной в дискретной динамической модели.

Пусть **a** независимый от численности интервально заданный параметр репродуктивного потенциала:

$$\mathbf{a} = \{a \mid a \in \mathbb{R}, \underline{a} \le a \le \overline{a}\}$$

Нелинейную динамику интересует происходящее с динамической системой при последовательном изменении управляющего параметра.

Предложение **2**. Под воздействием факторов и условий среды обитания, интервальный параметр **a** может сдвигаться не растягиваясь.

$$\text{rad } \mathbf{a} = 1/2(\overline{a} - \underline{a}) = const.$$

Предложение **3**. Определяющая изменение численности популяции зависимость описывается функцией, удовлетворяющей критериям теоремы Сингера (*SU*-отображением):

1. $S_\psi = \dfrac{\psi'''(x)}{\psi'(x)} - \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{\psi''x)}{\psi'(x)}\right)^2 < 0.$

2. $f'(x_m) = 0,\ f'(x) \ne 0$ при $x \ne x_m$.

Замечание **1**. Тогда, с учетом Предложения 1, будем оперировать интервальным расширением $\mathbf{f}(\mathbf{a},x)$.

Замечание **2**. Условия Предложения 3 всегда выполняются для модели Рикера:

$$\psi'(x) = a\mathbf{e}^{-bx}(1 - bx),$$

$$\psi''(x) = ab\mathbf{e}^{-bx}(bx - 2),$$

$$\psi'''(x) = ab^2\mathbf{e}^{-bx}(3 - bx) \text{ и } \psi^{(n)}(x) = (-1)^n ab^{n-1}\mathbf{e}^{-bx}(bx - n),$$

$$S_\psi = b^2\frac{-b^2x^2 + 4bx - 6}{2(1 - bx)^2} \text{ и } S_\psi < 0 \text{ для } x \in \Re.$$

Но не всегда для модели Дж. Шепарда: $f(x) = \dfrac{ax}{1 + \left(\dfrac{x}{K}\right)^b}$ так как

$f(x^*) = x^* = K\sqrt[b]{a - 1}$, и является двухпараметрическим отображением:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{(K^b + x^b)aK^b - ab(Kx)^b}{(K^b + x^b)^2}, \frac{df(x^*)}{dx} = \frac{a - ba + b}{a}.$$

При b<1 критических точек нет, при b=2 функция имеет критическую точку $x=K$. О взаимно противоречивой интерпретации двух моделей и причинах возникающих противоречий изложено в статье [4].

При использовании интервального подхода необходимо оценить радиус интервала **a**. Возможны различные подходы, основанные как на знании биологии вида, так и на фундаментальных математических представлениях, как эмпирически полученный в результате вычислений результат Фейгенбаума, изучавшего свойства отображения $x_{n+1}=4\lambda x_n(1-x_n)$ с целью определения значений λ, при которых происходит удвоение периода цикла, возникшего после выполнения условия $\left|\frac{df(\mathbf{a},x)}{dx}\right|_{x=x^*}=1,\ f(\mathbf{a},x^*)=x^*$.

Интересно отметить, что Фейгенбауму в отсутствие ЭВМ приходилось производить вычисления с помощью калькулятора. Именно это обстоятельство позволило ему установить геометрическую сходимость значений λ и определить «константу Фейгенбаума» δ. Если Λ_n значение параметра, при котором период удваивается в n-й раз то тогда величина δ_n быстро приближается к постоянной величине δ:

$$\delta_n=\frac{\Lambda_{n+1}-\Lambda_n}{\Lambda_{n+2}-\Lambda_{n+1}},\ \lim_{n\to\infty}\delta_n=4{,}6692.$$

Так за конечное приращение бифуркационного параметра период цикла становится бесконечным (тогда говорят о хаотизации), причем интервал между последовательными усложнениями поведения траектории динамической системы быстро сокращается. Теоретические объяснение явления «универсальности в поведении нелинейных систем» сложны, и построению строгой математической теории были посвящены многие работы, однако некоторые утверждения до сих пор базируются на результатах вычислительных экспериментов. Сложным остается вопрос об исчерпывающем и неизбыточном определении понятия детерминированного хаоса.

Замечание **3**. Поведение динамической системы модели Рикера $x_{n+1}=ax_n\mathbf{e}^{-bx_n}$ отличается от квадратичного отображения Фейгенбаума. В модели Рикера невозможен граничный кризис аттрактора.

Замечание **4**. Хаотический режим в дискретных динамических системах не является тождественным процессом по отношению к белому шуму. Вероятность нахождения траектории в одних частях аттрактора выше, чем в других, что связано с его геометрической структурой.

С учетом известного нам о поведении моделей Рикера и Шепарда:

Предложение **4**. Пусть ширина интервального параметра **a** при $\inf \mathbf{a} = \Lambda_1$ содержит внутри как минимум одно бифуркационное значение $\Lambda_n : \operatorname{rad} \mathbf{a} = \frac{1}{2}[\Lambda_2 - \Lambda_1]$.

Выдвинем на основе предложений 1-4 следующую гипотезу.

Гипотеза **1**. Возрастание репродуктивного потенциала увеличивает набор возможных изменений качественной динамики, которые могут происходить для популяции.

При использовании концепции интервальной неопределенности увеличение репродуктивного потенциала не приводит однозначно к выводу о хаотизации, но увеличивает количество «степеней свободы» качественно различных типов динамики численности популяции.

Замечание **5**. Возможно, что количество изменений, происходящих для интервала **a**, может быть бесконечным.

Тогда для исследователя будет важно знать некоторое усредненное по интервалу качественное состояние динамической системы. Для оценивания суперпозиции поведения интервального расширения отображения вполне применимы методы масштабируемой решетки с вычислением одного агрегированного параметра, в виде которого может выступать старший показатель Ляпунова.

Предложение **5**. Пусть **w** ограниченный интервал $[\underline{w}, \overline{w}]$, внутри которого может принимать различные значения предложенный нами интервально заданный мальтузианский параметр.

$$\mathbf{a} = \{a \mid a \in \mathbf{w}, \underline{a} \le a \le \overline{a}\}.$$

Ограничение обосновано тем, что для биологической модели невозможно неограниченное возрастание амплитуды апериодических колебаний. Изменение интервального параметра должно лежать в ограниченном интервале, «интервале интерпретируемости».

4. Определение фрактальности границ областей притяжения аттракторов. Изменения аттракторов из-за колебания в некотором интервале бифуркационного параметра далеко не исчерпывают все нелинейные эффекты и соответственно связанные с ними проблемы объяснения и применения математических моделей биологических процессов. У каждого аттрактора есть область притяжения, а если аттрактор не является единственным, то у каждой области есть граница – некоторое инвариантное множество точек, которое тоже может принимать странные формы и изменяться. В унимодальном отображении границей областей будет неустойчивая точка репеллер, для функций с несколькими экстремумами все сложнее.

Вычислительными экспериментами показано, что хаотический режим, реализующийся для траектории разработанной нами модели при $\forall n: f^n(x_0) \in (x_1^*, x_2^*)$ является переходным хаотическим режимом, так как $\exists n: f^n(x_0) \notin (x_1^*, x_2^*)$. Траектория с выбранной некоторой начальной точкой $x_0 \in (x_1^*, x_2^*), x_0 \notin \Xi$ притягивается к одному из двух существующих аттракторов.

<u>Утверждение.</u> Описанное хаотическое поведение является следствием особой структуры границы Ξ областей притяжения Ω_i.

Для обоснования утверждения необходимо ввести определения важных свойств границ областей притяжения и доказать их наличие в модели, с применением алгоритма на основе численного исследования.

<u>Определение **1**.</u> Границей областей притяжения аттракторов будем называть множество граничных точек $\Xi(p)$ таких, что траектория с начальной точкой p не притягивается к какому-либо аттрактору и для любой $\varepsilon>0$ на интервале $(p - \varepsilon, p + \varepsilon)$ содержит хотя бы две разные точки, траектории которых стремятся к различным аттракторам.

Граница областей притяжения инвариантное множество.

<u>Определение **2**.</u> Граничную точку p будем называть достижимой из области притяжения Ω, если существует точка $q \in \Omega$ такая, что интервал $[p, q]$ или $[q, p]$ не содержит другой граничной точки.

Свойство *достижимости* позволит нам с использованием вычислительных экспериментов определить и измерить важную характеристику границы областей притяжения аттракторов для моделей теории формирования пополнения популяций рыб.

<u>Определение **3**.</u> Границу областей притяжения будем называть фрактальной, если не существует граничных точек, достижимых одновременно из двух областей.

Что бы наблюдать определенные нами свойства границ применительно к биологическим моделям, представим отдельно отображение $f: I \to I,\ f(x) = \psi^3(x), \psi(x) = ax\mathbf{e}^{-bx}$, то в диапазоне значений $\Delta a = a_c - a_t$ существования периодического окна $p = 3$, отображение имеет три аттрактора, и границы областей притяжения этих аттракторов становятся фрактальными согласно Определению 3.

Динамическая система, в фазовом пространстве которой присутствует инвариантное множество границы, соответствующее введенным определениям будет обладать следующими свойствами:

1. Существует вероятность попадания в режим, когда невозможно заранее определить принадлежность начальной точки области притяжения, и в этом заключается эффект неопределенности асимптотической динамики траектории.

2. Продолжительность переходного хаотического режима, связанного с фрактальностью границы областей притяжения чувствительно зависит от выбора начальной точки.

3. Вероятность принижения к альтернативным аттракторам не одинакова.

Сделаем практическое замечание, что полученный вывод о том, что она не обладает достаточными прогностическими функциями вследствие наличия фрактального характера границы области притяжения, как и в случае наличия хаотического аттрактора никак не связан с опровержением адекватности модели. Необходима теоретическая работа в области биологического обоснования наблюдаемых эффектов, что позволит приблизить фундаментальные математические представления нелинейной динамики к практическим проблемам оптимального промысла популяций рыб.

5. Заключение. На основе гибридной модели, описанной в предыдущей работе, мы рассмотрели перспективные методы преодоления проблемы интерпретируемости нелинейных эффектов, возникающих в динамических системах при изменении параметра, описывающего репродуктивный потенциал популяции с точки зрения экспериментальных данных наблюдений и теоретических представлений популяционной биологии. Определены предложения и ограничения по применению интервально заданных параметров. Сформулирована гипотеза об увеличении количества допустимых, но качественно различных режимов динамики популяции при увеличении репродуктивного потенциала.

Введены определения достижимых точек и фрактальных границ, позволяющие исследовать данные объекты вычислительными методами. Отметим, что для отображений возможны другие виды негладких границ, в настоящее время активно исследуются примеры, где границы областей притяжения аттракторов двумерного комплексного отображения становятся непрерывными нигде не дифференцируемыми кривыми [10]. На настоящий момент известно несколько разновидностей непритягивающих хаотических множеств, и работы по изучению их свойств далеко не завершены. Выделяют хаотические сёдла, возникающие на месте странных аттракторов, изрешеченные (riddled basins) и перемешанные (intermingled basins) области притяжения аттракторов. Отдельно выделяются «Вада границы» областей притяжения (Wada basins) фрактальные границы, окрестность каждой точки которых содержит непустое пересечение, следующего вида: $(p-\varepsilon, p+\varepsilon)\cap\Omega_1\cup\Omega_2\cup\Omega_3\neq\varnothing$.

Литература

1. *Мандельброт Б.* Фракталы и хаос. Множество Мандельброта и другие чудеса. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009. 392 с.
2. *Животовский Л.А., Храмцов В.В.* Модель динамики численности горбуши *Oncorhynchus gorbusha* // Вопросы ихтиологии. 1996. Т. 36. №3. С. 369–385.
3. *Ricker W.* Big effect from small causes: two examples from fish population dynamics // Journal Fisheries research board of Canada. 1963. Vol. 20. №2. P. 257–264.
4. *Переварюха А.Ю.* Нелинейные эффекты и переходные режимы в динамике новых моделей управления биоресурсами // Труды СПИИРАН. 2011. Вып. 16. С. 243–255.
5. *Perevaryukha A. Yu*. Uncertainty of Asymptotic Dynamics in Bioresource Management Simulation // Automatic Control and Computer Sciences. 2011. Vol. 45. №4. P. 223–232.
6. *Переварюха А.Ю.* Анализ опыта моделирования биоресурсов с точки зрения современной теории динамических систем // Экологические системы и приборы. 2011. №11. С. 17–21.
7. *Переварюха А.Ю.* Интерпретация поведения моделей динамики биоресурсов и моментальная хаотизация в новой модели // Нелинейный мир. 2012. №4. С.255–261.
8. *Singer D.* Stable orbits and bifurcations of the maps on the interval // SIAM journal of applied math. 1978. V. 35. P. 260–268.
9. *Feigenbaum M.J.* Universal behavior in nonlinear systems // Physica D. 1983. Vol. 7. №1. P. 16–39.
10. *Kennedy J., Yorke J.* Topological horseshoes // Transactions of the American Mathematical Society. 2001. Vol. 353, № 6. P. 2513–2530.

Переварюха Андрей Юрьевич — канд.техн.наук, младший научный сотрудник лаборатории прикладной информатики и проблем информатизации общества СПИИРАН. Область научных интересов: моделирование биологических процессов, сценарии хаотизации динамических систем. Число научных публикаций — 38. madelf@pisem.net; СПИИРАН, 14-я линия В.О., д. 39, г. Санкт-Петербург, 199178, РФ; р.т. +7(812)328-0103.

Perevarukha Andrey Urievich — Ph.D., junior researcher, Applied Informatics and Problems of Society Information, SPIIRAS. Research interests: modeling of biological processes, routs to chaos. The number of publications — 36. madelf@pisem.net; SPIIRAS, 39, 14-th Line V.O., St. Petersburg, 199178, Russia; office phone +7(812)328-0103.

Поддержка исследований. В публикации представлены результаты исследований, поддержанные грантом РФФИ для молодых ученых «мой первый грант», рук. Переварюха А.Ю.

Рекомендовано лабораторией прикладной информатики, заведующий лабораторией Юсупов Р.М., член.-корр. РАН, д-р техн. наук, проф.
Статья поступила в редакцию 10.11.2012.

РЕФЕРАТ

Переварюха А.Ю. **Об определении фрактальных объектов в динамике моделей управления биоресурсами.**

В статье рассмотрены перспективные методы преодоления проблемы интерпретируемости нелинейных эффектов, возникающих в динамических системах при изменении параметра, описывающего репродуктивный потенциал популяции с точки зрения экспериментальных данных наблюдений и теоретических представлений популяционной биологии. Определены предложения и ограничения по применению интервально заданных параметров. Сформулирована гипотеза об увеличении количества допустимых, но качественно различных режимов динамики популяции при увеличении репродуктивного потенциала.

Основное внимание при определении свойств моделей уделено нелинейным эффектам, возникающим в простых моделях динамики биологических популяций. Подобные нелинейные эффекты имеют фундаментальное значение для осмысления результатов применения моделей на практике, так влияют на качественный характер динамики. Показаны особенности и необходимые критерии хаотизации моделей на примере известных в математической биологии моделей Рикера и Шепарда. Модели были предложены в рамках формализации теории зависимости запаса и пополнения популяций промысловых рыб. Обе модели относятся к классу *SU*-отображений. Установлено, что две модели в рамках одной биологической теории оказываются взаимно противоречивыми с точки зрения сущностной интерпретации сценария перехода к хаосу. Переход к хаосу в одном случае интерпретируется как следствие увеличения репродуктивного потенциала, а во втором возникает при увеличении сопротивления среды. В действительности всё зависит только от критерия устойчивости стационарной точки, как функции параметра модели и не имеет биологической интерпретации.

Обнаружено отсутствие прямой связи опровержения адекватности модели с полученным выводом о том, что модель не обладает достаточными прогностическими функциями вследствие наличия фрактального характера границы области притяжения, как и в случае наличия хаотического аттрактора. Необходима теоретическая работа в области биологического обоснования наблюдаемых эффектов, что позволит приблизить фундаментальные математические представления нелинейной динамики к практическим проблемам оптимального промысла популяций рыб. При использовании концепции интервальной неопределенности увеличение репродуктивного потенциала не приводит однозначно к выводу о хаотизации, но увеличивает количество «степеней свободы» качественно различных типов динамики численности популяции. Изменения аттракторов из-за колебания в некотором интервале бифуркационного параметра далеко не исчерпывает все нелинейные эффекты и соответственно связанные с ними проблемы объяснения и применения математических моделей биологических процессов.

SUMMARY

Perevarukha A.U. **On the determination of fractal objects in the dynamics of bioresources management models.**

The article considers the perspective methods to overcome the problem of interpretability of the nonlinear effects arising in dynamical systems as the parameter describing the reproductive potential of populations in terms of experimental observations and theoretical concepts of population biology. Determined by supply and restrictions on the use of interval specified parameters. The hypothesis of increasing the number of valid, but qualitatively different regimes of population dynamics with an increase in reproductive potential.

The main consideration is given on definition of properties of nonlinear effects in simple models of the dynamics of biological populations. Such nonlinear effects have fundamental importance for understanding the results of the models in practice, as this affects have the qualitative nature for dynamics. The features and the necessary criteria for chaotization of the models on the example of well-known in mathematical biology Ricker and Shepard maps. Models have been proposed in the framework formalization for the theory of the stock and recruitment dependency of populations of commercially important fish. Both models belong to *SU*-maps. Established, that the two models within a same biological theory are mutually contradictory in terms of essential interpretation of the scenario of transition to chaos. Transition to chaos in one case interpreted as a consequence of increased reproductive potential, while the second arises when the resistance of the environment factors increase. In reality, it depends on the stability criterion of a stationary point, which is functionally dependent on the parameters of the model and this phenomenon has no biological interpretation.

We formulate a practical conclusion that the resulting conclusion is that it does not have sufficient predictive functions due to the presence of the fractal nature of the boundary of the domain of attraction, as in the case of a chaotic attractor is not affiliated with a refutation of the adequacy of the model. Theoretical work is needed to substantiate the observed biological effects, which will bring fundamental mathematical representations of nonlinear dynamics to practical problems of optimal harvesting of fish populations. By using the concept of interval of uncertainty increases the reproductive potential does not lead unequivocally to the conclusion that chaos, but it increases the number of "degrees of freedom is" qualitatively different types of dynamics of population size. Changes due to fluctuations of the attractors in a certain range of bifurcation parameter is far from exhausting all the nonlinear effects and, accordingly, the related problems of explanation and application of mathematical models of biological processes.