

А.С. МОЖАЕВ, А.А. НОЗИК, А.В. СТРУКОВ  
**ОЦЕНКА НАДЕЖНОСТИ СИСТЕМЫ  
ИЗ ЭЛЕМЕНТОВ С ТРЕМЯ СОСТОЯНИЯМИ  
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПК АРБИТР**

---

*Можяев А.С., Нозик А.А., Струков А.В. Оценка надежности системы из элементов с тремя состояниями с использованием ПК АРБИТР.*

**Аннотация.** Описываются методики решения задач оценки надежности систем, состоящих из элементов с тремя состояниями. Показано, что развитие логико-вероятностных методов (ЛВМ), позволяет устранить такие недостатки ЛВМ, как анализ лишь двух состояний у элементов системы и только в предположении их независимости. На примере двух моделей влияния отказов элементов на надежность системы рассматривается методика решения задач с использованием ПК АРБИТР, программно реализующего возможности аппарата групп несовместных событий (ГНС), разработанного в рамках общего логико-вероятностного метода (ОЛВМ). В приложениях доказаны и описаны преобразования логических и вероятностных функций для несовместных событий.

**Ключевые слова:** отказ типа «Обрыв», отказ типа «Замыкание», группа несовместных событий, эквивалентированные схемы, преобразования логических и вероятностных функций.

*Mozhaev A.S., Nozik A.A., Strukov A.V. Reliability Assessment for Three-State Element Systems Using ARBITER Software.*

**Abstract:** The article deals with reliability assessment methods for systems with three-state elements. It is shown that further development of conventional logic-and-probabilistic methods (LPM) eliminates the LPM deficiencies such as analysis of only two element states and assumption of their independency. Two models of element failure impact on the system reliability are shown which demonstrate the principles of reliability assessment using the ARBITER software which incorporates capabilities of algebra of disjoint event groups and is based on the general logic-and-probabilistic method (GLPM). Description of logic and probabilistic function transformations for disjoint events is shown in the annexes.

**Keywords:** “Fail-closed” mode, “fail-open” mode, group of disjoint events, equivalent schemes, logic and probabilistic function transformation.

---

**1. Введение.** Границы применимости булевых моделей при анализе надежности систем, состоящих из элементов, которые могут находиться в трех состояниях, существенно расширяются при построении логико-вероятностных моделей с использованием алгебры несовместных событий. В работе Б.Диллона и Ч.Сингха [2] свойство несовместности упоминается, но вывод основных формул основан на анализе перебора всех возможных состояний систем, а не на особенностях алгебры несовместных событий. Алгебра несовместных событий фрагментарно рассматривается в работе К.Шеннона [7] для демонстрации логической записи условий реализации зависимых

событий. Элементы алгебры групп несовместных событий (ГНС), для случая несовместности прямых исходов событий приведены в [6], для случая несовместности инверсных исходов событий приведены в [4]. Примеры использования полиномиального разложения для анализа надежности сложных структур с элементами, которые могут находиться в трех состояниях, приведены в [5]. В данной статье описывается технология программной реализации алгебры ГНС в программном комплексе АРБИТР, позволяющая решать задачи анализа надежности сложных структур при различных моделях влияния отказов типа «Обрыв» и «Замыкание» на состояние системы. В приложении приведены доказательства свойств алгебры ГНС для алгебраических и вероятностных преобразований.

**2. Описание первой модели влияния отказов элементов на состояние системы.** В работе Б. Диллона и Ч. Сингха [2] предложена следующая модель влияния отказов элементов на состояние системы:

а) для последовательного соединения

отказ хотя бы одного из элементов типа «Обрыв» приводит к отказу всей системы,

отказ всех элементов типа «Замыкание» приводит к отказу системы,

отказ нескольких элементов типа «Замыкание» при наличии хотя бы одного работоспособного элемента не приводит к отказу системы;

б) для параллельного соединения

отказ хотя бы одного из элементов типа «Замыкание» приводит к отказу всей системы.

В табл. 1 представлены состояния системы из двух последовательно соединенных элементов с тремя состояниями и приведены выражения для расчета вероятностей этих состояний.

Таблица 1. Таблица состояний последовательной системы

N сост.	Элемент X1	Элемент X2	Состояние системы Yc	Вероятность состояния (разные элем.)	Вероятность состояния (одинак. элем.)	Значения вероятностей
1	2	3	4	5	6	7
1	N	N	1	$P_1P_2$	$p^2$	0.49
2	S	N	1	$q_{s1}P_2$	$q_s p$	0.07
3	N	S	1	$P_1q_{s2}$	$pq_s$	0.07
4	N	O	0	$P_1q_{o2}$	$pq_o$	0.14

Продолжение таблицы 1

1	2	3	4	5	6	7
5	O	N	0	$q_{o1}p_2$	$q_o p$	0.14
6	O	O	0	$q_{o1}q_{o2}$	$q_o^2$	0.04
7	S	O	0	$q_{s1}q_{o2}$	$q_s q_o$	0.02
8	O	S	0	$q_{o1}q_{s2}$	$q_o q_s$	0.02
9	S	S	0	$q_{s1}q_{s2}$	$q_s^2$	0.01

В табл. 1 использованы следующие сокращения и обозначения:

**N**, **S**, **O** — состояния работоспособности, отказа типа «Замыкание» или типа «Обрыв» - соответственно;

**1** или **0** — работоспособное состояние или состояние отказа системы;

$p_1$  или  $p_2$  — вероятность работоспособного состояния элемента (**N**);

$q_{o1}$  или  $q_{o2}$  — вероятность отказа элемента 1 или 2 типа «Обрыв» (**O**);

$q_{s1}$  или  $q_{s2}$  — вероятность отказа элемента 1 или 2 типа «Замыкание» (**S**).

В табл. 1 в столбце «Значения вероятностей» приведены расчеты для следующих исходных данных [2]:

$$q_{o1} = q_{o2} = 0.2; q_{s1} = q_{s2} = 0.1;$$

$$p_1 = 1 - q_{o1} - q_{s1} = 0.7; p_2 = 1 - q_{o2} - q_{s2} = 0.7.$$

В табл. 1 состояния 1–3 системы относятся к работоспособным, следовательно, вероятность безотказной работы системы

$$Rc = p_1 p_2 + q_{s1} p_2 + p_1 q_{s2}, \quad (1)$$

а для случая одинаковых (равнонадежных) элементов

$$Rc = p^2 + 2pq_s = 0.7^2 + 2 \cdot 0.7 \cdot 0.1 = 0.63. \quad (2)$$

Поскольку для одного элемента

$$p = 1 - q_s - q_o, \quad (3)$$

аналитическая часть выражения (2) может быть преобразована следующим образом

$$\begin{aligned}
 Rc &= p^2 + 2pq_s = (1 - q_s - q_o)2 + 2(1 - q_s - q_o)q_s = \\
 &= 1 + q_s^2 + q_o^2 - 2q_s - 2q_o + 2q_sq_o + 2q_s - 2q_s^2 - 2q_sq_o = \quad (4) \\
 &= 1 - 2q_o + q_o^2 - q_s^2 = (1 - q_o)^2 - q_s^2.
 \end{aligned}$$

На основе выражения (4) можно доказать, что вероятность безотказной работы системы из  $n$ -последовательно соединенных элементов равна

$$Rc = \prod_{i=1}^n (1 - q_{oi}) - \prod_{i=1}^n q_{si} = Rco - Rcз, \quad (5)$$

где  $Rco$  — безотказность по «обрыву»;

$Rcз$  — вероятность отказа системы из-за «замыкания».

Выражение (5) приведено в [2, с.166] и представлено формулой (6.152) в работе профессора И.А. Рябина [5, с.189] со следующим полезным в дальнейшем определением:

«Надежность системы с последовательным соединением есть вероятность того, что система не откажет из-за отказов элементов типа «Обрыв», минус вероятность того, что система откажет из-за отказов элементов типа «Замыкание».

Можно показать, что для параллельного соединения элементов формула (5) также справедлива. Кроме того, и для других, более сложных структур формула (5) может быть применена, если модель отказа участков с последовательным или параллельным соединением соответствует описанной выше.

В частности в [2, с.170] приведено следующее выражение для оценки вероятности  $R_b$  безотказной работы мостиковой (bridge) схемы с учетом отказов элементов двух типов — типа «Обрыв» и типа «Замыкание»:

$$R_b = 1 - \sum_{k=1}^2 Q_{ок} = 1 - Q_{o1} - Q_{o2}, \quad (6)$$

где  $Q_{o1}$ ,  $Q_{o2}$  — вероятности появления системного отказа типа «Обрыв» ( $k=1$ ) и типа «Замыкание» ( $k=2$ ). Вероятности  $Q_{o1}$  и  $Q_{o2}$  рассчитываются путем подстановки в выражение для вероятности безотказной работы системы соответственно вероятностей отказов элементов типа «Обрыв» ( $q_{oi}$ ) и «Замыкание» ( $q_{si}$ ). Например, для вероятности отказа системы из-за отказов типа «Замыкание» в [2] приводится следующее выражение для вероятностной функции (ВФ)

$$\begin{aligned}
Q_{ok} = & 2 \prod_{i=1}^5 q_{si} - \prod_{i=2}^5 q_{si} - \prod_{\substack{i=3 \\ i \neq 2}}^5 q_{si} - \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq 3}}^5 q_{si} - \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq 4}}^5 q_{si} - \\
& - \prod_{i=1}^4 q_{si} + \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq 2,4}}^4 q_{si} + \prod_{i=2}^4 q_{si} + \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq 2,3}}^4 q_{si} + \prod_{\substack{i=2 \\ i \neq 3,4}}^5 q_{si},
\end{aligned}
\tag{7}$$

полученное с использованием формулы вероятности суммы совместных событий, часто называемой иностранными авторами формулой «включения-выключения» (IE) или формулой Пуанкаре. Для понимания формулы Пуанкаре (7) полезно познакомиться с рекуррентным алгоритмом §5.4 и табл. 13 на стр.119 [5].

Следовательно, так как функция работоспособности системы (ФРС) состоит из параллельных кратчайших путей успешного функционирования (КПУФ), а каждый КПУФ есть последовательное соединение элементов, то формула (5) может быть применена к любой монотонной структуре (последовательной, параллельной, мостиковой и др.) с указанной выше моделью влияния вида отказов элементов на состояние системы.

**3. Решение задач на ПК АРБИТР. Первая модель.** Основной особенностью анализа надежности систем элементов с тремя состояниями является учет *несовместности* событий отказов элементов типа «Замыкание» и «Обрыв» [2, с.165]. Перепишем уравнение (5) в следующем виде

$$Rc = Rco - Qcз = 1 - (Qco + Qcз), \tag{8}$$

где  $Qco$  – вероятность отказа системы из-за отказов элементов типа «Обрыв».

Правая часть выражения (8) соответствует вероятности события, логическая функция которого представлена конъюнкцией отрицаний двух несовместных событий [6, с.51]. Событиями являются отказы системы по причине «обрыва» и «замыкания». Доказательство этого свойства ГНС приведено в Приложении 1.

Для решения поставленной задачи в ПК АРБИТР используется аппарат групп несовместных событий (ГНС) общего логико-вероятностного метода (ОЛВМ) [3, 6], который может быть применен не только к отдельным событиям, но и к событиям, объединенным в эквивалентированные схемы.

Методика решения на ПК АРБИТР включает в себя следующие этапы.

### 1. Построение эквивалентированной схемы №1 для оценки вероятности отказа системы по «обрыву».

Структура схемы совпадает со структурой заданной системы, а в качестве исходных данных используются вероятности безотказной работы элементов с учетом **только** отказов типа «обрыв», то есть  $p_i = 1 - q_{oi}$ .

### 2. Построение эквивалентированной схемы №2 для оценки вероятности отказа системы по «замыканию».

Структура схемы совпадает со структурой заданной системы, а в качестве исходных данных используются вероятности отказов элементов типа «замыкание» ( $q_{si}$ ).

### 3. Эквивалентированные схемы соединяются как конъюнкция отрицаний двух несовместных событий

На рис. 1–3 представлены фрагменты экранного интерфейса и схемы функциональной целостности (СФЦ), соответствующие указанным выше этапам решения задачи для случая последовательного соединения элементов с исходными данными, приведенными в табл. 1.

#### Этап 1.

На рис. 1 показан фрагмент экранного интерфейса с СФЦ для расчета вероятности отказа последовательной системы. Согласно принятой модели влияния отказов элементов типа «обрыв», отказ системы (критерий  $y^3$ ) происходит при отказе либо первого, либо второго элемента.

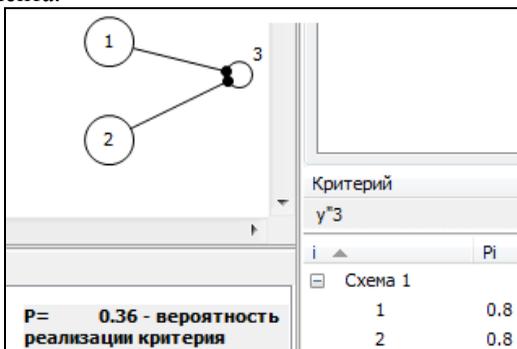


Рис. 1. Построение СФЦ для оценки вероятности отказа системы по «обрыву».

Для принятых в табл. 1 исходных данных  $Q_{co} = 1 - (1 - q_{o1})(1 - q_{o2}) = 1 - 0.8 \cdot 0.8 = 0.36$ .

Данный результат соответствует сумме вероятностей состояний 4÷8 табл. 1.

Этап 2.

На рис. 2 показан фрагмент экранного интерфейса с СФЦ для расчета вероятности отказа последовательной системы. Согласно принятой модели влияния отказов элементов типа «замыкания» отказ системы (критерий  $y_3$ ) происходит при отказе и первого, и второго элемента.

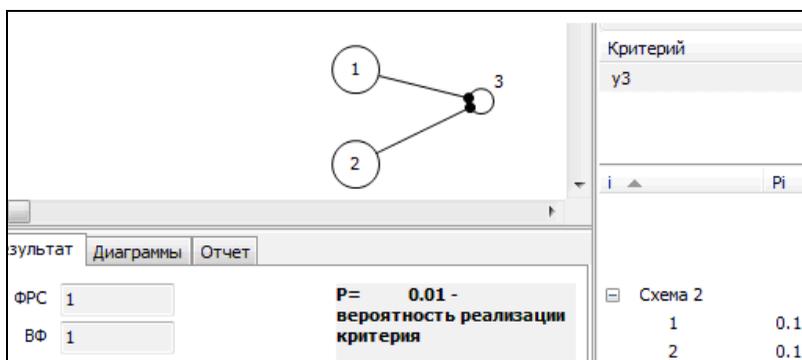


Рис.2. Построение СФЦ для оценки вероятности отказа системы по «замыканию».

Для принятых в табл. 1 исходных данных  $Q_{сз} = q_{s1} \cdot q_{s2} = 0.1 \cdot 0.1 = 0.01$ .

Данный результат соответствует вероятности состояния 9 табл.1.

Этап 3.

На рис. 3 показан фрагмент экранного интерфейса с СФЦ соединения эквивалентированных схем (на рисунке — треугольники) в форме конъюнкции несовместных событий 1 и 2 (критерий  $y_3$ ). Формирование группы 1 несовместных событий (НС) позволяет вычислить вероятность безотказной работы по формуле (8).

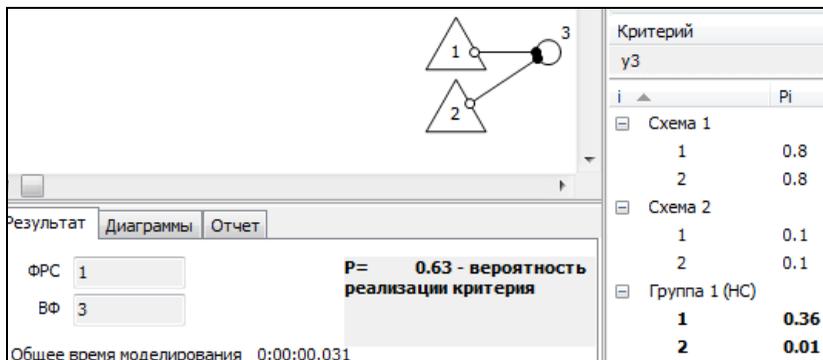


Рис. 3. Соединение эквивалентированных схем.

В нашем случае вероятностная функция

$$y_3 = 1 - P_1 - P_2 = 1 - 0.36 - 0.01 = 0.63.$$

Численное значение соответствует сумме вероятностей состояний 1-3 табл. 1.

Как видно из приведенных результатов, для последовательной структуры учет отказов элементов двух типов приводит к увеличению вероятности безотказной работы ( $R_c = 0.63$ ) по сравнению с расчетами без учета типа отказов ( $R_c = 0.49$ ).

На рис. 4 представлен экраный интерфейс демо-версии программы Reliability Workbench V10.3.0 компании Isograph Ltd с деревом неисправностей для задачи оценки вероятности отказа последовательной системы, состоящей из элементов с тремя состояниями.

Программа Reliability Workbench позволяет формировать группы непересекающихся событий (disjoint events), что является в данной задаче аналогом группы несовместных событий (ГНС). Состав ГНС обозначен в верхнем левом угле экранной формы (EGROUP1, EGROUP2). В группы входят несовместные события – отказы типа «обрыв» и «замыкание» элементов  $X_1$  ( $X_1 O$ ,  $X_1 S$ ) и  $X_2$  ( $X_2 O$ ,  $X_2 S$ ). Числовой результат совпадает с результатом, полученным на ПК АРБИТР для последовательной схемы, то есть  $R_{sc} = 1 - Q_{sc} = 1 - 0.37 = 0.63$ .

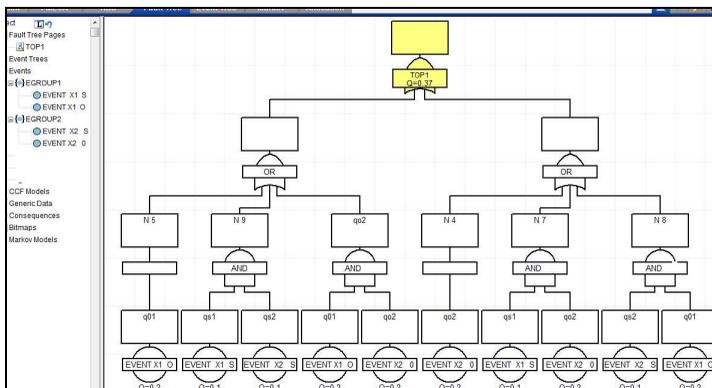


Рис.4. Экранная форма дерева неисправностей Reliability Workbench.

**4. Описание второй модели влияния вида отказов элементов на состояние системы.** Профессор Рябинин И.А., подводя итоги анализа возможности ЛВМ для решения задач с тремя состояниями, справедливо заметил, что «...реальных систем, у которых все элементы могут находиться в трех состояниях, практически не существует» [5, с.193]. В этой связи рассмотрим пример системы, состоящей из двух генераторов (Г) и двух линий электропередачи (ЛЭП). Они обеспечивают дублированное питание общей нагрузки. Отказы ЛЭП могут быть двух несовместных типов – Обрыв и Замыкание, причем в случае отказа хотя бы одной ЛЭП по «замыканию», происходит отказ всей системы. Для решения этой задачи (далее будем называть ее задачей 10 согласно [6, с.47]) на ПК АРБИТР могут быть составлены различные СФЦ, например, с указанием всех состояний ЛЭП 3 и 4 (рис. 5а) или только двух — работы и замыкания (рис. 5б). Указание только двух состояний ЛЭП использует тот факт, что все три состояния ЛЭП образуют полную группу событий, вероятность реализации которой равна единице.

Для СФЦ на рис.5б решение поставленной задачи дает следующую вероятностную функцию

$$Rc = P_1P_3Q_8 + P_2P_4Q_7 - P_1P_3Q_8 \cdot P_2P_4Q_7. \quad (9)$$

В соответствии с правилами вычисления вероятностей произведений двух или более несовместных событий [6, с.50–51] при учете ГНС (события 3,5,7 и 4,6,8) имеем

$$\begin{aligned} P_3 * Q_7 &\Rightarrow P_3, \\ Q_8 * P_4 &\Rightarrow P_4. \end{aligned} \quad (10)$$

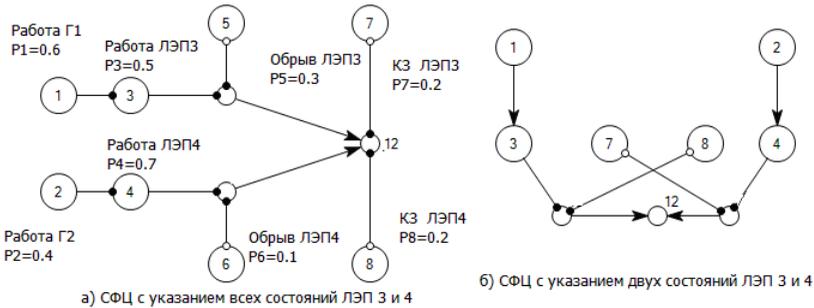


Рис.5. СФЦ энергетической системы [6].

Тогда выражение (9) с учетом ГНС примет вид

$$Rc = P_1 P_3 Q_8 + P_2 P_4 Q_7 - P_1 P_3 P_2 P_4 = 0.38. \quad (11)$$

Для сравнения вероятность безотказной работы данной системы без учета ГНС

$$Rc_{\text{вГНС}} = P_1 P_3 + P_2 P_4 - P_1 P_3 P_2 P_4 = 0.496. \quad (12)$$

Как видно из сравнения выражений (11) и (12) для данной модели влияния отказов элементов на отказы системы учет несовместности отказов типа «обрыв» и «замыкание» приводит к уменьшению численного значения вероятности безотказной работы системы.

Для подтверждения корректности полученных численных значений (11) и (12) был проведен статистический эксперимент. Генерировалось 10 000 серий, в каждой серии — 1000 испытаний с оценкой вероятности безотказной работы системы с учетом и без учета ГНС.

На рис.6а и 6б приведены гистограммы результатов статистического моделирования.

На рис. 6 на оси ординат приведены средние (по 10 000 серий) частоты оценки вероятности безотказной работы энергетической системы.

Внутрисерийная описательная статистика оценок вероятности безотказной работы приведена в табл.2.

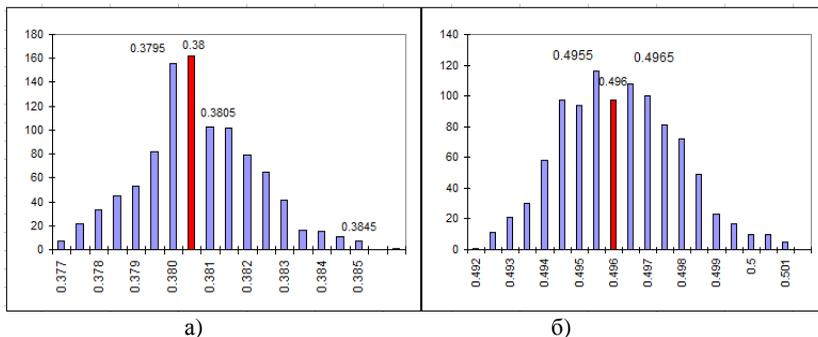


Рис.6. Гистограммы результатов статистического моделирования дублированной системы энергоснабжения (задача 10) а) с учетом ГНС, б) без учета ГНС.

Таблица 2. **Внутрисерийная описательная статистика**

Параметры статистики	Без учета ГНС	С учетом ГНС
Среднее	0.4959	0.3799
Минимум	0.4919	0.3761
Максимум	0.5009	0.3847
СКО	0.00169	0.00154

Приведенная статистика имитационного моделирования позволяет сделать вывод о непротиворечивости аналитических и статистических оценок вероятности безотказной работы рассматриваемой энергетической системы.

**5. Заключение.** На основе развития классических ЛВМ разработаны методики решения задач по оценки надежности систем, состоящих из элементов с тремя состояниями, с использованием ПК АРБИТР. Теоретической основой методики является реализованный в ПК АРБИТР аппарат групп несовместных событий [3, 4, 6, 7]. Таким образом, показано, что логико-вероятностный подход позволяет решать задачи для тех случаев, когда число состояний элементов больше двух, причем изменения состояний элементов являются стохастически зависимыми событиями.

### Литература

1. *Вентцель Е.С.* Теория вероятностей. М.: Наука, 1969.
2. *Диллон Б., Сингх Ч.* Инженерные методы обеспечения надежности систем. М.: Мир, 1984.

3. *Нозик А.А.* Оценка надежности и безопасности структурно-сложных технических систем: автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук. С-Петербург, 2005.
4. *Поленин В.И., Рябинин И.А., Свирин С.К., Гладкова И.А.* Применение общего логико-вероятностного метода для анализа технических, военных организационно-функциональных систем и вооруженного противоборства/ Под научным редактированием Можаяева А.С. СПб.: НИКА, 2011.
5. *Рябинин И.А.* Надежность и безопасность структурно-сложных систем. СПбГУ, 2007.
6. *Черкесов Г.Н., Можаяев А.С.* Логико-вероятностные методы расчета надежности структурно-сложных систем. М.: Знание, 1991.
7. *Shannon C.* A Symbolic Analysis of Relay and Switching Circuits // Transactions of the American Institute of Electrical Engineers. 1938. N. 57. P. 713-723.

## **ПРИЛОЖЕНИЕ 1.**

**Преобразования логических и вероятностных функций для групп несовместных событий.** Основные термины, определения и обозначения, использованные в Приложении.

1. Под «событием» в теории вероятностей понимается всякий факт (исход), который в результате опыта может произойти или не произойти. Если появление события (исход опыта) обозначим через  $a$  и будем называть его *прямым исходом события  $a$* , то противоположный исход опыта назовем *инверсным исходом события  $a$*  и обозначим через  $\bar{a}$  [4]. Для краткости такие исходы события будем называть *прямым* и *обратным* событием соответственно.

2. Несколько событий называются *несовместными* в некотором опыте, если никакие два из них не могут появиться вместе. Для несовместных событий справедливо логическое выражение  $a \wedge b = 0$  [7].

3. *Противоположными событиями* называются два несовместных события, образующих полную группу.

4. Под группой несовместных событий (ГНС) понимается «...множество исходов группы (совокупности) элементарных **бинарных** случайных событий, которые в рассматриваемой модели достоверно не реализуются вместе на заданном интервале времени или в заданный момент...» [6, с.46].

Важно отметить, что основным объектом изучения классической теории вероятностей является *полная* группа несовместных событий, сумма вероятностей которых равна единице [1, с. 42, следствие 1 из теоремы сложения вероятностей].

Если ГНС не является полной, то приведенное следствие 1 теоремы о сложении вероятностей несовместных может и не выполняться.

Несовместность исходов группы событий нарушает условие независимости этих событий. В терминах случайных величин, когда некоторый опыт повторяется неоднократно, можно говорить, что несовместность событий является стохастической зависимостью этих случайных величин.

Пусть прямые события  $a$  и  $b$  являются несовместными. Зависимость прямых случайных событий  $a$  и  $b$  является стохастической в том смысле, что, если событие  $a$  произошло, то с вероятностью 1 (достоверно) мы можем сказать, что в данном опыте событие  $b$  произойти не может.

Тогда, согласно теореме умножения вероятностей [1, с.46]

$$P(ab) = P(a)P(b/a)$$

где  $P(b/a)$  — условная вероятность события  $b$  при условии совершения события  $a$ .

По определению для несовместных событий  $P(b/a) = 0$ , следовательно,  $P(ab) = 0$ .

Если же в опыте наблюдается обратное события  $\bar{a}$ , то в этом случае событие  $b$  или  $\bar{b}$  может произойти или не произойти с некоторой вероятностью, то есть события  $\bar{a}$  и  $b$ , а также  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$  не являются несовместными.

Данный вид зависимости порождает некоторый класс алгебры логики — **алгебры логики несовместных событий**, свойства которой необходимо учитывать как при построении логической функции работоспособности системы (ФРС), так и при преобразовании функций алгебры логики (ФАЛ или сокращенно ЛФ) и вероятностных функций (ВФ).

Рассмотрим некоторые свойства алгебры ГНС при различных сочетаниях несовместности прямых и обратных событий.

В табл. П5.1–5.3 представлены аналитические выражения для 24 преобразований ЛФ и ВФ. Данные преобразования могут быть сгруппированы в 6 групп для конъюнкций и дизъюнкций событий. Ниже будут приведены доказательства корректности одного преобразования ЛФ и ВФ для каждой группы, по два доказательства на каждый случай сочетания несовместности прямых и обратных событий.

1. **Конъюнкции несовместных событий.** Преобразования для данной группы конъюнкций приведены в строках табл. П5.1–5.3 под номерами №№ 1.1, 2.2 и 3.4.

Доказательство корректности преобразования приводится для случая несовместности прямых событий  $a$  и  $b$ .

На рис. П1 представлена диаграмма Венна для рассматриваемого случая. На диаграммах будем обозначать прямоугольником, кругом и квадратом соответственно  $I$ ,  $a$  и  $b$ , где  $I$  — логическая единица (универсум).

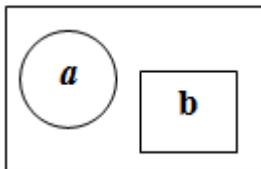


Рис. П1. Диаграмма Венна. Пересечение множеств  $a \cap b = \emptyset$ .

Логическое утверждение несовместности событий  $a$  и  $b$  запишем в виде  $a \wedge b = 0$ , а вероятностное определение — в виде  $P(ab) = P(a) \cdot P(b/a) = P(a) \cdot 0 = 0$ .

Таким образом, логическое преобразование для рассматриваемой конъюнкции можно записать в виде

$$a \wedge b \Rightarrow 0. \quad (\text{П1})$$

вероятностное преобразование в виде

$$P(ab) = 0. \quad (\text{П2})$$

Табл. П1 представляет таблицу истинности для рассматриваемого варианта ГНС.

В табл. П1 в столбце « $ab$ » приведен результат операции логического умножения без учета несовместности событий  $a$  и  $b$ . Если в последней строке этого столбца, заменить 1 на 0 (столбец «Преобразование ЛФ»), то в последнем столбце «ЛФ с ГНС» логическая функция с учетом ГНС является логическим 0. Обоснованием указанного преобразования является определение несовместности событий  $a$  и  $b$ .

Таблица П1. Таблица истинности для произведения несовместных прямых событий

$a$	$b$	$ab$	Преобразование ЛФ	ЛФ с ГНС
0	0	0		0
0	1	0		0
1	0	0		0
1	1	1	$1 \Rightarrow 0$	0

2. **Сокращение конъюнкции.** Преобразования для данной группы конъюнкций приведены в строках табл. П5.1–5.3 под номерами №№ 1.2, 1.3, 2.1, 2.4, 3.2 и 3.3.

Доказательство корректности преобразования приведено для случая несовместности прямых событий  $a$  и  $b$  применительно к конъюнкции событий  $\bar{a}$  и  $b$  (№1.2).

События  $\bar{a}$  и  $b$  **не являются несовместными**, но для вычисления вероятности  $P(\bar{a}b)$  произведения этих событий необходимо учитывать несовместность их прямых исходов.

На рис. П2 приведены диаграммы Венна для рассматриваемого случая. На рис. П2 видно, что пересечением множеств (событий)  $\bar{a} \cap b$  является множество (событие)  $b$ .

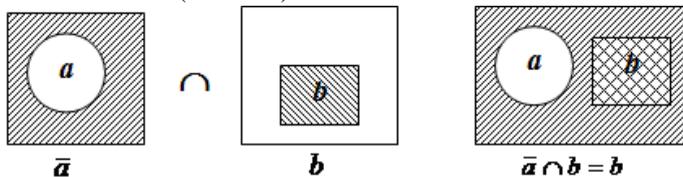


Рис. П2. Диаграммы Венна. Пересечение событий  $\bar{a} \cap b = b$  (случай несовместных прямых событий).

Тогда можно записать, что с учетом несовместности прямых событий логическая функция для рассматриваемой конъюнкции преобразуется следующим образом

$$\bar{a} \wedge b \Rightarrow b. \quad (\text{П3})$$

что соответствует преобразованию вероятностной функции

$$P(\bar{a}b) = P(b). \quad (\text{П4})$$

Табл. П2 представляет таблицу истинности для рассматриваемого варианта ГНС.

Таблица П2. Таблица истинности для конъюнкции  $\bar{a} \wedge b$  при несовместных прямых событиях

$a$	$b$	$\bar{a}$	$\bar{a}b$	Преобразование ЛФ	ЛФ с ГНС
0	0	1	0		0
0	1	1	1		1
1	0	0	0		0
1	1	0	0	$0 \Rightarrow 1$	1

В табл.П2 также как и в табл.П1 осуществляется преобразование значения произведения событий в последней строке, соответствующей условиям несовместности прямых событий. ЛФ с учетом несовместности, представленной в столбце «ЛФ с ГНС», совпадает с ЛФ события  $b$ .

Более простое доказательство описанных выше преобразований было предложено К.Шенноном [7]. Для этого к конъюнкции надо прибавить логический 0 и вынести общий знаменатель. Для нашего примера  $ab = 0$  доказательство согласно [7] имеет следующий вид:

$$\bar{a}b + ab = b(\bar{a} + a) = b.$$

**3. Преобразование конъюнкции с использованием теоремы де Моргана.** Преобразования для данной группы конъюнкций приведены в строках табл. П5.1-5.3 под номерами №№ 1.4, 2.3, и 3.1.

Доказательство корректности преобразования приведено для случая несовместности событий  $\bar{a}$  и  $b$  применительно к конъюнкции событий  $a$  и  $\bar{b}$  (№ 2.3).

На рис.П3 приведены диаграммы Венна для рассматриваемого случая.

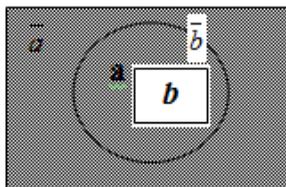


Рис. П3. Диаграммы Венна. Пересечение событий  $a \wedge \bar{b}$ .

Диаграммы на рис.П3 показывают, что с учетом несовместности событий  $\bar{a}$  и  $b$  логическую функцию для конъюнкции  $a \wedge \bar{b}$  можно записать в виде

$$a \wedge \bar{b} \Rightarrow \overline{\bar{a} \vee b}. \quad (\text{П5})$$

вероятностное преобразование в виде

$$P(a \wedge \bar{b}) = 1 - [P(\bar{a}) + P(b)]. \quad (\text{П6})$$

Табл. П3 представляет таблицу истинности для рассматриваемого варианта ГНС.

Таблица П3. Таблица истинности для конъюнкции  $a \wedge \bar{b}$  при несовместных событиях  $\bar{a}$  и  $b$

$a$	$b$	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$a \wedge \bar{b}$	Преобразование ЛФ	ЛФ с ГНС	$\bar{a} \vee b$	Преобр. ЛФ	$\bar{a} \vee b$ с ГНС	$\overline{\bar{a} \vee b}$ с ГНС
0	0	1	1	0		0	1		1	0
0	1	1	0	0	$0 \Rightarrow 1$	1	1	$1 \Rightarrow 0$	0	1
1	0	0	1	1		1	0		0	1
1	1	0	0	0		0	1		1	0

В табл. П3 осуществляется преобразование значения произведения событий во 2-й строке, соответствующей условиям несовместности событий  $\bar{a}$  и  $b$ .

4. **Сокращение дизъюнкции.** Преобразования для данной группы дизъюнкций приведены в строках табл. П5.1-5.3 под номерами №№ 1.6, 1.7, 2.5, 2.8, 3.6 и 3.7.

Доказательство корректности преобразования приведено для случая несовместности событий  $\bar{a}$  и  $b$  применительно к дизъюнкции событий  $a$  и  $b$  (№ 2.5). На рис.П4 приведены диаграммы Венна для рассматриваемого случая.

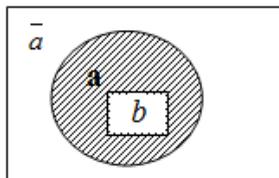


Рис. П4. Диаграммы Венна. Объединение событий  $a \vee b$ .

Диаграммы на рис. П4 показывают, что с учетом несовместности событий  $\bar{a}$  и  $b$  логическая функция для рассматриваемой дизъюнкции преобразуется следующим образом

$$a \vee b \Rightarrow a, \quad (П7)$$

что соответствует преобразованию вероятностной функции вида

$$P(a \vee b) \Rightarrow P(a). \quad (П8)$$

Табл. П4 представляет таблицу истинности для рассматриваемого варианта ГНС.

Таблица П4. Таблица истинности для дизъюнкции  $a \vee b$  при несовместных событиях  $\bar{a}$  и  $b$

$a$	$b$	$a \vee b$	Преобразование ЛФ	ЛФ с ГНС
0	0	0		0
0	1	1	$1 \Rightarrow 0$	0
1	0	1		1
1	1	1		1

В табл. П4 осуществляется преобразование значения произведения событий во 2-й строке, соответствующей условиям несовместности событий  $\bar{a}$  и  $b$ . Как видно из данных столбца «ЛФ с ГНС», ЛФ дизъюнкции  $a \vee b$  с учетом несовместности событий  $\bar{a}$  и  $b$  совпадает с ЛФ события  $a$ . Преобразования групп 2 и 4 получили название закона несовместных поглощений [4, с.152].

Преобразования для данной группы дизъюнкций также могут быть доказаны способом, предложенным К.Шенноном [7]. Для этого дизъюнкцию  $a \vee b$  следует умножить на логическую  $I$  и применить операцию поглощения. Для нашего примера  $a \vee \bar{b} = I$  и доказательство согласно [7] имеет следующий вид:

$$(a \vee b)a \vee \bar{b} = a \vee ab \vee a\bar{b} = a.$$

### 5. Преобразование дизъюнкции событий в универсум.

Преобразования для данной группы дизъюнкций приведены в строках табл. П5.1-5.3 под номерами №№ 1.8, 2.7 и 3.5.

Доказательство корректности преобразования приведено для случая несовместности инверсных событий  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$  применительно к дизъюнкции событий  $a$  и  $b$ .

Табл. П5 представляет таблицу истинности для рассматриваемого варианта ГНС.

Таблица П5. **Таблица истинности для дизъюнкции  $a \vee b$**

$a$	$b$	$a \vee b$	Преобразование ЛФ	ЛФ с ГНС
0	0	0	$0 \Rightarrow 1$	1
0	1	1		1
1	0	1		1
1	1	1		1

Из табл. П5 видно, что логическое преобразование для рассматриваемой дизъюнкции можно записать в виде

$$a \vee b \Rightarrow 1, \quad (\text{П9})$$

вероятностное – в виде

$$P(a \vee b) \Rightarrow 1. \quad (\text{П10})$$

Преобразования группы 3 получили название закона истинности дизъюнкций [4,с.152].

**6. Дизъюнкции несовместных событий.** Преобразования для данной группы дизъюнкций приведены в строках табл. П5.1–5.3 под номерами №№ 1.5, 2.6 и 3.8. Доказательство корректности преобразования приведено для случая несовместности инверсных событий  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$  применительно к дизъюнкции событий  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$ .

Логическая функция для рассматриваемой дизъюнкции, как в п.п.1.5 и 2.6, преобразования не требует, вероятностная функция по определению вероятности суммы несовместных событий имеет вид

$$P(\bar{a} \vee \bar{b}) = P(\bar{a}) + P(\bar{b}). \quad (\text{П11})$$

## **ПРИЛОЖЕНИЕ 2.**

**Сводные таблицы преобразований логических и вероятностных функций.** Сводные таблицы П5.1÷П5.3 представляют преобразования логических функций (ЛФ) и вероятностных функций (ВФ), относящиеся к различным комбинациям случаев несовместных событий — прямых и обратных. В столбцах «Ссылка» указаны работы, где соответствующие формулы приведены в авторской редакции.

Таблица П5.1. Несовместные прямые события  $a$  и  $b$

№	ЛФ	Преобразование ЛФ	ВФ	Преобразование ВФ	Ссылка
Конъюнкции					
1.1	$a \wedge b$	0	$P(ab)$	0	[3, ф.126]
1.2	$\bar{a} \wedge b$	$b$	$P(\bar{a}b)$	$P(b)$	[3, ф.128]
1.3	$a \wedge \bar{b}$	$a$	$P(a\bar{b})$	$P(a)$	[3, ф.129]
1.4	$\bar{a} \wedge \bar{b}$	$\overline{a \vee b}$	$P(\bar{a}\bar{b})$	$1 - [P(a) + P(b)]$	[3, ф.127]
Дизъюнкции					
1.5	$a \vee b$	$a \vee b$	$P(a \vee b)$	$P(a) + P(b)$	[3, ф.133]
1.6	$\bar{a} \vee b$	$\bar{a}$	$P(\bar{a} \vee b)$	$P(\bar{a})$	
1.7	$a \vee \bar{b}$	$\bar{b}$	$P(a \vee \bar{b})$	$P(\bar{b})$	
1.8	$\bar{a} \vee \bar{b}$	1	$P(\bar{a} \vee \bar{b})$	1	[3, ф.134]

Таблица П5.2. Несовместные события  $\bar{a}$  и  $b$

№	ЛФ	Преобразование ЛФ	ВФ	Преобразование ВФ	Ссылка
Конъюнкции					
2.1	$a \wedge b$	$b$	$P(ab)$	$P(b)$	[7]
2.2	$\bar{a} \wedge b$	0	$P(\bar{a}b)$	0	
2.3	$a \wedge \bar{b}$	$\overline{\bar{a} \vee b}$	$P(a\bar{b})$	$1 - [P(\bar{a}) + P(b)]$	
2.4	$\bar{a} \wedge \bar{b}$	$\bar{a}$	$P(\bar{a}\bar{b})$	$P(\bar{a})$	[7]
Дизъюнкции					
2.5	$a \vee b$	$a$	$P(a \vee b)$	$P(a)$	[7]
2.6	$\bar{a} \vee b$	$\bar{a} \vee b$	$P(\bar{a} \vee b)$	$P(\bar{a}) + P(b)$	
2.7	$a \vee \bar{b}$	1	$P(a \vee \bar{b})$	1	[7]
2.8	$\bar{a} \vee \bar{b}$	$\bar{b}$	$P(\bar{a} \vee \bar{b})$	$P(\bar{b})$	[7]

Таблица П15.3. Несовместные инверсные события  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$

№	ЛФ	Преобразование ЛФ	ВФ	Преобразование ВФ	Ссылка
<b>Конъюнкции</b>					
3.1	$a \wedge b$	$\overline{\bar{a} \vee \bar{b}}$	$P(ab)$	$1 - [P(\bar{a}) + P(\bar{b})]$	[6, ф.1.88]
3.2	$\bar{a} \wedge b$	$\bar{a}$	$P(\bar{a}b)$	$P(\bar{a})$	[6, ф.1.87]
3.3	$a \wedge \bar{b}$	$\bar{b}$	$P(a\bar{b})$	$P(\bar{b})$	
3.4	$\bar{a} \wedge \bar{b}$	0	$P(\bar{a}\bar{b})$	0	[6, ф.1.86]
<b>Дизъюнкции</b>					
3.5	$a \vee b$	1	$P(a \vee b)$	1	[6, ф.1.89]
3.6	$\bar{a} \vee b$	$b$	$P(\bar{a} \vee b)$	$P(b)$	
3.7	$a \vee \bar{b}$	$a$	$P(a \vee \bar{b})$	$P(a)$	[6, ф.1.90]
3.8	$\bar{a} \vee \bar{b}$	$\bar{a} \vee \bar{b}$	$P(\bar{a} \vee \bar{b})$	$P(\bar{a}) + P(\bar{b})$	[6, ф.1.91]

**Можжев Александр Сергеевич** — д.т.н., проф.; ведущий сотрудник научно-исследовательского отдела ОАО Специализированная инженеринговая компания «Севзапмонтажавтоматика» (СПИК СЗМА). Область научных интересов: анализ данных, управление и прогнозирование в сложных динамических системах, хаотические системы. Число научных публикаций — 138. alexander\_mozhaev@szma.com, www.szma.com; СПИК СЗМА, пер.Каховского, д. 10, лит. А, стр. 2Н, г. Санкт-Петербург, 199155, РФ; п.т. +7(812)350-5885, факс +7 (812)350-1113.

**Mozhaev Alexander Sergeevich** — Ph.D., Dc.Sci., Prof.; senior expert, public corporation Specialized engineering company "Sevzapmontageautomatica" (SPIK SZMA). Research interests: IT development for automated structural and logic modeling of complex system reliability and efficiency measures. The number of publications — 138. alexander\_mozhaev@szma.com, www.szma.com; SPIK SZMA, 10, Lit. A, Office block 2N, Kakhovskogo Lane, St.Petersburg 199155, Russia, phone +7(812)350-5885, fax +7 (812)350-1113.

**Нозик Александр Абрамович** — к.т.н.; Генеральный директор ОАО Специализированная инженеринговая компания «Севзапмонтажавтоматика» (СПИК СЗМА). Область научных интересов: системный анализ, теория надежности, модели и методы принятия решения в сложных организационно-технических системах. Число научных публикаций — 19. nozik@szma.com, www.szma.com; СПИК СЗМА, пер.Каховского, д. 10, г. Санкт-Петербург, 199155, РФ; п.т. +7(812)350-5885, факс +7 (812)350-1113.

**Nozik Alexander Abramovich** — Ph.D.; General Director, public corporation Specialized engineering company "Sevzapmontageautomatica" (SPIK SZMA). Research interests: analysis of systems, reliability theory, mathematical models and methods of decision-making support in complex technical-organizational systems. The number of publications — 19. nozik@szma.com, www.szma.com; SPIK SZMA, 10, Lit. A, Office block 2N, Kakhovskogo Lane, St.Petersburg 199155, Russia, phone +7(812)350-5885, fax +7 (812)350-1113.

**Струков Александр Владимирович** — к.т.н., доц.; ведущий инженер исследовательского отдела ОАО Специализированная инжиниринговая компания «Севзапмонтажавтоматика» (СПИК СЗМА). Область научных интересов: анализ данных, системный анализ, теория надежности, модели и методы принятия решения в сложных организационно-технических системах. Число научных публикаций — 68. [nozik@szma.com](mailto:nozik@szma.com), [www.szma.com](http://www.szma.com); СПИК СЗМА, пер.Каховского, д. 10, лит. А, стр. 2Н, г. Санкт-Петербург, 199155, РФ; р.т. +7(812)350-5885, факс +7 (812)350-1113.

**Strukov Alexander Vladimirovich** — Ph.D., Assoc. Prof.; senior engineer, Research Department, public corporation Specialized engineering company "Sevzapmontageautomatica" (SPIK SZMA). Research interests: data analysis, analysis of systems, reliability theory, mathematical models and methods of decision-making support in complex technical-organizational systems. The number of publications — 68. [nozik@szma.com](mailto:nozik@szma.com), [www.szma.com](http://www.szma.com); SPIK SZMA, 10, Lit. A, Office block 2N, Kakhovskogo Lane, St.Petersburg 199155, Russia, phone +7(812)350-5885, fax +7 (812)350-1113.

Рекомендовано лабораторией информационных технологий в системном анализе и моделировании, заместитель директора по научной работе Соколов Б.В., д.т.н., проф. Статья поступила в редакцию 16.09.2013.

## РЕФЕРАТ

### *Можжаев А.С., Нозик А.А., Струков А.В.* **Оценка надежности системы из элементов с тремя состояниями с использованием ПК АРБИТР.**

Применение логико-вероятностных методов (ЛВМ) для решения задач анализа надежности сложных систем, состоящих из элементов с тремя состояниями, предполагает разработку математического аппарата алгебры групп несовместных событий (ГНС). Такое развитие ЛВМ позволяет устранить такие недостатки как предположения о бинарности и независимости событий путем построения таких моделей надежности систем, которые учитывают природу несовместности состояний элементов на этапах формирования логических условий функционирования системы и ее преобразования в вероятностную функцию.

В статье рассмотрены примеры построения моделей различного влияния отказов элементов типа «Обрыв» и «Замыкание» на состояние системы. Если для последовательной структуры допускается отказ типа «Замыкание» нескольких элементов, то надежность системы с последовательным соединением есть вероятность того, что система не откажет из-за отказов элементов типа «Обрыв», минус вероятность того, что система откажет из-за отказов элементов типа «Замыкание». Решение таких задач с помощью эквивалентированных вершин реализовано в программном комплексе ПК «АРБИТР», который использует математический аппарат ГНС общего ЛВМ (ОЛВМ). Для структур, где одиночный отказ типа «Замыкание» приводит к отказу системы, решение на ПК «АРБИТР» задач оценки надежности осуществляется без использования эквивалентированных вершин. При этом условия несовместности могут формироваться не только для прямых, но и для инверсных исходов событий. Для сравнения показан способ учета несовместности событий в программе Reliability Workbench, в которой формируются группы непересекающихся событий (disjoint events).

Рассмотрены некоторые свойства алгебры ГНС при различных сочетаниях несовместности прямых и обратных событий, приведены доказательства этих свойств.

В Приложениях 1 и 2 представлены аналитические выражения для 24 преобразований логических и вероятностных функций, учитывающих несовместность прямых, обратных и смешанных исходов событий. Преобразования сгруппированы в 6 групп для конъюнкций и дизъюнкций событий. Приведены доказательства корректности одного преобразования логических и вероятностных функций для каждой группы, по два доказательства на каждый случай сочетания несовместности прямых и обратных событий.

## SUMMARY

### *Mozhaev A.S., Nozik A.A., Strukov A.V. Reliability Assessment for Three-State Element Systems Using ARBITER Software.*

Logic-and-probabilistic methods (LPM) application for reliability assessment of complex systems with three-state elements needs development of the apparatus of algebra of disjoint event groups. The LPM development eliminates such deficiencies as assumption of events binarity and independency through building the system reliability models which account for inconsistency of element states while generating logical conditions of the system operation and their transforming into the probabilistic function.

The article shows examples of models generation for various impact of element “fail-closed” and “fail-open” modes on the system state. If a “fail-open” mode of several elements occurs in the series system, then system reliability is a probability of the system non-failure due to “fail-closed” mode of the elements minus probability of the system failure due to element “fail-open” mode. These tasks are solved in ARBITER software using equivalent nodes. ARBITER software applies mathematical apparatus of disjoint event groups within the framework of the general LPM method. If a single “open” failure results in the system failure, the ARBITER-based reliability assessment is made without equivalent nodes. The inconsistency conditions may be found both for direct and inverse outcomes. Just to compare, a method of event inconsistency accounting used in Reliability Workbench software is shown, which assumes the development of disjoint event groups.

Several properties of the algebra of disjoint event groups are described for various combinations of direct and inverse events inconsistency, and substantiation of the described properties is provided.

Annexes 1, 2 show analytic formulas for 24 transformations of logical and probabilistic functions accounting for inconsistency of direct, inverse and mix event outcomes. All transformations are classified in 6 groups for event conjunctions and disjunctions. Proofs are given for one logical and probabilistic function transformation in each group, and two proofs for each combination of disjoint direct and inverse events are provided.