

В.Н. ЯКИМОВ  
**ВОССТАНОВЛЕНИЕ ДИСКРЕТНОЙ  
ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ СИГНАЛА НА ОСНОВЕ МОДЕЛИ  
СКОЛЬЗЯЩЕГО СРЕДНЕГО И ОЦЕНКИ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ  
СВЯЗИ ОТСЧЕТОВ ПРИ ПРЯМОМ И ОБРАТНОМ  
ПРОГНОЗИРОВАНИИ**

*Якимов В.Н.* Восстановление дискретной последовательности сигнала на основе модели скользящего среднего и оценки корреляционной связи отсчетов при прямом и обратном прогнозировании.

**Аннотация.** В статье рассмотрена разработка математического обеспечения для восстановления значений отсчетов дискретной последовательности, которая была получена в результате равномерной дискретизации непрерывного во времени сигнала. Задача восстановления решается исходя из того, что сигнал можно рассматривать как стационарный или стационарный хотя бы в широком смысле (квазистационарный). Разработка математического обеспечения для восстановления значений отсчетов сигнала осуществлена на основе построения модели скользящего среднего и оценки корреляционной связи отсчетов сигнала во времени при прямом и обратном прогнозировании. Необходимая для восстановления значений отсчетов выборка оценок корреляционной функции сигнала вычисляется по отсчетам с известными значениями. С учетом выполнения условия стационарности сигнала это можно сделать на любом участке последовательности независимо от места нахождения восстанавливаемого участка. Полученные оценки отсчетов корреляционной функции могут использоваться как для прямого, так и для обратного прогнозирования. При этом даже если необходимо восстановить несколько проблемных участков, достаточно только один раз вычислить необходимую для их восстановления выборку оценок корреляционной функции. На основе полученного математического решения поставленной задачи разработано алгоритмическое обеспечение. Тестовые испытания и функциональные проверки алгоритмического обеспечения были осуществлены на основе имитационного моделирования с использованием модели сигнала, представляющей собой аддитивную сумму гармонических компонент со случайными начальными фазами. Полученные результаты показали, что вычисление оценок значений утраченных отсчетов осуществляется с достаточно низкой погрешностью, как при прямом, так и при обратном прогнозировании, а также при их совместном использовании. На практике выбор алгоритма восстановления последовательности на основе прямого или обратного прогнозирования будет определяться исходя из реальных условий. В частности, если предыдущих отсчетов с известными значениями недостаточно для прямого прогнозирования, то осуществляется процедура обратного прогнозирования и наоборот. Разработанное алгоритмическое обеспечение может быть реализовано в виде метрологически значимого программного обеспечения для многофункциональных систем цифровой обработки сигналов.

**Ключевые слова:** сигналы дискретного времени, последовательность отсчетов, восстановление сигнала, прямое и обратное прогнозирование, корреляционная связь.

**1. Введение.** Восстановление поврежденных участков дискретной последовательности сигнала по конечному числу отсчетов с известными значениями является актуальной задачей во многих

научных и прикладных областях исследований. В частности, особое внимание восстановлению утраченных значений отсчетов уделяется при рассмотрении практических ситуаций, возникающих при цифровой обработке сигналов в радиолокации, вибродиагностике, беспроводной передаче данных и т.д. [1 – 10].

Дискретные последовательности сигналов приходится восстанавливать из-за сбоев в работе их источников или средств аналого-цифрового преобразования принимающей стороны [11 – 13]. Искажение значений отсчетов на отдельных участках последовательностей может быть вызвано импульсными шумами (скачкообразным изменением фоновых шумов) [14]. В отдельных случаях дискретная последовательность может иметь участки с непостоянной временной сеткой, например, из-за возникновения краткосрочного эффекта дрожания периода тактовых импульсов синхронизирующих устройств [15 – 18]. Может иметь место разреженность отсчетов [19]. Дискретная последовательность может быть преднамеренно сформирована с нерегулярным интервалом дискретизации или в результате снижения числа уровней квантования [20 – 25]. Неравномерность временной сетки дискретной последовательности может наблюдаться в высокоскоростных многоканальных системах обработки сигналов с использованием параллельно работающих низкоскоростных аналого-цифровых преобразователей, когда объединение параллельно формируемых выборок может осуществляться со смещением и потерей отсчетов [26 – 28].

При разработки алгоритмов восстановления утраченных значений дискретных последовательностей сигналов используют специальные методы частотно-временного преобразования или разложения во временные ряды [29 – 37]. В первом случае в основе методов восстановления лежит реконструкция формы сигнала с применением различных адаптивных ядер, представляющих собой функции с изменяющимися параметрами. Такой подход улучшает частотное разрешение, но может оказать искажающее влияние на частотные характеристики анализируемого сигнала. Во втором случае методы восстановления обеспечивают получение оценок значений отсчетов непосредственно во временной области на основе аппроксимации утраченного фрагмента последовательности с помощью простых функций или полиномов. В частности, эффективным является метод локальной аппроксимации. Согласно этому методу для каждого проблемного участка в его окрестности выбирается подпоследовательность с известными значениями

отсчетов, по которой осуществляется построение аппроксимирующей модели. При этом восстановление может осуществляться как по одной подпоследовательности, находящейся перед или после восстанавливаемого участка, так и одновременной по обоим [38, 39]. Преимущество применения процедуры аппроксимации заключается в том, что оценка утраченных значений ведется с учетом изменения значений отсчетов подпоследовательностей, находящихся в непосредственной близости к восстанавливаемому участку. Однако локальная аппроксимация применима только на коротких временных интервалах, когда можно считать, что между значениями проблемных отсчетов и отсчетов по которым осуществляется восстановление имеет место устойчивая зависимость. Кроме того, дискретная последовательность может иметь несколько проблемных участков, находящихся достаточно близко по отношению друг к другу. В этом случае для некоторых восстанавливаемых участков может оказаться проблематичным выбор подпоследовательностей в непосредственной близости от них с необходимым числом отсчетов для выполнения алгоритма их восстановления.

Таким образом, актуальной задачей является уменьшение влияния неопределенности изменения сигнала во времени на получаемые оценки значений утраченных отсчетов, и, следовательно, на результаты цифровой обработки сигнала. При этом математическое решение этой задачи должно способствовать разработке эффективного в вычислительном отношении алгоритмического обеспечения и соответствующего ему программного обеспечения, которое можно использовать в асинхронном режиме восстановления участка с проблемными отсчетами непосредственно в процессе цифровой обработки сигнала.

**2. Постановка задачи.** Восстановление проблемных участков дискретной последовательности сигнала осуществляется по имеющейся выборке его отсчетов с известными подтвержденными значениями. Фактически задача восстановления сводится к нахождению математических зависимостей, позволяющих вычислительным путем получить численные оценки значений утраченных отсчетов.

С математической точки зрения отсчет сигнала, зафиксированный в определенный момент времени, представляет собой одно из возможных значений, которое он может принимать в пределах допустимой области его изменения. При этом в реальном мире сигналы не являются абсолютно произвольными функциями времени, и их значения не могут изменяться произвольным образом.

Сигналы являются носителями некоторой информации, и изменение их значений во времени имеет присущие им характерные особенности. Учет таких особенностей позволяет спроектировать эффективный алгоритм восстановления дискретной последовательности сигнала. В частности, это касается корреляционной зависимости между значениями сигнала. Она позволяет получить количественную оценку степени статистической связи значений сигнала во времени в процессе его распространения.

Задачу восстановления отсчетов дискретной последовательности сигнала будем решать исходя из того, что он удовлетворяет условиям стационарности или стационарен хотя бы в широком смысле (квазистационарный). Выполнение последнего условия позволяет обобщить возможность применения разрабатываемого алгоритма восстановления отсчетов также и на те сигналы, статистические характеристики которых можно считать неизменными в пределах интервала времени формирования их дискретных последовательностей. Прежде всего, это касается постоянства корреляционной зависимости значений сигнала при его распространении во времени. Также будем считать, что частотный состав сигнала находится в пределах диапазона с верхней граничной частотой  $F_{\max}$ .

Пусть в процессе цифрового анализа сигнал  $x(t)$ , удовлетворяющего выше приведенным условиям, осуществлена его равномерная дискретизация с частотой  $F_s \geq 2F_{\max}$ . В результате этого в моменты времени  $t_n = n\Delta t$  будет сформирована дискретная последовательность отсчетов  $x_n = x(n\Delta t)$ , где  $\Delta t = 1/F_s$  и  $n = 0, 1, 2, 3, \dots, N-1$ . Математически такую последовательность можно представить в виде  $N$ -мерного вектора  $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2, x_2, \dots, x_{N-1})$ .

Допустим, что значения отсчетов  $x_n$  с индексами  $n \in [0; k]$  и  $n \in [k + M + 1; N - 1]$  известны точно и их положение соответствует равномерной временной сетке с заданной частотой дискретизации  $F_s$ . Значения  $M$  отсчетов  $x_n$  с индексами  $n \in [k + 1; k + M]$  образуют проблемный участок последовательности. Они могут быть утрачены, искажены или иметь смещение по отношению к равномерной временной сетке. На рисунке 1 схематично изображена дискретная последовательность с проблемным участком.

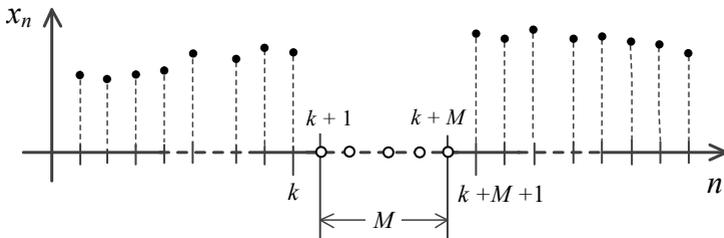


Рис. 1. Дискретная последовательность с проблемным участком

Как было отмечено выше одной из важнейших статистических характеристик сигнала является корреляционная зависимость динамики изменения его значений во времени. Для получения представления о такой зависимости используется корреляционная функция (КФ). Она характеризует линейную стохастическую связь между значениями сигнала. КФ равномерной дискретной последовательности  $x_n = x(n\Delta t)$  является функцией двух аргументов времени  $t_i = i\Delta t$  и  $t_j = j\Delta t$  :

$$R_{XX}(t_i, t_j) = M[x(i\Delta t) x(j\Delta t)] = M[x_i^o x_j^o], \quad (1)$$

где  $x_i^o = (x_i - m_x)$  и  $x_j^o = (x_j - m_x)$  – центрированные значения отсчетов;  $m_x$  – математическое ожидание сигнала  $x(t)$  ;  $M[...]$  – оператор оценки математического ожидания.

КФ является симметричной. Если сигнал стационарен хотя бы в широком смысле, то она является функцией только разности ее аргументов, характеризующих интервал сдвига отсчетов во времени:

$$R_{XX}(t_i, t_j) = R_{XX}(t_j, t_i) = R_{XX}(t_j - t_i) = R_{XX}(t_i - t_j) = R_{j-i} = R_{i-j}. \quad (2)$$

На практике оценка КФ анализируемого сигнала  $x(t)$  может быть получена по выборке его отсчетов с известными значениями. При этом в качестве математического ожидания  $m_x$  сигнала  $x(t)$  принимается оценка среднего значения отсчетов, вычисленная по той же самой выборке, по которой вычисляется и оценка КФ. Однако в процессе таких вычислений следует учитывать статистическую погрешность, обусловленную конечным числом отсчетов выборки, т.е.

ее объем должен быть достаточным. Поэтому применение алгоритма восстановления отсчетов дискретной последовательности на основе учета их корреляционной связи должно принимать во внимание данное обстоятельство. Фактически оно определяет границы области возможного использования соответствующего алгоритма, в пределах которых восстановление значений отсчетов будет численно стабильным и обеспечивать получение удовлетворительных результатов.

Принимая во внимание корреляционную зависимость во времени между значениями сигнала, задачу восстановления проблемного участка дискретной последовательности его отсчетов будем решать с использованием метода прямого и обратного прогнозирования. По отношению к физическим сигналам задача прямого прогнозирования заключается в предсказании его развития и оценке значений на последующем участке в зависимости от предыдущего. В свою очередь задача обратного прогнозирования предполагает по имеющимся отсчетам оценить значения отсчетов на предыдущем участке развития сигнала.

**3. Восстановление значений отсчетов дискретной временной последовательности сигнала на основе прямого прогнозирования.** Рассмотрим модель порядка  $p$ , которая выражает значения последующих отсчетов дискретной последовательности в виде линейной комбинации конечного числа предыдущих значений [40, 41]:

$$\hat{x}_n = \sum_{j=1}^p a_j x_{n-j} . \quad (3)$$

где  $a_j$  – коэффициенты модели.

Из (3) следует, что если значения отсчетов последовательности  $x_n$  известны для  $n = i-1, i-2, \dots, i-p$ , то можно вычислить значения последующих отсчетов этой последовательности для  $n = i, i+1, i+2, \dots$ . С математической точки зрения модель данного вида позволяет рекуррентно осуществлять вычисление оценок значений утраченных отсчетов  $x_n$  для  $n = k+1, k+2, \dots, k+M$ , т.е. определяет вычислительные процедуры прямого прогнозирования (прогнозирования вперед).

Совершив последовательно  $i$  рекурсий и тем самым осуществив прогноз на  $i$  шагов вперед, получаем:

$$\hat{x}_{n+i} = \sum_{j=1}^p \alpha_{i,j} x_{n-j}, \quad n = k+1, \quad i = 1, 2, \dots, M-1, \quad (4)$$

где

$$\alpha_{i,j} = \sum_{\vartheta=1}^i w_{\vartheta} a_{j+i-\vartheta}, \quad (5)$$

$$a_0 = 1, \quad a_n = 0 \quad \text{при } n > p;$$

$$w_{\vartheta} = \sum_{j=1}^p a_j w_{\vartheta-j}, \quad \vartheta = 1, 2, 3, \dots, i; \quad (6)$$

$$w_0 = 1, \quad w_{-\vartheta} = 0.$$

С учетом того, что в (4)  $n = k+1$ , будем иметь:

$$\hat{x}_{k+1+i} = \sum_{j=1}^p \alpha_{i,j} x_{k+1-j}, \quad i = 1, 2, \dots, M-1. \quad (7)$$

Введем обозначение  $m = 1 + i$ . Тогда получаем математическое соотношение для восстановления значений отсчетов:

$$\hat{x}_{k+m} = \sum_{j=1}^p \alpha_{m-1,j} x_{k+1-j}, \quad m = 1, 2, \dots, M. \quad (8)$$

Соотношение (8) фактически представляет собой модель скользящего среднего, где  $\alpha_{m-1,j}$  по своей сути являются весовыми коэффициентами [40, 41]. Согласно этой модели вычисление оценок значений восстанавливаемых отсчетов  $x_n$  для  $n = k+1, k+2, \dots, k+M$ , осуществляется по конечной выборке предыдущих отсчетов с известными значениями  $x_n$ , где  $n \in [k+1-p; k]$ . Принципиально важным является то, что восстановление значения любого из этих отсчетов осуществляется по отсчетам одной и той же выборке. При этом коэффициенты  $\alpha_{m-1,j}$  определяют индивидуальный вес каждого отсчета этой выборки при оценке значения восстанавливаемого отсчета с индексом  $k+m$ , что эквивалентно прямому прогнозированию на  $m$  шагов.

Значения весовых коэффициентов  $\alpha_{m-1,j}$  будем вычислять исходя из критерия минимума среднеквадратической погрешности:

$$\delta_{p,m} = M[(\hat{x}_{k+m} - x_{k+m})^2] \rightarrow \min, \quad (9)$$

где  $M[\dots]$  – оператор оценки математического ожидания.

Для обеспечения выполнения критерия (9) найдем частные производные первого порядка по каждому из коэффициентов  $\alpha_{m-1,j}$ , полагая при этом остальные коэффициенты постоянными, и приравняем эти производные нулю. Тогда получаем систему уравнений:

$$\frac{\partial \delta_{p,m}}{\partial \alpha_{m-1,q}} = 2 \sum_{j=1}^p \alpha_{m-1,j} M[x_{k+1-j} x_{k+1-q}] - 2M[x_{k+m} x_{k+1-q}] = 0, \quad (10)$$

$$q = 1, 2, 3, \dots, p.$$

Будем считать, что восстанавливаемая последовательность имеет нулевое математическое ожидание, т.е. значения ее отсчетов являются центрированными. В противном случае по отсчетам с известными значениями всегда можно вычислить их среднее значение, которое принимается в качестве оценки математического ожидания, и осуществить относительно него операцию центрирования. Принимая это во внимание с учетом (1) и (2) в (10) будем иметь:

$$M[x_{k+1-j} x_{k+1-q}] = R_{q-j}, \quad M[x_{k+m} x_{k+1-q}] = R_{1-m-q} = R_{m+q-1}. \quad (11)$$

В результате получаем систему линейных уравнений, решение которой позволяет получить соотношения для вычисления значений весовых коэффициентов  $\alpha_{m-1,j}$ :

$$\sum_{j=1}^p \alpha_{m-1,j} R_{q-j} = R_{q+m-1}, \quad q = 1, 2, 3, \dots, p, \quad m = 1, 2, \dots, M. \quad (12)$$

В матричной форме система уравнений (12) будет иметь вид:

$$\begin{pmatrix} R_0 & R_{-1} & \dots & R_{1-p} \\ R_1 & R_0 & \dots & R_{2-p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{p-1} & R_{p-2} & \dots & R_0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha_{m-1,1} \\ \alpha_{m-1,2} \\ \dots \\ \alpha_{m-1,p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_m \\ R_{1+m} \\ \dots \\ R_{p+m-1} \end{pmatrix}, \quad (13)$$

$$m = 1, 2, \dots, M.$$

Из (13) следует, что для определения значений  $\alpha_{m-1,j}$  необходимо иметь множество отсчетов КФ  $\{R_0, R_1, \dots, R_{p+m-1}\}$  восстанавливаемой последовательности анализируемого сигнала. Вследствие того, что восстановлению подлежат  $M$  значений отсчетов, то всего необходимо иметь  $p + M - 1$  отсчетов КФ  $\{R_0, R_1, \dots, R_{p+M-1}\}$ . При этом для любого  $m \in [1; M]$  в ходе определения значений  $\alpha_{m-1,j}$  основная матрица системы уравнений (13), состоящая из отсчетов КФ  $R_{q-j}$ , остается неизменной. В зависимости от порядкового номера восстанавливаемого отсчета  $m$  будет меняться лишь только столбец свободных членов, состоящий из отсчетов КФ  $R_{q+m-1}$ . Для стационарного сигнала оценки отсчетов КФ  $\{R_0, R_1, \dots, R_{p+M-1}\}$ , необходимые для определения значений  $\alpha_{m-1,j}$ , могут быть вычислены по известным отсчетам последовательности на любом ее участке независимо от восстанавливаемого участка.

С целью упрощения математических записей при решении системы уравнений (12) введем следующие обозначения:

$$\alpha_{m-1,j} = A_{m,j}, \quad \lambda_{q,j} = R_{q-j}, \quad B_{q,m} = R_{q+m-1}. \quad (14)$$

Тогда система уравнений (12) примет вид:

$$\sum_{j=1}^p A_{m,j} \lambda_{q,j} = B_{q,m}, \quad q = 1, 2, 3, \dots, p, \quad m = 1, 2, \dots, M. \quad (15)$$

В матричной форме для системы уравнений (15) будем иметь:

$$\begin{pmatrix} \lambda_{1,1} & \lambda_{1,2} & \dots & \lambda_{1,p} \\ \lambda_{2,1} & \lambda_{2,2} & \dots & \lambda_{2,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{p,1} & \lambda_{p,2} & \dots & \lambda_{p,p} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A_{m,1} \\ A_{m,2} \\ \dots \\ A_{m,p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{1,m} \\ B_{2,m} \\ \dots \\ B_{p,m} \end{pmatrix}, \quad (16)$$

$$m = 1, 2, \dots, M.$$

В результате решения системы уравнений (16) методом Гаусса получаем математическое соотношение для вычисления оценок искомых весовых коэффициентов:

$$\alpha_{m-1,j} = A_{m,j} = \frac{1}{\lambda_{j,j}^j} \left( B_{j,m}^{(j)} - \sum_{i=j+1}^p \lambda_{j,i}^j \alpha_{m-1,i} \right), \quad j = 1, 2, 3, \dots, p; \quad (17)$$

где

$$\lambda_{q,j}^{(i+1)} = \lambda_{q,j}^{(i)} - D_{q,i} \lambda_{i,j}^{(i)}; \quad (18)$$

$$B_{q,m}^{(i+1)} = B_{q,m}^{(i)} - D_{q,i} B_{i,m}^{(i)}; \quad (19)$$

$$D_{q,i} = \lambda_{q,i}^{(i)} / \lambda_{i,i}^i; \quad (20)$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, p-1; \quad q = i+1, i+2, \dots, p; \quad j = i+1, i+2, \dots, p.$$

Отметим, что

$$\lambda_{1,j}^{(1)} = R_{1-j}, \quad j = 1, 2, 3, \dots, p; \quad (21)$$

$$B_{1,m}^{(1)} = R_m, \quad m = 1, 2, \dots, M. \quad (22)$$

Среднеквадратическая погрешность (9) вычисления оценки утраченного значения отсчета  $\hat{x}_{k+m}$  согласно (8) будет равна:

$$\delta_{p,m} = M \left[ \left( \sum_{j=1}^p \alpha_{m-1,j} x_{k+1-j} - x_{k+m} \right)^2 \right]. \quad (23)$$

После возведения в квадрат математического соотношения в круглых скобках и приняв во внимание, что операция математического ожидания является линейной операцией, получаем:

$$\delta_{p,m} = \sum_{j=1}^p \alpha_{m-1,j} \sum_{i=1}^p \alpha_{m-1,i} M[x_{k+1-j}x_{k+1-i}] - 2 \sum_{j=1}^p \alpha_{m-1,j} M[x_{k+1-j}x_{k+m}] - M[x_{k+m}^2]. \quad (24)$$

В (24) для математических ожиданий произведений значений отсчетов будем иметь:

$$M[x_{k+1-j}x_{k+1-i}] = R_{j-i}, \quad M[x_{k+1-j}x_{k+m}] = R_{m+j-1}, \quad M[x_{k+m}^2] = R_0. \quad (25)$$

Отметим, что  $R_0 = \sigma_x^2$ , где  $\sigma_x^2$  дисперсия анализируемого сигнала, а  $\sigma_x$  среднеквадратическое отклонение.

С учетом (25) получаем:

$$\delta_{p,m} = \sum_{j=1}^p \alpha_{m-1,j} \left( \sum_{i=1}^p \alpha_{m-1,i} R_{j-i} - 2R_{m+j-1} \right) - R_0. \quad (26)$$

Принимая во внимание (12), окончательно получаем, что среднеквадратическая погрешность вычисления  $\hat{x}_{k+m}$  будет равна:

$$\delta_{p,m} = R_0 - \sum_{j=1}^p \alpha_{m-1,j} R_{j+m-1}, \quad m = 1, 2, \dots, M. \quad (27)$$

В качестве критерия выбора порядка модели  $p$  будем использовать среднее значение среднеквадратической погрешности (27) нормированное относительно  $R_0$ :

$$\varepsilon_p = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \frac{\delta_{p,m}}{R_0} \alpha_{m-1,j} = 1 - \frac{1}{M} \sum_{j=1}^p \sum_{m=0}^{M-1} \alpha_{m-1,j} \rho_{j+m-1}, \quad (28)$$

$$m = 1, 2, \dots, M.$$

где  $\rho_{j+m} = R_{j+m} / R_0$  – нормированные значения отсчетов КФ.

**4. Восстановление значений отсчетов дискретной временной последовательности сигнала на основе обратного прогнозирования.** Соотношение (8), определяющее процедуру восстановления значений отсчетов на основе прямого прогнозирования, может быть непосредственно применено для восстановления значений отсчетов на основе обратного прогнозирования. Это объясняется тем, что оно получено с учетом корреляционной зависимости значений сигнала при его распространении во времени. Весовые коэффициенты  $\alpha_{m-1,j}$  в составе соотношения (8) вычисляются исходя из оценки отсчетов КФ. Они определяют индивидуальный вес каждого отсчета  $x_n$  выборки с индексами  $n = i - 1, i - 2, \dots, i - p$ , по которой осуществляется восстановление значения отсчетов  $x_n$  с индексом  $n = k + m$  по мере увеличения их порядкового номера  $m = 1, 2, 3, \dots, M$ . Как было отмечено выше КФ является симметричной функцией (2). Поэтому, если известны значения отсчетов с индексами  $n = k + M + 1, k + M + 2, \dots, k + M + p$ , то (8) позволяет вычислять оценки утраченных значений отсчетов  $x_n$  с индексами  $n = k + m$  в обратном порядке для  $m = M, M - 1, M - 2, \dots, 3, 2, 1$ . В соответствии с этим будем иметь:

$$\hat{x}_{k+M+1-m} = \sum_{j=1}^p \alpha_{m-1,j} x_{k+M+j}, \quad m = 1, 2, \dots, M. \quad (29)$$

Введем обозначение  $i = M + 1 - m$  и сделаем тождественную замену  $m \equiv i$ . Тогда, сохранив прямой порядок вычисления оценок значений отсчетов, получаем:

$$\hat{x}_{k+m} = \sum_{j=1}^p \alpha_{M-m,j} x_{k+M+j}, \quad m = 1, 2, \dots, M. \quad (30)$$

Согласно (30) процедура восстановления значений отсчетов осуществляется также как и в (8) по  $p$  значениям отсчетов одной и той же выборки, но находящейся после восстанавливаемого участка. При этом весовые коэффициенты  $\alpha_{M-m,j}$  используются в обратном

порядке с увеличением индекса  $m$ , что эквивалентно осуществлению прямого прогноза на  $M - m$  шагов назад. Отсюда следует, что среднеквадратическая погрешность оценок значений отсчетов (30) будет определяться согласно (27). В свою очередь в качестве критерия выбора порядка модели  $p$  также будем использовать нормированное среднее значение среднеквадратической погрешности (28).

Важно отметить, что для соотношений (8) и (30), определяющих вычислительные процедуры восстановления значений отсчетов при прямом и обратном прогнозировании, метрологические характеристики идентичны. Вследствие этого выбор процедуры восстановления значений отсчетов на основе прямого или обратного прогнозирования будет определяться только достаточностью необходимого числа отсчетов выборки с известными значениями до или после проблемного участка, по которым осуществляется процедура восстановления.

**5. Восстановление значений отсчетов дискретной временной последовательности сигнала одновременно на основе прямого и обратного прогнозирования.** В простейшем случае задача восстановления утраченных значений отсчетов дискретной последовательности на основе прямого (8) и обратного прогнозирования (30) может быть решена следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{x}_{k+m} = \sum_{j=1}^p \alpha_{m-1,j} x_{k+1-j}, \quad m = 1, 2, 3, \dots, \eta; \\ \hat{x}_{k+m} = \sum_{j=1}^p \alpha_{M-m,j} x_{k+M+j}, \quad m = \eta + 1, \eta + 2, \dots, M; \end{array} \right. \quad (31)$$

где число  $\eta$  представляет собой целую часть отношения  $M / 2$ .

В данном случае в два раза уменьшается длительность прогнозирования как вперед, так и назад. Вследствие этого улучшаются метрологические характеристики результатов восстановления значений отсчетов. Данный подход к процедуре восстановления значений отсчетов не представляет особой сложности. Это объясняется тем, что необходимые для вычисления значений весовых коэффициентов  $\alpha_{m-1,j}$  оценки КФ для стационарных или квазистационарных сигналов могут быть вычислены по любой выборке отсчетов с известными значениями восстанавливаемой последовательности независимо от того какой вид прогнозирования осуществляется. Однако следует помнить, что число отсчетов такой

выборки должно быть достаточным для вычисления необходимого числа оценок КФ с учетом их статистической погрешности. При этом все-таки желательно, чтобы выборка была бы близко расположенной по отношению к восстанавливаемому участку.

Далее решение задачи по восстановлению утраченных значений отсчетов последовательности рассмотрим на основе совместного осуществления прямого и обратного прогнозирования. За основу примем соотношения (8) и (30). Тогда, сделаем в (30) формальную замену вида  $\alpha_{M-m,j} = \beta_{M-m,j}$ , процедуру восстановления значений отсчетов будем осуществлять следующим образом:

$$\hat{x}_{k+m} = \sum_{j=1}^p \alpha_{m-1,j} x_{k+1-j} + \sum_{j=1}^p \beta_{M-m,j} x_{k+M+j}, \quad m = 1, 2, \dots, M. \quad (32)$$

В (32) весовые коэффициенты  $\alpha_{m-1,j}$  и  $\beta_{M-m,j}$  будем находить также исходя из критерия минимума среднеквадратической погрешности (9). В соответствии с этим найдем частные производные первого порядка по каждому из этих коэффициентов, полагая все остальные коэффициенты постоянными. Приравняв полученные производные нулю с учетом (11) будем иметь систему уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^p \alpha_{m-1,j} R_{q-j} + \sum_{j=1}^p \beta_{M-m,j} R_{M-1+j+q} = R_{m-1+q}; \\ \sum_{j=1}^p \alpha_{m-1,j} R_{M-1+j+q} + \sum_{j=1}^p \beta_{M-m,j} R_{q-j} = R_{M-m+q}; \end{cases} \quad (33)$$

$$q = 1, 2, 3, \dots, p, \quad m = 1, 2, \dots, M.$$

Если в системе (33) изменение индекса  $m$  рассматривать в обратном порядке, т.е. когда  $m = M, M-1, M-2, \dots, 3, 2, 1$ , то первое уравнение в этой системе примет вид:

$$\sum_{j=1}^p \alpha_{M-m,j} R_{q-j} + \sum_{j=1}^p \beta_{m-1,j} R_{M-1+j+q} = R_{M-m+q}. \quad (34)$$

Сопоставляя (34) со вторым уравнением в (33), приходим к выводу о справедливости равенств  $\beta_{m-1,j} = \alpha_{m-1,j}$  и  $\beta_{M-m,j} = \alpha_{M-m,j}$ . Тогда соотношение (32) можно записать в следующем виде:

$$\hat{x}_{k+m} = \sum_{j=1}^p \alpha_{m-1,j} x_{k+1-j} + \sum_{j=1}^p \alpha_{M-m,j} x_{k+M+j}, \quad m = 1, 2, \dots, M. \quad (35)$$

В свою очередь система уравнений (33) примет вид:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^p \alpha_{m-1,j} R_{q-j} + \sum_{j=1}^p \alpha_{M-m,j} R_{M-1+j+q} = R_{m-1+q}; \\ \sum_{j=1}^p \alpha_{m-1,j} R_{M-1+j+q} + \sum_{j=1}^p \alpha_{M-m,j} R_{q-j} = R_{M-m+q}; \end{cases} \quad (36)$$

$$q = 1, 2, 3, \dots, p, \quad m = 1, 2, \dots, M.$$

Найдем решение системы уравнений (36). Во-первых, сложим верхнее и нижнее уравнения, образующие эту систему. Во-вторых, вычтем из верхнего уравнения нижнее. Соответственно получим:

$$\sum_{j=1}^p (\alpha_{m-1,j} + \alpha_{M-m,j})(R_{q-j} + R_{M-1+j+q}) = R_{m-1+q} + R_{M-m+q}, \quad (37)$$

$$\sum_{j=1}^p (\alpha_{m-1,j} - \alpha_{M-m,j})(R_{q-j} - R_{M-1+j+q}) = R_{m-1+q} - R_{M-m+q}. \quad (38)$$

В (37) и (38)  $q = 1, 2, 3, \dots, p$  и  $m = 1, 2, \dots, M$ . Структура этих уравнений соответствует уравнению (15). При этом для (37) будем иметь:

$$\begin{aligned} A_{m,j} &= \alpha_{m-1,j} + \alpha_{M-m,j}, \quad \lambda_{q,j} = R_{q-j} + R_{M-1+j+q}, \\ B_{q,m} &= R_{m-1+q} + R_{M-m+q}. \\ \lambda_{1,j}^{(1)} &= R_{1-j} + R_{M+j}, \quad j = 1, 2, 3, \dots, p. \\ B_{1,m}^{(1)} &= R_m + R_{M-m+1}, \quad m = 1, 2, \dots, M. \end{aligned} \quad (39)$$

В свою очередь для (38) будем иметь:

$$\begin{aligned} A_{m,j} &= \alpha_{m-1,j} - \alpha_{M-m,j}, \quad \lambda_{q,j} = R_{q-j} - R_{M-1+j+q}, \\ B_{q,m} &= R_{m-1+q} - R_{M-m+q}. \end{aligned} \quad (40)$$

$$\lambda_{1,j}^{(1)} = R_{1-j} - R_{M+j}, \quad j = 1, 2, 3, \dots, p.$$

$$B_{1,m}^{(1)} = R_m - R_{M-m+1}, \quad m = 1, 2, \dots, M.$$

С учетом введенных обозначений (39) и (40) решение каждой из систем уравнений (37) и (38) определяется соотношениями (17)-(22).

В результате решения системы (37) получаем:

$$A_{m,j} = (\alpha_{m-1,j} + \alpha_{M-m,j}) = W_1(m, j), \quad j = 1, 2, 3, \dots, p. \quad (41)$$

Соответственно в результате решения системы (38) получаем:

$$A_{m,j} = (\alpha_{m-1,j} - \alpha_{M-m,j}) = W_2(m, j), \quad j = 1, 2, 3, \dots, p. \quad (42)$$

Окончательно получаем, что весовые коэффициенты равны:

$$\alpha_{m-1,j} = \frac{W_1(m, j) + W_2(m, j)}{2}, \quad j = 1, 2, 3, \dots, p. \quad (43)$$

При вычислении оценки утраченного значения отсчета  $\hat{x}_{k+m}$  согласно (35) среднеквадратическая погрешность будет равна:

$$\begin{aligned} \delta_{p,m} &= \text{M}[(\sum_{j=1}^p (\alpha_{m-1,j} x_{k+1-j} + \alpha_{M-m,j} x_{k+M+j}) - x_{k+m})^2] = \\ &= R_0 - \sum_{j=1}^p (\alpha_{m-1,j} R_{m-1+j} + \alpha_{M-m,j} R_{M-m+j}). \end{aligned} \quad (44)$$

Как и ранее в качестве критерия выбора порядка модели  $p$  будем использовать среднее значение среднеквадратической погрешности нормированное относительно  $R_0$ :

$$\varepsilon_{p,m} = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \frac{\delta_{p,m}}{R_0} = 1 - \frac{2}{M} \sum_{j=1}^p \sum_{m=0}^{M-1} \alpha_{m,j} \frac{R_{m+j}}{R_0}, \quad m = 1, 2, \dots, M. \quad (45)$$

**4. Численные эксперименты по восстановлению дискретных последовательностей сигнала.** На основе соотношений (8), (30), (35) с учетом полученных решений для вычисления весовых

коэффициентов (17) и (41)-(43) осуществлена разработка алгоритмического обеспечения для восстановления утраченных значений отсчетов дискретной временной последовательности сигнала в процессе построения моделей скользящего среднего при прямом, обратном и совместном прогнозировании [42]. Данное алгоритмическое обеспечение реализовано в виде функционально завершенного метрологически значимого программного модуля. Разработка модуля осуществлена в соответствии с обязательными требованиями нормативных документов, регламентирующих обеспечение единства процедур измерения и вычислительных процедур, которые влияют на метрологические характеристики результатов измерений [43, 44]. Модуль предназначен для работы в режиме асинхронного управления с возможностью выбора одного из трех альтернативных вариантов процедуры восстановления значений отсчетов. Такой режим работы позволяет осуществлять модулю свои функции без прерывания выполнения основной прикладной программы в процессе обработки дискретной последовательности сигнала. Предусмотрена возможность многократного использования модуля в составе метрологически значимого программного обеспечения для multifunctional систем анализа сложных сигналов [45 – 47].

Тестирование алгоритмического обеспечения и проверка работоспособности программного модуля по выполнению функциональных возможностей восстановления утраченных значений отсчетов осуществлялись на основе имитационного моделирования дискретной последовательности сигнала [48]. Модель сигнала представляла собой аддитивную смесь, содержащую  $L$  независимых гармонических компонент со случайными начальными фазами  $\varphi_v \in [-\pi; +\pi]$ , которые задавались в соответствии с равномерным законом распределения. Значения амплитуд  $A_v$  и частот  $f_v$  гармонических компонент задавались в пределах от нуля до единицы и интерпретировались как нормированные соответственно по отношению к значению наибольшей амплитуде гармоники, присутствующей в составе модели сигнала, и к значению верхней границы частотного диапазона, занимаемого гармониками. При этом постоянная составляющая модели принималась равной нулю. Интерпретация значений амплитуд  $A_v$  и частот  $f_v$  гармонических компонент как номерованных позволила в ходе проведения тестовых испытаний формализовать процедуру исследования метрологических возможностей разработанных алгоритмов для восстановления

значений отсчетов сигналов по отношению к их амплитудно-частотным характеристикам. Использование нормированных частот объясняется также тем, что в процессе восстановления значений отсчетов важны не абсолютные значения частот гармоник, а их соотношение в составе сигнала. Кроме того, такой подход позволил достаточно просто контролировать изменение во времени формы модели сигнала и его КФ. Отметим, что для гармонической компоненты с амплитудой  $A_v$ , частотой  $f_v$  и начальной фазой  $\varphi_v$  КФ будет косинусоидой с амплитудой  $A_v^2/2$  и той же самой частотой:

$$R_{XX}(\tau) = \frac{A_v^2}{2} \cos 2\pi f_v \tau. \quad (46)$$

КФ модели сигнала, являющегося суммой  $L$  независимых гармонических компонент, будет представлять собой сумму их КФ:

$$R_{XX}(\tau) = \frac{1}{2} \sum_{v=1}^L A_v^2 \cos 2\pi f_v \tau. \quad (47)$$

Следует отметить так же то, что КФ гармонического сигнала не сохраняет информацию о его начальной фазе. Имея только оценки значений КФ можно получить бесконечный ансамбль гармоник с одинаковыми по форме КФ, но с отличающимися фазовыми сдвигами во времени по отношению друг к другу. Это означает, что нельзя однозначно восстановить гармонический сигнал или сигнал, содержащий гармонические компоненты, только по значениям оценок его КФ. Еще раз отметим, что КФ позволяет получить представление только о линейной стохастической связи между значениями сигнала в различные моменты времени. Поэтому использование в качестве модели сигнала суммы гармонических компонент со случайными начальными фазами позволяет оценить, насколько точно разработанное алгоритмическое обеспечение по имеющимся значениям отсчетов только на основе оценки их корреляционной связи позволяет осуществить прямое и обратное прогнозирование во времени и восстановить значения отсчетов на проблемных участках дискретной последовательности сигнала.

Тестовые испытания главным образом были направлены на оценку результатов восстановления значений отсчетов в зависимости от выбора порядка модели восстановления. При этом осуществлялась предварительная оценка значений КФ с необходимой точностью

в соответствии с принципами корреляционного анализа сигналов. Как было отмечено выше, для стационарного сигнала оценка КФ может быть вычислена на любом участке с достоверными значениями отсчетов в пределах обрабатываемой последовательности. Поэтому вычисление оценок КФ может быть осуществлено только один раз, даже если необходимо восстановить несколько участков с проблемными отсчетами. Хотя следует иметь в виду, что по возможности участок последовательности, по отсчетам которого будут вычисляться оценки КФ, должен находиться как можно ближе к восстанавливаемому участку.

В процессе тестовых экспериментов формирование дискретной последовательности реализации модели сигнала осуществлялось как с повышенной частотой дискретизации, так и в случае, когда частоты гармонических компонент были близки к частоте дискретизации, задаваемой согласно теореме Котельникова (Найквиста). В первом случае, предоставляется возможность исследовать характерные особенности алгоритмов, связанные с «чувствительностью» осуществлять прогнозирование и восстановление значений соседних отсчетов с мало отличающимися значениями, когда корреляционная зависимость между ними также изменяется незначительно. Во втором случае предоставляется возможность исследовать способность алгоритмов прогнозировать и восстанавливать значения отсчетов по мере увеличения расстояния и ослабевании корреляционной зависимости между ними.

Одна из реализаций модели сигнала содержала пять гармонических компонент, параметры которых приведены в таблице 1.

Таблица 1. Параметры гармонических компонент

$v$	$A_v$	$f_v$	$\varphi_v$
1	0,15	0,2	0,959222
2	0,25	0,35	-1,559470
3	1,0	0,5	1,275801
4	0,5	0,75	-1,444726
5	0,1	1,0	1,314656

Для гармонического состава модели сигнала, приведенного в таблице 1, компонентой с наибольшей нормированной частотой является синусоида под номером пять, частота которой равна единице. Исходя из этого, формирование дискретной последовательности с повышенной частотой дискретизации, в частности, осуществлялось

с нормированной частотой  $F_s = 100f_s = 100$ , т.е. интервал дискретизации был равен  $\Delta t = 0,01$ . В процессе экспериментальных исследований конечное число отсчетов на любом участке последовательности можно интерпретировать как отсчеты с утраченными значениями. Так, например, в качестве проблемного участка рассматривались отсчеты с индексами  $n \in [1201; 1215]$ , т.е.  $k = 1200$  и  $M = 15$ . На рисунках 2 и 3 приведены соответственно фрагмент реализации модели сигнала с учетом места нахождения проблемного участка и сам проблемный участок последовательности. На рисунке 4 приведен фрагмент оценки КФ, вычисленной по отсчетам данной последовательности.

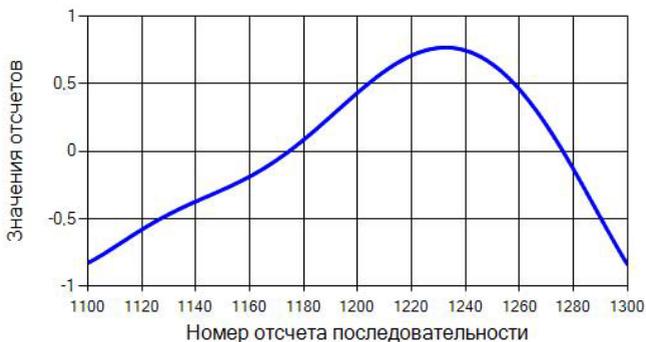


Рис. 2. Фрагмент реализации модели сигнала с проблемным участком

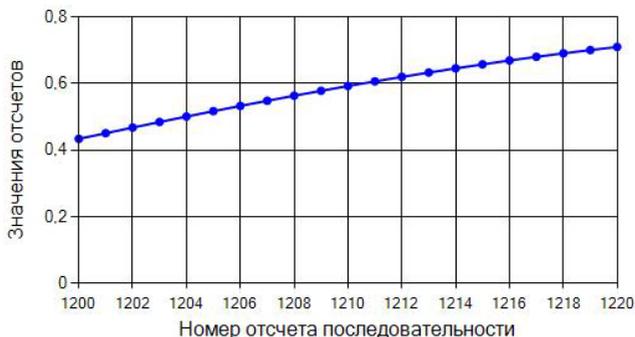
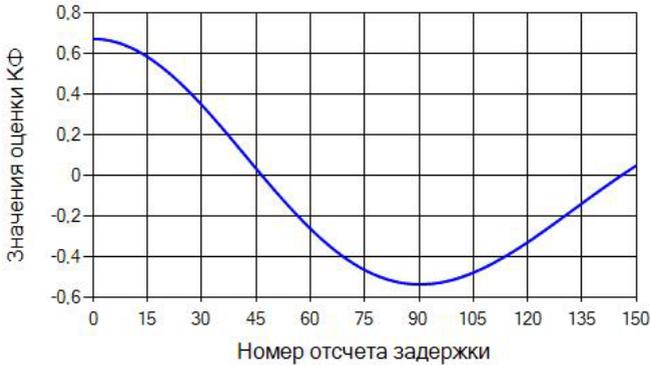


Рис. 3. Проблемный участок последовательности;  $F_s = 100f_s = 100$

Рис. 4. Фрагмент оценки КФ;  $F_s = 100f_5 = 100$ 

В таблицах 2, 3 и 4 представлены результаты тестовых экспериментов по восстановлению проблемного участка последовательности для  $n \in [1201; 1215]$  при прямом, обратном и совместном прогнозировании. Порядок модели восстановления  $p$  был равен пяти, десяти и пятнадцати. С целью количественной оценки отклонения восстановленных числовых значений отсчетов от их истинных значений вычислялась относительная погрешность  $\delta_{k+m}^x = (\hat{x}_{k+m} - x_{k+m})/x_{k+m}$ . В нижней части таблиц 2, 3 и 4 также приведены значения для среднеквадратической погрешности

$$\delta_{\text{MSE}}^x = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M (\hat{x}_{k+m} - x_{k+m})^2}$$
 и средней абсолютной погрешности

$$\delta_{\text{MAE}}^x = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M |\hat{x}_{k+m} - x_{k+m}|.$$

Как следует из таблиц 2, 3 и 4 результаты тестовых экспериментов не содержат грубых систематических ошибок, которые существенно бы искажали истинные значения восстанавливаемых отсчетов. С увеличением порядка модели  $p$  относительная погрешность уменьшается. При этом уже при порядке модели  $p = 10$  в пределах всего проблемного участка, на котором было осуществлено восстановление отсчетов, изменение относительной погрешности для любой из рассматриваемых процедур восстановления не превышает по абсолютной величине значения 0,01, т.е. одного процента от истинных значений отсчетов. Среднеквадратическая и средняя абсолютная погрешности также уже при  $p = 10$  практически не превышают значения 0,01.

Таблица 2. Результаты восстановления отсчетов: прямое прогнозирование

Частота дискретизации $F_s = 100f_s = 100$								
$m$	$k+m$	$x_{k+m}$	Порядок модели					
			$p = 5$		$p = 10$		$p = 15$	
			$\hat{x}_{k+m}$	$\delta_{k+m}^x$	$\hat{x}_{k+m}$	$\delta_{k+m}^x$	$\hat{x}_{k+m}$	$\delta_{k+m}^x$
1	1201	0,4513	0,4508	-0,0011	0,4511	-0,0004	0,4511	-0,0003
2	1202	0,4681	0,4670	-0,0023	0,4677	-0,0009	0,4678	-0,0007
3	1203	0,4848	0,4828	-0,0041	0,4841	-0,0014	0,4842	-0,0011
4	1204	0,5011	0,4981	-0,0060	0,5001	-0,0020	0,5003	-0,0016
5	1205	0,5172	0,5130	-0,0081	0,5158	-0,0027	0,5161	-0,0021
6	1206	0,5330	0,5273	-0,0107	0,5311	-0,0036	0,5315	-0,0028
7	1207	0,5485	0,5412	-0,0133	0,5461	-0,0044	0,5466	-0,0035
9	1208	0,5636	0,5545	-0,0161	0,5606	-0,0053	0,5612	-0,0043
9	1209	0,5784	0,5673	-0,0192	0,5747	-0,0064	0,5753	-0,0052
10	1210	0,5927	0,5795	-0,0223	0,5883	-0,0074	0,5890	-0,0062
11	1211	0,6066	0,5911	-0,0256	0,6014	-0,0086	0,6022	-0,0073
12	1212	0,6201	0,6020	-0,0292	0,6140	-0,0098	0,6149	-0,0085
13	1213	0,6332	0,6123	-0,0330	0,6260	-0,0114	0,6270	-0,0098
14	1214	0,6458	0,6220	-0,0369	0,6374	-0,0130	0,6385	-0,0112
15	1215	0,6578	0,6310	-0,0407	0,6483	-0,0144	0,6494	-0,0128
$\delta_{MSE}^x$			0,01363		0,00470		0,00405	
$\delta_{MAE}^x$			0,01082		0,00370		0,00314	

Таблица 3. Результаты восстановления отсчетов: обратное прогнозирование

Частота дискретизации $F_s = 100f_s = 100$								
$m$	$k+m$	$x_{k+m}$	Порядок модели					
			$p = 5$		$p = 10$		$p = 15$	
			$\hat{x}_{k+m}$	$\delta_{k+m}^x$	$\hat{x}_{k+m}$	$\delta_{k+m}^x$	$\hat{x}_{k+m}$	$\delta_{k+m}^x$
1	1201	0,4513	0,4508	-0,0011	0,4511	-0,0005	0,4511	-0,0005
2	1202	0,4681	0,4669	-0,0026	0,4677	-0,0007	0,4678	-0,0006
3	1203	0,4848	0,4826	-0,0045	0,4841	-0,0015	0,4842	-0,0012
4	1204	0,5011	0,4979	-0,0064	0,5001	-0,0018	0,5003	-0,0016
5	1205	0,5172	0,5127	-0,0087	0,5159	-0,0027	0,5161	-0,0021
6	1206	0,5330	0,5270	-0,0113	0,5312	-0,0034	0,5315	-0,0028
7	1207	0,5485	0,5408	-0,0140	0,5462	-0,0042	0,5465	-0,0036
8	1208	0,5636	0,5540	-0,0170	0,5608	-0,0052	0,5611	-0,0044
9	1209	0,5784	0,5667	-0,0202	0,5749	-0,0060	0,5753	-0,0054
10	1210	0,5927	0,5787	-0,0236	0,5885	-0,0072	0,5889	-0,0064

Частота дискретизации $F_s = 100f_s = 100$								
$m$	$k+m$	$x_{k+m}$	Порядок модели					
			$p = 5$		$p = 10$		$p = 15$	
			$\hat{x}_{k+m}$	$\delta_{k+m}^x$	$\hat{x}_{k+m}$	$\delta_{k+m}^x$	$\hat{x}_{k+m}$	$\delta_{k+m}^x$
11	1211	0,6066	0,5902	-0,0270	0,6016	-0,0083	0,6021	-0,0074
12	1212	0,6201	0,6010	-0,0308	0,6142	-0,0094	0,6147	-0,0087
13	1213	0,6332	0,6112	-0,0347	0,6263	-0,0110	0,6268	-0,0101
14	1214	0,6458	0,6207	-0,0389	0,6377	-0,0126	0,6382	-0,0118
15	1215	0,6578	0,6296	-0,0429	0,6486	-0,0141	0,6491	-0,0132
		$\delta_{MSE}^x$	0,01438		0,00453		0,00418	
		$\delta_{MAE}^x$	0,01143		0,00355		0,00323	

Таблица 4. Результаты восстановления отсчетов: прямое и обратное прогнозирование

Частота дискретизации $F_s = 100f_s = 100$								
$m$	$k+m$	$x_{k+m}$	Порядок модели					
			$p = 5$		$p = 10$		$p = 15$	
			$\hat{x}_{k+m}$	$\delta_{k+m}^x$	$\hat{x}_{k+m}$	$\delta_{k+m}^x$	$\hat{x}_{k+m}$	$\delta_{k+m}^x$
1	1201	0,4513	0,4509	-0,0008	0,4512	-0,0001	0,4512	-0,0001
2	1202	0,4681	0,4671	-0,0021	0,4678	-0,0004	0,4679	-0,0003
8	1203	0,4848	0,4828	-0,0042	0,4842	-0,0013	0,4844	-0,0011
4	1204	0,5011	0,4981	-0,0059	0,5003	-0,0015	0,5005	-0,0012
5	1205	0,5172	0,5130	-0,0081	0,5161	-0,0021	0,5163	-0,0016
6	1206	0,5330	0,5273	-0,0105	0,5315	-0,0027	0,5318	-0,0022
7	1207	0,5485	0,5412	-0,0135	0,5465	-0,0037	0,5468	-0,0031
3	1208	0,5636	0,5544	-0,0165	0,5611	-0,0046	0,5615	-0,0039
9	1209	0,5784	0,5671	-0,0193	0,5753	-0,0053	0,5758	-0,0044
10	1210	0,5927	0,5793	-0,0228	0,5890	-0,0064	0,5895	-0,0055
11	1211	0,6066	0,5908	-0,0260	0,6021	-0,0073	0,6028	-0,0063
12	1212	0,6201	0,6017	-0,0299	0,6148	-0,0087	0,6155	-0,0076
13	1213	0,6332	0,6119	-0,0337	0,6269	-0,0100	0,6277	-0,0087
14	1214	0,6458	0,6215	-0,0375	0,6385	-0,0112	0,6394	-0,0098
15	1215	0,6578	0,6304	-0,0416	0,6494	-0,0127	0,6504	-0,0112
		$\delta_{MSE}^x$	0,01388		0,00408		0,00355	
		$\delta_{MAE}^x$	0,01098		0,00317		0,00271	

В процессе тестовых испытаний, связанных с исследованием способности алгоритмов прогнозировать и восстанавливать значения отсчетов, когда частоты гармонических компонент сигнала были бы близки к частоте дискретизации, формирование последовательности осуществлялось с предельно низкой частотой. Для гармонического состава модели сигнала, приведенного в таблице 1, согласно теореме Котельникова (Найквиста) она была равна  $F_s = 2f_s = 2$ , т.е. интервал дискретизации был равен  $\Delta t = 0,5$ . В частности, отсчеты последовательности в количестве  $M = 15$  с индексами  $n \in [121; 135]$  рассматривались в качестве проблемного участка. Здесь  $k = 120$ . На рисунке 5 приведен фрагмент последовательности модели сигнала с учетом места нахождения этого участка, а на рисунке 6 приведен фрагмент оценки КФ, вычисленной по отсчетам данной последовательности.

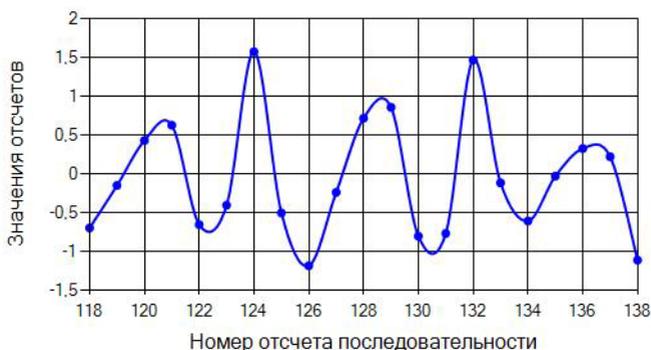


Рис. 5. Проблемный участок последовательности;  $F_s = 2f_s = 2$

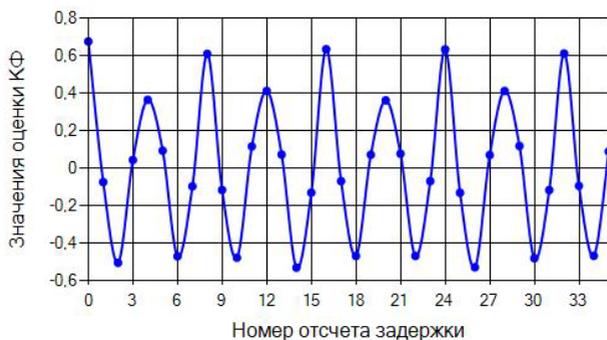


Рис. 6. Фрагмент оценки КФ;  $F_s = 2f_s = 2$

В таблице 5 представлены результаты тестовых экспериментов по восстановлению проблемного участка последовательности для  $n \in [121; 135]$  при прямом, обратном и совместном прогнозировании для случая, когда порядок модели восстановления  $p = 10$ . В пределах всего проблемного участка значения относительной погрешности для любой процедуры восстановления находятся на достаточно низком уровне. Среднеквадратическая и средняя абсолютная погрешности практически находятся в пределах значения 0,01.

Таблица 5. Результаты восстановления отсчетов: порядок модели  $p = 10$ 

Частота дискретизации $F_s = 2f_5 = 2$								
$m$	$k+m$	$x_{k+m}$	Вид прогнозирования					
			Прямое		Обратное		Прямое и обратное	
			$\hat{x}_{k+m}$	$\delta_{k+m}^x$	$\hat{x}_{k+m}$	$\delta_{k+m}^x$	$\hat{x}_{k+m}$	$\delta_{k+m}^x$
1	121	0,6282	0,6393	0,0176	0,6394	0,0180	0,6393	0,0176
2	122	-0,6538	-0,6296	-0,0370	-0,6296	-0,0370	-0,6296	- 0,0369
3	123	-0,4033	-0,4232	0,0492	-0,4233	0,0492	-0,4232	0,0493
4	124	1,5754	1,5712	-0,0027	1,5712	-0,0027	1,5711	- 0,0027
5	125	-0,5028	-0,5212	0,0367	-0,5214	0,0368	-0,5212	0,0366
6	126	-1,1841	-1,1788	-0,0044	-1,1789	-0,0044	-1,1788	- 0,0045
7	127	-0,2373	-0,2284	-0,0379	-0,2283	-0,0374	-0,2283	- 0,0378
8	128	0,7175	0,7128	-0,0065	0,7130	-0,0060	0,7128	- 0,0064
9	129	0,8594	0,8555	-0,0045	0,8555	-0,0043	0,8555	- 0,0046
10	130	-0,8030	-0,7886	-0,0179	-0,7885	-0,0180	-0,7885	- 0,0181
11	131	-0,7678	-0,7792	0,0148	-0,7792	0,0151	-0,7791	0,0148
12	132	1,4689	1,4869	0,0123	1,4872	0,0125	1,4869	0,0123
13	133	-0,1153	-0,1167	0,0121	-0,1168	0,0130	-0,1168	0,0127
14	134	-0,6073	-0,6051	-0,0036	-0,6052	-0,0038	-0,6051	- 0,0036
15	135	-0,0292	-0,0318	0,0885	-0,0319	0,0989	-0,0318	0,0865
$\delta_{MSE}^x$			0,01233		0,012402		0,01234	
$\delta_{MAE}^x$			0,01004		0,010087		0,01006	

Тестовые эксперименты проводились также с учетом увеличения длительности проблемного участка, в пределах которого необходимо осуществить процедуру восстановления отсчетов. Целью этих экспериментов была оценка точности восстановления значений утраченных отсчетов по мере увеличения временного интервала проблемного участка при неизменном значении порядка модели. В данном случае также рассматривалась последовательность, полученная в результате дискретизации с предельно низкой частотой  $F_s = 2f_s = 2$  модели сигнала с параметрами, приведенными в таблице 1. В частности, в процессе имитации увеличения длительности проблемного участка использовались отсчеты с индексами  $n \in [121; 220]$ . В ходе проведения экспериментов было принято, что  $k = 120$  и остается постоянным, а участок с проблемными отсчетами последовательно увеличивался с начального значения  $M = 10$  до  $M = 100$ . При этом интервал увеличения длительности проблемного участка был равен десяти отсчетам. К примеру, в таблице 6 для порядка модели  $p = 10$  приведены значения среднеквадратической и средней абсолютной погрешностей, характеризующие точность вычисления оценок значений отсчетов при прямом прогнозировании в зависимости от увеличения длительности проблемного участка. Эти погрешности практически незначительно превышают значение 0,01.

Таблица 6. Среднеквадратическая и средняя абсолютная погрешности восстановления значений отсчетов при прямом прогнозировании в зависимости от увеличения длительности проблемного участка

Частота дискретизации $F_s = 2f_s = 2$ . Порядок модели $p = 10$ .						
M	Вид прогнозирования					
	Прямое		Обратное		Прямое и обратное	
	$\delta_{MSE}^x$	$\delta_{MAE}^x$	$\delta_{MSE}^x$	$\delta_{MAE}^x$	$\delta_{MSE}^x$	$\delta_{MAE}^x$
10	0,01231	0,01008	0,01230	0,01007	0,01221	0,01002
20	0,01242	0,01023	0,01243	0,01023	0,01235	0,01017
30	0,01251	0,01032	0,01255	0,01032	0,01245	0,01026
40	0,01231	0,01008	0,01230	0,01008	0,01221	0,01000
50	0,01255	0,01036	0,01254	0,01036	0,01246	0,01029
60	0,01262	0,01031	0,01261	0,01030	0,01250	0,01023
70	0,01272	0,01049	0,01271	0,01049	0,01262	0,01041
80	0,01347	0,01150	0,01345	0,01149	0,01332	0,01131
90	0,01352	0,01132	0,01350	0,01131	0,01337	0,01118
100	0,01302	0,01062	0,01301	0,01062	0,01289	0,01051

Полученные результаты тестовых экспериментов, позволяют сделать вывод о том, что с метрологической точки зрения разработанное алгоритмическое обеспечение на основе построения модели скользящего среднего и оценки корреляционной связи между отсчетами при прямом и обратном прогнозировании позволяет осуществлять восстановление значений отсчетов дискретной последовательности сигнала с достаточно низкой погрешностью.

В реальных условиях среда распространения сигнала может быть подвержена воздействию внешних фоновых шумов. Это может привести к эффекту наложения шума на полезный сигнал и оказать негативное влияние на его форму. В этом случае можно считать, что восстановленные значения содержат оценку и шумовой составляющей в отсчетах сигнала. Вследствие этого в процессе последующей цифровой обработки восстановленной дискретной последовательности по возможности следует учитывать степень коррелированности полезного сигнала и шумов среды его распространения. При этом необходимо иметь в виду, что КФ случайного шума по мере увеличения временного сдвига затухает и ее можно считать отличной от нуля только в пределах интервала корреляции его значений.

**5. Заключение.** В статье рассмотрена задача восстановления численных значений отсчетов на проблемных участках дискретной последовательности, полученной в результате равномерной дискретизации во времени непрерывного сигнала. Задача решалась исходя из того, что исходный сигнал можно рассматривать как стационарный или стационарный хотя бы в широком смысле (квазистационарный) в пределах интервала времени его анализа. Разработка математического и соответствующего ему алгоритмического обеспечения для восстановления значений отсчетов сигнала осуществлена на основе построения модели скользящего среднего и оценки их корреляционной связи во времени при прямом, обратном и совместном прогнозировании. Необходимая для восстановления последовательность оценок КФ сигнала вычисляется по отсчетам последовательности с известными значениями. С учетом выполнения условия стационарности сигнала это можно сделать на любом участке последовательности независимо от места нахождения восстанавливаемого участка. При этом полученные оценки отсчетов КФ могут использоваться как для прямого, так и для обратного прогнозирования. Более того, даже если проблемных участков будет несколько, достаточно только один раз вычислить необходимую для их восстановления последовательность оценок КФ. Единственным условием является только то, что число отсчетов участка

последовательности с известными значениями, на котором будут вычисляться отсчеты КФ, должно быть достаточным для этого.

Значения весовых коэффициентов модели скользящего среднего при прямом, обратном и совместном прогнозировании находятся из критерия минимума среднеквадратической погрешности, среднее значение которой используется в качестве критерия выбора ее порядка.

Полученные математические соотношения стали основой для разработки вычислительных алгоритмов, определяющих процедуры восстановления утраченных значений отсчетов. Данные алгоритмы являются неитеративными. На их основе с использованием компонентно-ориентированного программирования разработано программное обеспечение, представляющее собой функционально завершенный модуль. Данный модуль предназначен для работы в составе метрологически значимого программного обеспечения многофункциональных систем цифровой обработки сигналов.

Тестовые испытания и функциональные проверки разработанного алгоритмического обеспечения и программного модуля проводились на основе имитационного моделирования. Полученные результаты показали, что вычисление оценок значений утраченных отсчетов на проблемных участках последовательности сигнала осуществляется с достаточно низкой погрешностью, как при прямом, так и при обратном прогнозировании, а также при их совместном использовании.

На практике выбор конкретного алгоритма восстановления последовательности на основе прямого или обратного прогнозирования будет определяться исходя из реальных условий, в которых приходится осуществлять восстанавливающие процедуры. В частности, если предыдущих отсчетов с известными значениями недостаточно для осуществления прямого прогнозирования, то реализуется процедура обратного прогнозирования. Может возникнуть ситуация, когда восстановлению подлежат несколько проблемных участков последовательности, находящихся близко по отношению друг к другу. Может оказаться так, что для некоторых из этих участков будет невозможно осуществить процедуру восстановления утраченных значений отсчетов непосредственно ни по предыдущим и ни по последующим отсчетам с известными значениями. В принципе в такой ситуации можно использовать оба вида прогнозирования. Однако участки отсчетов с известными значениями могут быть достаточно удалены от проблемных участков. В этом случае более целесообразно

использовать алгоритм восстановления значений отсчетов одновременно на основе прямого и обратного прогнозирования.

### Литература

1. Zhang T., Ren J., Li J., Nguyen L.H., Stoica P. Joint RFI Mitigation and Radar Echo Recovery for One-Bit UWB Radar // *Signal Processing*. 2022. vol. 193. no. 108409.
2. Mardani D., Atia G.K., Abouraddy A.F. Signal Reconstruction from Interferometric Measurements under Sensing Constraints // *Signal Processing*. 2019. vol. 155. pp. 323–333.
3. Zhang Y., Yong G. Source Number of Single-Channel Signals Intelligent Estimation via Signal Reconstruction // *Digital Signal Processing*. 2023. vol. 140(16). no. 104100.
4. Семченков С.М., Жбанов И.Л., Абраменков А.В., Коваленков А.Н., Макаров М.С., Печенев Е.А. Методы обеспечения устойчивости восстановления сигнала в радиолокационных измерениях // *Электромагнитные волны и электронные системы*. 2020. Т. 25. № 5. С. 50–66.
5. Amini F., Hedayati Y., Zanddizari H. Exploiting the Inter-Correlation of Structural Vibration Signals for Data Loss Recovery: A Distributed Compressive Sensing Based Approach // *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2021. vol. 152. no. 107473.
6. Thadikemalla V.S.G., Gandhi A.S. A Data Loss Recovery Technique Using Compressive Sensing for Structural Health Monitoring Applications // *KSCIE Journal of Civil Engineering*. 2018. vol. 22. no. 12. pp. 5084–5093.
7. Li Y., Tse P.W., Wang X. Recovery of Vibration Signal Based on a Super-Exponential Algorithm // *Journal of Sound and Vibration*. 2008. vol. 311. no. 1-2. pp. 537–553.
8. Liu F., Zhang A., Du R., Xu J., Hu Z. HTR-CTO Algorithm for Wireless Data Recovery // *Information Sciences*. 2022. vol. 587. pp. 515–534.
9. Yang L., Wang H., Qian H. An ADMM-ResNet for Data Recovery in Wireless Sensor Networks with Guaranteed Convergence // *Digital Signal Processing*. 2021. vol. 111. no. 102956.
10. Wu H., Xian J., Wang J., Khandge S., Mohapatra P. Missing Data Recovery Using Reconstruction in Ocean Wireless Sensor Networks // *Computer Communications*. 2018. vol. 132. pp. 1–9.
11. Поршнев С.В., Кусайкин Д.В. Восстановление неравномерно дискретизированных сигналов с неизвестными значениями координат узлов временной сетки // *Успехи современной радиоэлектроники*. 2015. № 6. С. 3–35.
12. Khan N.A., Ali S. Robust Sparse Reconstruction of Signals with Gapped Missing Samples from Multi-Sensor Recordings // *Digital Signal Processing*. 2022. vol. 123. no. 103392.
13. Aceska R., Bouchot J.-L., Li S. Local Sparsity and Recovery of Fusion Frame Structured Signals // *Signal Processing*. 2020. vol. 174. no. 107615.
14. Stankovic L., Stankovic S., Amin M. Missing samples analysis in signals for applications to L-estimation and compressive sensing // *Signal Processing*. 2014. vol. 94. pp. 401–408.
15. Aldroubi A., Leonetti C. Non-Uniform Sampling and Reconstruction from Sampling Sets with Unknown Jitter // *Sampling Theory in Signal and Image Processing*. 2008. vol. 7. no. 2. pp. 187–195.
16. Nordio A., Chiasserini C-F., Viterbo E. Signal Reconstruction Errors in Jittered Sampling // *IEEE Transactions on signal Processing*. 2009. vol. 57. no. 12. pp. 4711–4718.

17. Maymon S., Oppenheim A.V. Sinc Interpolation of Nonuniform Samples // IEEE Transactions on Signal Processing. 2011. vol. 59. no. 10. pp. 4745–4758.
18. Andras I., Dolinsky P., Michaeli L., Saliga J. A Time Domain Reconstruction Method of Randomly Sampled Frequency Sparse Signal // Measurement. 2018. vol. 127. pp. 68–77.
19. Cui A, Zhang L., He H., Wen M. A Truncated Approximate Difference Algorithm for Sparse Signal Recovery // Digital Signal Processing. 2023. vol. 141. no. 104191.
20. Bilinskis I. Digital Alias-free Signal Processing // Wiley. 2007. 454 p.
21. Eamaz A., Yeganegi F., Soltanalian M. Covariance Recovery for One-Bit Sampled Stationary Signals with Time-Varying Sampling Thresholds // Signal Processing. 2023. vol. 206. no. 108899.
22. Якимов В.Н., Машков А.В. Знаковый алгоритм анализа спектра амплитуд и восстановления гармонических составляющих сигналов в условиях присутствия некоррелированных фоновых шумов // Научное приборостроение. 2017. Т. 27. № 2. С. 83–90.
23. Wanga P., Yanga H., Yea Z. 1-Bit direction of arrival estimation via improved complex-valued binary iterative hard thresholding // Digital Signal Processing. 2022. vol. 120. no. 103265.
24. Guoa L.-B., Donga C.-X., Donga Y.-Y., Sunb T., Maoa Y. One-bit LFM signal recovery: A consistency algorithm with one-sided weighted quadratic penalty // Digital Signal Processing. 2022. vol. 127. no. 103575.
25. Якимов В.Н., Машков А.В. Цифровое оценивание моментов корреляционной функции на основе знакового аналого-стохастического квантования случайного процесса // Измерительная техника. 2016. № 1. С. 11–13.
26. Lu Y.M., Vetterli M. Multichannel Sampling with Unknown Gains and Offsets: A Fast Reconstruction Algorithm // Proc. of Allerton Conference on Communication, Control and Computing. 2010. 7 p.
27. Choe C.-G., Pak J.-H., Rim C.-S. Joint. Near-Isometry and Optimal Sparse Recovery: Nonuniform Recovery from Multi-Sensor Measurements // Signal Processing. 2023. vol. 208. no. 108980.
28. Liu N., Tao R., Wang R., Deng Y., Li N., Zhao S. Signal Reconstruction from Recurrent Samples in Fractional Fourier Domain and Its application in Multichannel SAR // Signal Processing. 2017. vol. 131. pp. 288–299.
29. Wang H., Yang S., Liu Y., Li Q. Compressive Sensing Reconstruction for Rolling Bearing Vibration Signal Based on Improved Iterative Soft Thresholding Algorithm // Measurement. 2023. vol. 210. no. 112528.
30. Sejdic E., Orovic I., Stankovic S. Compressive sensing meets time-frequency: An overview of recent advances in time-frequency processing of sparse signals // Digital Signal Processing. 2018. vol. 77. pp. 22–35.
31. Tang Q., Jiang Y., Xin J., Liao G., Zhou J. Yang X. A Novel Method for the Recovery of Continuous Missing Data Using Multivariate Variational Mode Decomposition and Fully Convolutional Networks // Measurement. 2023. vol. 220. no. 113366.
32. Жукова Н.А., Соколов И.С. Метод восстановления структуры группового телеметрического сигнала на основе графовой модели // Труды СПИИРАН. 2010. vol. 2(13). С. 45–66.
33. Khan N.A., Ali S. Reconstruction of gapped missing samples based on instantaneous frequency and instantaneous amplitude estimation // Signal Processing. 2022. vol. 193. no. 108429.
34. Dokuchaev N. On Recovery of Discrete Time Signals from Their Periodic Subsequences // Signal Processing. 2019. vol. 162. pp. 180–188.

35. Annaby M.H., Al-Abdi I.A., Abou-Dina M.S., Ghaleb A.F. Regularized Sampling Reconstruction of Signals in the Linear Canonical Transform Domain // *Signal Processing*. 2022. vol. 198. no. 108569.
36. Yue C., Liang J., Qu B., Han Y., Zhu Y., Crisalle O.D. A Novel Multiobjective Optimization Algorithm for Sparse Signal Reconstruction // *Signal Processing*. 2020. vol. 167. no. 107292.
37. Wijenayake C., Scutts J., Ignjatovic A. Signal recovery algorithm for 2-level amplitude sampling using chromatic signal approximations // *Signal Processing*. 2018. vol. 153. pp. 143–152.
38. Катковник В.Я. Непараметрическая идентификация и сглаживание данных: метод локальной аппроксимации // М.: Главная редакция физико-математической литературы. 1985. 336 с.
39. Якимов В.Н. Восстановление дискретной временной последовательности сигнала на основе локальной аппроксимации с использованием ряда Фурье по ортогональной системе тригонометрических функций // *Информатика и автоматизация*. 2022. Т. 21. № 5. С. 1016–1043.
40. Marple S.L.Jr. *Digital Spectral Analysis: Second Edition* // Mineola, New York: Dover Publications, Inc. 2019. 409 p.
41. Proakis J.G., Manolakis D.G. *Digital Signal Processing* // Pearson Education Limited, 2014. 1014 p.
42. ГОСТ Р 8.883-2015 Государственная система обеспечения единства измерений. Программное обеспечение средств измерений. Алгоритмы обработки, хранения, защиты и передачи измерительной информации. Методы испытаний. Введ. 2016-03-01. М.: Стандартинформ, 2018. 19 с.
43. ГОСТ Р 51904-2002 Программное обеспечение встроенных систем. Общие требования к разработке и документированию. Введ. 2003-07-01. М.: Госстандарт России, 2005. 63 с.
44. ГОСТ 8.654-2015 Государственная система обеспечения единства измерений. Требования к программному обеспечению средств измерений. Основные положения. Введ. 2016-03-01. М.: Стандартинформ, 2015. 11 с.
45. Yakimov V.N., Gorbachev O.V. Firmware of the Amplitude Spectrum Evaluating System for Multicomponent Processes // *Instruments and Experimental Techniques*. 2013. vol. 56. no. 5. pp. 540–545.
46. Yakimov V.N., Zaberzhinskij B.E., Mashkov A.V., Bukanova Yu.V. Multi-threaded Approach to Software High-speed Algorithms for Spectral Analysis of Multi-component Signals // *XXI International Conference Complex Systems: Control and Modeling Problems (CSCMP)*. 2019. IEEE. pp. 698–701.
47. Якимов В.Н., Машков А.В., Желонкин А.В. Специализированное программное обеспечение измерительной системы для оперативного оценивания спектрального состава многокомпонентных процессов // *Программные продукты и системы*. 2019. Т. 32. № 1. С. 159–166.
48. ГОСТ Р 57700.22-2020 Компьютерные модели и моделирование. Классификация. Введ. 2021-06-01. М.: Стандартинформ, 2020. 7 с.

**Якимов Владимир Николаевич** — д-р техн. наук, профессор кафедры, кафедра автоматизации и управления технологическими процессами института автоматики и информационных технологий, Самарский государственный технический университет (СамГТУ). Область научных интересов: методы и средства статистических измерений, диагностика технического состояния и испытания систем, цифровая обработка сигналов, корреляционный и спектральный анализ сигналов, математическое и имитационное моделирование. Число научных публикаций — 300. [yvnr@hotmail.com](mailto:yvnr@hotmail.com); улица Молодогвардейская, 244, 443100, Самара, Россия; р.т.: +7(846)279-0354.

V. YAKIMOV

**RECOVERY OF DISCRETE-TIME SIGNAL BASED ON THE MOVING AVERAGE MODEL AND ESTIMATION OF THE SAMPLES CORRELATION IN FORWARD AND REVERSE FORECASTING**

*Yakimov V. Recovery of Discrete-Time Signal Based on the Moving Average Model and Estimation of the Samples Correlation in Forward and Reverse Forecasting.*

**Abstract.** The article discusses the development of mathematical support for the recovery of the values of discrete-time sequence samples obtained as a result of uniform sampling of a continuous signal. The recovery problem of discrete-time sequence samples is solved for a signal that can be considered stationary or stationary at least in a broad sense (quasi-stationary). The development of mathematical support for the recovery of the values of signal samples was carried out on the basis of constructing a moving average model and estimating the correlation of signal samples over time with forward and reverse forecasting. Estimates of the signal correlation function necessary to recover sample sections with lost values are calculated from samples with known values. Correlation function estimates can be calculated regardless of the location of the recovery area when the condition of stationarity of the signal is met. The obtained estimates of the correlation function samples can be used for both forward and reverse forecasting. Moreover, even if it is necessary to recover several problem sections, it is enough to calculate only once the sample of correlation function estimates necessary for their restoration. The resulting mathematical solution to the problem became the basis for the development of algorithmic support. Test tests and functional checks of the algorithmic support were carried out on the basis of simulation using a signal model representing an additive sum of harmonic components with random initial phases. The simulation results showed that the calculation of estimates of the lost sample values is carried out with a fairly low error, both in forward and reverse forecasting, as well as when they are used together. In practice, the choice of a sequence recovery algorithm based on forward or reverse forecasting will be determined based on the actual conditions of its processing. In particular, if previous samples with known values are not enough to carry out forward forecasting, then the reverse forecasting procedure is implemented and vice versa. The developed algorithmic support can be implemented in the form of metrologically significant software for digital signal processing systems.

**Keywords:** discrete-time signals, sampled sequence, signal recovery, forward and reverse forecasting, correlation relationship.

**References**

1. Zhang T., Ren J., Li J., Nguyen L.H., Stoica P. Joint RFI Mitigation and Radar Echo Recovery for One-Bit UWB Radar. *Signal Processing*. 2022. vol. 193. no. 108409.
2. Mardani D., Atia G.K., Abouraddy A.F. Signal Reconstruction from Interferometric Measurements under Sensing Constraints. *Signal Processing*. 2019. vol. 155. pp. 323–333.
3. Zhang Y., Yong G. Source Number of Single-Channel Signals Intelligent Estimation via Signal Reconstruction. *Digital Signal Processing*. 2023. vol. 140(16). no. 104100.
4. Semchenkov S.M., ZHbanov I.L., Abramnikov A.V., Kovalenkov A.N., Makarov M.S., Pechenev E.A. [Methods for ensuring the stability of signal recovery in radar measurements.]. *Elektromagnitnye volny i elektronnyye sistemy – Electromagnetic waves and electronic systems*. 2020. vol. 25. no. 5. pp. 50–66.

5. Amini F., Hedayati Y., Zanddizari H. Exploiting the Inter-Correlation of Structural Vibration Signals for Data Loss Recovery: A Distributed Compressive Sensing Based Approach. *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2021. vol. 152. no. 107473.
6. Thadikemalla V.S.G., Gandhi A.S. A Data Loss Recovery Technique Using Compressive Sensing for Structural Health Monitoring Applications. *KSCE Journal of Civil Engineering*. 2018. vol. 22. no. 12. pp. 5084–5093.
7. Li Y., Tse P.W., Wang X. Recovery of Vibration Signal Based on a Super-Exponential Algorithm. *Journal of Sound and Vibration*. 2008. vol. 311. no. 1-2. pp. 537–553.
8. Liu F., Zhang A., Du R., Xu J., Hu Z. HTR-CTO Algorithm for Wireless Data Recovery. *Information Sciences*. 2022. vol. 587. pp. 515–534.
9. Yang L., Wang H., Qian H. An ADMM-ResNet for Data Recovery in Wireless Sensor Networks with Guaranteed Convergence. *Digital Signal Processing*. 2021. vol. 111. no. 102956.
10. Wu H., Xian J., Wang J., Khandge S., Mohapatra P. Missing Data Recovery Using Reconstruction in Ocean Wireless Sensor Networks. *Computer Communications*. 2018. vol. 132. pp. 1–9.
11. Porshnev S.V., Kusaykin D.V. [Reconstruction of non-uniform sampled discrete-time signals with unknown sampling locations]. *Uspekhi sovremennoy radioelektroniki – Journal Achievements of Modern Radioelectronics*. 2015. no. 6. pp. 3–35. (In Russ.).
12. Khan N.A., Ali S. Robust Sparse Reconstruction of Signals with Gapped Missing Samples from Multi-Sensor Recordings. *Digital Signal Processing*. 2022. vol. 123. no. 103392.
13. Aceska R., Bouchot J.-L., Li S. Local Sparsity and Recovery of Fusion Frame Structured Signals. *Signal Processing*. 2020. vol. 174. no. 107615.
14. Stankovic L., Stankovic S., Amin M. Missing samples analysis in signals for applications to L-estimation and compressive sensing. *Signal Processing*. 2014. vol. 94. pp. 401–408.
15. Aldroubi A., Leonetti C. Non-Uniform Sampling and Reconstruction from Sampling Sets with Unknown Jitter. *Sampling Theory in Signal and Image Processing*. 2008. vol. 7. no. 2. pp. 187–195.
16. Nordio A., Chiasserini C-F., Viterbo E. Signal Reconstruction Errors in Jittered Sampling. *IEEE Transactions on signal Processing*. 2009. vol. 57. no. 12. pp. 4711–4718.
17. Maymon S., Oppenheim A.V. Sinc Interpolation of Nonuniform Samples. *IEEE Transactions on Signal Processing*. 2011. vol. 59. no. 10. pp. 4745–4758.
18. Andras I., Dolinsky P., Michaeli L., Saliga J. A Time Domain Reconstruction Method of Randomly Sampled Frequency Sparse Signal. *Measurement*. 2018. vol. 127. pp. 68–77.
19. Cui A, Zhang L., He H., Wen M. A Truncated Approximate Difference Algorithm for Sparse Signal Recovery. *Digital Signal Processing*. 2023. vol. 141. no. 104191.
20. Bilinskis I. *Digital Alias-free Signal Processing*. Wiley, 2007. 454 p.
21. Eamaz A., Yeganegi F., Soltanalian M. Covariance Recovery for One-Bit Sampled Stationary Signals with Time-Varying Sampling Thresholds. *Signal Processing*. 2023. vol. 206. no. 108899.
22. Yakimov V.N., Mashkov A.V. [The binary algorithm for the analysis of the spectrum amplitude and recover of harmonic components signals in the presence of uncorrelated background noise]. *Nauchnoe priborostroenie – Scientific Instrument Making*. 2017. vol. 27. no.2. pp. 83–90. (In Russ.).
23. Wanga P., Yanga H., Yea Z. 1-Bit direction of arrival estimation via improved complex-valued binary iterative hard thresholding. *Digital Signal Processing*. 2022. vol. 120. no. 103265.

24. Guoa L.-B., Donga C.-X., Donga Y.-Y., Sunb T., Maoa Y. One-bit LFM signal recovery: A consistency algorithm with one-sided weighted quadratic penalty. *Digital Signal Processing*. 2022. vol. 127. no. 103575.
25. Yakimov V.N., Mashkov A.V. Digital Estimation of Correlation Function Moments Using Analog-Stochastic Sign Quantization of a Random Process. *Measurement Techniques*. 2016. vol. 59. no. 1. pp. 12–15.
26. Lu Y.M., Vetterli M. Multichannel Sampling with Unknown Gains and Offsets: A Fast Reconstruction Algorithm. *Proc. of Allerton Conference on Communication, Control and Computing*. 2010. 7 p.
27. Choe C.-G., Pak J.-H., Rim C.-S. Joint. Near-Isometry and Optimal Sparse Recovery: Nonuniform Recovery from Multi-Sensor Measurements. *Signal Processing*. 2023. vol. 208. no. 108980.
28. Liu N., Tao R., Wang R., Deng Y., Li N., Zhao S. Signal Reconstruction from Recurrent Samples in Fractional Fourier Domain and Its application in Multichannel SAR. *Signal Processing*. 2017. vol. 131. pp. 288–299.
29. Wang H., Yang S., Liu Y., Li Q. Compressive Sensing Reconstruction for Rolling Bearing Vibration Signal Based on Improved Iterative Soft Thresholding Algorithm. *Measurement*. 2023. vol. 210. no. 112528.
30. Sejdic E., Orovic I., Stankovic S. Compressive sensing meets time-frequency: An overview of recent advances in time-frequency processing of sparse signals. *Digital Signal Processing*. 2018. vol. 77. pp. 22–35.
31. Tang Q., Jiang Y., Xin J., Liao G., Zhou J., Yang X. A Novel Method for the Recovery of Continuous Missing Data Using Multivariate Variational Mode Decomposition and Fully Convolutional Networks. *Measurement*. 2023. vol. 220. no. 113366.
32. Zhukova N.A., Sokolov I.S. [Method of reconstructing the structure of the group telemetric signals based on the graph model]. *Trudy SPIIRAN – SPIIRAS Proceedings*. 2010. no. 13. pp. 45–66. (In Russ.).
33. Khan N.A., Ali S. Reconstruction of gapped missing samples based on instantaneous frequency and instantaneous amplitude estimation. *Signal Processing*. 2022. vol. 193. no. 108429.
34. Dokuchaev N. On Recovery of Discrete Time Signals from Their Periodic Subsequences. *Signal Processing*. 2019. vol. 162. pp. 180–188.
35. Annaby M.H., Al-Abdi I.A., Abou-Dina M.S., Ghaleb A.F. Regularized Sampling Reconstruction of Signals in the Linear Canonical Transform Domain. *Signal Processing*. 2022. vol. 198. no. 108569.
36. Yue C., Liang J., Qu B., Han Y., Zhu Y., Crisalle O.D. A Novel Multiobjective Optimization Algorithm for Sparse Signal Reconstruction. *Signal Processing*. 2020. vol. 167. no. 107292.
37. Wijenayake C., Scutts J., Ignjatovic A. Signal recovery algorithm for 2-level amplitude sampling using chromatic signal approximations. *Signal Processing*. 2018. vol. 153. pp. 143–152.
38. Katkovnik V.Ya. Neparаметricheskaya identifikatsiya i sglazhivaniye dannikh: metod lokal'noy approksimatsii [Nonparametric identification and data smoothing: local approximation method]. Moscow: Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoy literatury. 1985. 336 p. (In Russ.).
39. Yakimov V.N. [Discrete Time Sequence Reconstruction of a Signal Based on Local Approximation Using a Fourier Series by an Orthogonal System of Trigonometric Functions]. *Informatika i Avtomatizatsiya – Informatics and Automation*. 2022. vol. 21. no. 5. pp. 1016–1043.
40. Marple S.L.Jr. *Digital Spectral Analysis: Second Edition*. Mineola, New York: Dover Publications, Inc. 2019. 409 p.

41. Proakis J.G., Manolakis D.G. Digital Signal Processing. Pearson Education Limited, 2014. 1014 p.
42. State Standard RV 8.883-2015. Gosudarstvennaya sistema obespecheniya yedinstva izmereniy. Programmnoye obespecheniye sredstv izmereniy. Algoritmy obrabotki, khraneniya, zashchity i peredachi izmeritel'noy informatsii [State system for ensuring the uniformity of measurements. Software of measuring instruments. Algorithms of processing, storage, protection and transmission of measuring information. Test methods]. Moscow: Standartinform Publ., 2018. (In Russ.).
43. State Standard RV 51904-2002. Programmnoye obespecheniye vstroyennykh sistem. Obshchiye trebovaniya k razrabotke i dokumentirovaniyu [Embedded system software. General requirements for development and documentation]. Moscow: Gosstandart Rossii Publ., 2005. (In Russ.).
44. State Standard 8.654-2015. Gosudarstvennaya sistema obespecheniya yedinstva izmereniy. Trebovaniya k programmnomu obespecheniyu sredstv izmereniy. Osnovnyye polozheniya [State system for ensuring the uniformity of measurements. Requirements for software of measuring instruments. Main principles]. Moscow: Standartinform Publ., 2015. (In Russ.).
45. Yakimov V.N., Gorbachev O.V. Firmware of the Amplitude Spectrum Evaluating System for Multicomponent Processes. Instruments and Experimental Techniques. 2013. vol. 56. no. 5. pp. 540–545.
46. Yakimov V.N., Zaberzhinskij B.E., Mashkov A.V., Bukanova Yu.V. Multi-threaded Approach to Software High-speed Algorithms for Spectral Analysis of Multi-component Signals. XXI International Conference Complex Systems: Control and Modeling Problems (CSCMP). 2019. IEEE. pp. 698–701.
47. Yakimov V.N., Mashkov A.V., Zhelonkin A.V. [Specialized Software of the Measuring System for the Operative Estimating the Spectral Composition of Multicomponent Processes]. Programmnye Produkty i Sistemy – Software & Systems. 2019. vol. 32. no. 1. pp. 159–166.
48. State Standard RV 57700.22-2020. Komp'yuternyye modeli i modelirovaniye. Klassifikatsiya [Computer models and simulation. Classification]. Moscow: Standartinform Publ., 2020. (In Russ.).

**Yakimov Vladimir** — Ph.D., Dr.Sci., Professor of the department, Department of automation and control of technological processes, Samara State Technical University. Research interests: methods and means of statistical measurements, diagnostics of technical conditions and testing of systems, digital signal processing, correlation and spectral analysis of signals, mathematical and simulation modeling. The number of publications — 300. yvnr@hotmail.com; 244, Molodogvardeyskaya St., 443100, Samara, Russia; office phone: +7(846)279-0354.