

С.Н. ЖУК, С.В. ЕВСТРАТЧИК
**ПРИМЕНЕНИЕ БАЙЕСОВСКОЙ МОДЕЛИ ДЛЯ
ОЦЕНИВАНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ АЛЬТЕРНАТИВ
В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЁННОСТИ
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НЕЧИСЛОВОЙ, НЕТОЧНОЙ
И НЕПОЛНОЙ ЭКСПЕРТНОЙ ИНФОРМАЦИИ**

Жук С.Н., Евстратчик С.В. Применение байесовской модели для оценивания вероятностей альтернатив в условиях неопределённости с использованием нечисловой, неточной и неполной экспертной информации.

Аннотация. В данной статье рассмотрена ранее изложенная байесовская модель оценки кусочно-постоянной плотности распределения, соответствующая тернарному разбиению диапазона возможных значений исследуемой случайной величины, основанная на оценке параметров распределения Дирихле по нечисловой, неточной и неполной экспертной информации. Анализ проводится для оценки и прогноза статистических характеристик приращений курса швейцарского франка CHF относительно единицы XDR резервного платёжного средства SDR Международного валютного фонда. Для сравнения качества результата для тех же данных проведены исследования с помощью классического эконометрического метода: построение ARIMA – модели и прогноза методом экспоненциального сглаживания.

Ключевые слова: байесовская модель, распределение Дирихле, кусочно-постоянная плотность, метод рандомизированных вероятностей, ARIMA – модель, экспоненциальное сглаживание, тест Дики-Фуллера.

Zhuk S.N., Evstratchik S.V. The application of bayesian model for estimation of the probabilities of alternatives under uncertainty with the use of nonnumeric, inaccurate and incomplete expert information.

Abstract. In this paper the Bayesian model of estimation of piecewise-constant density corresponding to the decomposition of the ternary range of possible values of the random quantity is considered. The model is based on the estimation of parameters of the Dirichlet distribution for nonnumeric, inaccurate and incomplete information. The analysis is performed for the evaluation and prediction of the statistical characteristics of the CHF with respect to XDR. For comparison the quality of the result for the same data were investigated with the use of classical econometric method: construction of ARIMA – models and forecasting method of exponential smoothing.

Keywords: The Bayesian model, distribution of Dirichlet, piecewise constant function, the method of randomized probability, ARIMA – model, exponential smoothing, the Dickey Fuller test.

1. Введение. Часто при оценке распределения значений финансово-экономических показателей исследователь сталкивается с отсутствием стационарности и независимости наблюдаемых временных рядов, что серьёзно препятствует успешному прогнозированию с использованием стандартных эконометрических методов [1]. Поэтому, для предварительной оценки характера изучаемых распределений

можно попытаться произвести байесовский анализ эмпирических данных, который опирается не только на историческую статистику, но и привлекает дополнительную экспертную информацию, которой может обладать исследователь. В связи с этим данная тема является актуальной для исследований.

В рамках разработанной ранее байесовской модели оценки кусочно-постоянной плотности распределения, основанной на оценке параметров распределения Дирихле по нечисловой, неточной и неполной экспертной информации, излагается теоретическая часть метода рандомизированных вероятностей для частного случая оценки кусочно-постоянной плотности распределения, соответствующий тернарному разбиению диапазона возможных значений исследуемой случайной величины. Рассматривается пример использования указанной модели для оценки и прогноза статистических характеристик приращений курса швейцарского франка CHF относительно единицы XDR резервного платёжного средства SDR (Special Drawing Rights) Международного валютного фонда.

Основу для настоящего исследования составили данные сайта [14]. Все результаты были получены при помощи системы поддержки принятия решений АСПИД-3W [2], статистического пакета Eviews [3], языка программирования для статистической обработки данных R [4], электронных таблиц Excel.

Цель работы — получение прогноза статистических характеристик приращения курса швейцарского франка CHF относительно единицы XDR резервного платёжного средства SDR (Special Drawing Rights) Международного валютного фонда с использованием байесовского подхода. Было осуществлено сравнение полученных результатов с результатами, полученными при использовании классического эконометрического метода: построение модели ARIMA и прогноза с помощью метода экспоненциального сглаживания.

2. Случай оценки кусочно-постоянной плотности распределения, соответствующий тернарному разбиению диапазона возможных значений исследуемой случайной величины. Теоретическую часть метода рандомизированных вероятностей мы изложим, следуя, в основном, работе [1]. При этом будет рассматриваться частный случай оценки кусочно-постоянной плотности распределения, соответствующий тернарному разбиению диапазона возможных значений исследуемой случайной величины.

Рассматривается непрерывная случайная величина \tilde{x} , которая определяется кусочно-постоянной непрерывной слева плотно-

стью $f(x)$, заданной на конечном полуоткрытом интервале $\Delta = (d_0, d_3]$, разбитом на три непересекающихся полуоткрытых интервала $\Delta = (d_{i-1}, d_i]$, $\Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset$ при $i \neq j$, $i, j = 1, 2, 3$, $d_0 < d_1 < d_2 < d_3$.

Предполагается, что кусочно-постоянная плотность $f(x)$ является смесью

$$f(x) = f(x; p) = f(x; p_1, p_2, p_3) = p_1 f(x, 1) + p_2 f(x, 2) + p_3 f(x, 3) \quad (1)$$

плотностей $f(x; i)$, $i = 1, 2, 3$, принимающих следующие значения: $f(x; i) = 1/(d_i - d_{i-1})$, когда x принадлежит интервалу Δ_i , и значение $f(x; i) = 0$ — в противном случае.

Плотности $f(x; p)$ соответствует непрерывная неубывающая кусочно-линейная функция распределения вероятностей $F(x; p)$, которая является смесью

$$F(x; p) = F(x; p_1, p_2, p_3) = p_1 F(x, 1) + p_2 F(x, 2) + p_3 F(x, 3) \quad (2)$$

функций распределения $F(x; i)$, $i = 1, 2, 3$, принимающих значения $F(x; i) = (x - d_i)/(d_i - d_{i-1})$, когда x принадлежит интервалу Δ_i , значение $F(x; i) = 0$, когда $x \leq d_0$, и $F(x; i) = 1$ при $x \geq d_3$.

Математическое ожидание $\mu = E\tilde{x}$ и дисперсия $\sigma^2 = D\tilde{x}$ случайной величины \tilde{x} зависят от вектора параметров $p = (p_1, p_2, p_3)$ и определяются формулами

$$\mu = \mu(p) = \mu(p_1, p_2, p_3) = p_1 \frac{d_0 + d_1}{2} + p_2 \frac{d_1 + d_2}{2} + p_3 \frac{d_2 + d_3}{2}, \quad (3)$$

$$\begin{aligned}
\sigma^2 = \sigma^2(p) = \sigma^2(p_1, p_2, p_3) = & p_1 \frac{d_0^2 + d_0 d_1 + d_1^2}{3} + p_2 \frac{d_1^2 + d_1 d_2 + d_2^2}{3} + \\
& + p_3 \frac{d_2^2 + d_2 d_3 + d_3^2}{3} - p_1^2 \frac{(d_0 + d_1)^2}{4} - p_2^2 \frac{(d_1 + d_2)^2}{4} - p_3^2 \frac{(d_2 + d_3)^2}{4} - \\
& - 2p_1 p_2 \frac{(d_0 + d_1)(d_1 + d_2)}{4} - 2p_2 p_3 \frac{(d_1 + d_2)(d_2 + d_3)}{4} - \\
& - 2p_1 p_3 \frac{(d_0 + d_1)(d_2 + d_3)}{4}.
\end{aligned} \tag{4}$$

Таким образом, для определения плотности распределения $f(x; p)$, функции распределения вероятностей $F(x; p)$, математического ожидания $\mu(p)$ и дисперсии $\sigma^2(p)$ случайной величины \tilde{x} достаточно знать вектор параметров $p = (p_1, p_2, p_3)$, компоненты которого суть вероятности попадания в соответствующие попарно непесекающиеся интервалы $\Delta_i = (d_{i-1}, d_i]$, $i = 1, 2, 3$: $p_i = P(\{\tilde{x} \in \Delta_i\})$. Очевидно, что события $A_i = \{\tilde{x} \in \Delta_i\}$, $i = 1, 2, 3$ образуют полную группу и являются попарно несовместными: $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \Omega$ (где Ω – достоверное событие); $A_i \cap A_j = \emptyset$ при $i \neq j$.

Множество всех возможных векторов вероятностей $p = (p_1, p_2, p_3)$ является, согласно [1], двумерным симплексом $S_2 = \{p = (p_1, p_2, p_3) : p_1 + p_2 + p_3 = 1, p_i \geq 0, i = 1, 2, 3\}$, лежащим в трёхмерном евклидовом пространстве R^3 . Таким образом, имеет место *неопределенность* выбора вектора $p = (p_1, p_2, p_3)$ из множества $S_2 \subset R^3$ [8,9]. Согласно основной идее Томаса Байеса, изложенной в его известной работе [10], неопределенность выбора вектора вероятностей $p = (p_1, p_2, p_3)$ из множества S_1 моделируется *рандомизацией* этого вектора вероятностей, то есть заданием случайного вектора $\tilde{p} = (\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3)$, принимающего значения из множества S_2 и определяемого некоторой плотностью распределения $f_{\tilde{p}}(p) = f_{\tilde{p}}(p_1, p_2, p_3)$, $p \in S_2$.

Подставляя случайные компоненты $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3$ рандомизированного вектора вероятностей \tilde{p} в формулы (1)–(4), определяющие плот-

ность распределения $f(x; p)$, функцию распределения $F(x; p)$, математическое ожидание $\mu(p)$ и дисперсию $\sigma^2(p)$ случайной величины \tilde{x} как соответствующие функции параметров p_1, p_2, p_3 , получаем рандомизированные аналоги указанных четырех характеристик этой случайной величины:

$$\begin{aligned}\tilde{f}(x) &= f(x; \tilde{p}) = f(x; \tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3), \quad \tilde{F}(x) = F(x; \tilde{p}) = F(x; \tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3), \\ \tilde{\mu} &= \mu(\tilde{p}) = \mu(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3), \quad \tilde{\sigma}^2 = \sigma^2(\tilde{p}) = \sigma^2(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3).\end{aligned}$$

Введем следующие обозначения и запишем соотношения для математических ожиданий $\overline{p_i}$, начальных моментов второго порядка $\overline{p_i^2}$, дисперсий δ_i^2 , стандартных отклонений δ_i , смешанных начальных моментов второго порядка $\overline{p_i p_j}$ и ковариаций δ_{ij} компонент $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3$ рандомизированного вектора вероятностей \tilde{p} :

$$\begin{aligned}\overline{p_i} &= E \tilde{p}_i, \quad \overline{p_i^2} = E \tilde{p}_i^2 = \delta_i^2 + \overline{p_i^2}, \quad \delta_i^2 = D \tilde{p}_i = \overline{p_i^2} - \overline{p_i}^2 \\ \overline{p_i p_j} &= E \tilde{p}_i \tilde{p}_j = \delta_{ij} + \overline{p_i} \overline{p_j}, \quad \delta_{ij} = \text{cov}(\tilde{p}_i, \tilde{p}_j) = \overline{p_i p_j} - \overline{p_i} \overline{p_j}, \\ i, j &= 1, 2, 3.\end{aligned}\tag{5}$$

В качестве искоемых оценок ожидаемых (усредненных) значений рандомизированных характеристик $\tilde{f}(x)$, $\tilde{F}(x)$, $\tilde{\mu}$, $\tilde{\sigma}^2$ случайной величины \tilde{x} естественно взять их математические ожидания $\bar{f}(x) = E \tilde{f}(x)$, $\bar{F}(x) = E \tilde{F}(x)$, $\bar{\mu} = E \tilde{\mu}$, $\bar{\sigma}^2 = E \tilde{\sigma}^2$ соответственно.

Усредненные оценки $\bar{f}(x)$, $\bar{\mu}$ и $\bar{\sigma}^2$ плотности распределения, математического ожидания и дисперсии случайной величины \tilde{x} могут быть выражены через математические ожидания $\overline{p_i}$, дисперсии δ_i^2 и ковариации δ_{ij} рандомизированных вероятностей \tilde{p}_i , $i, j = 1, 2, 3$ [11,12]:

$$\bar{f}(x) = E f(x; \tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3) = \overline{p_1} f(x; 1) + \overline{p_2} f(x; 2) + \overline{p_3} f(x; 3),\tag{6}$$

$$\bar{\mu} = E \mu(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3) = \overline{p_1} \frac{d_0 + d_1}{2} + \overline{p_2} \frac{d_1 + d_2}{2} + \overline{p_3} \frac{d_2 + d_3}{2},\tag{7}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}^2 = E \tilde{\sigma}^2 = E \sigma^2(\tilde{p}) = E \sigma^2(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3) = & \bar{p}_1 \frac{d_0^2 + d_0 d_1 + d_1^2}{3} + \\
+ \bar{p}_2 \frac{d_1^2 + d_1 d_2 + d_2^2}{3} + \bar{p}_3 \frac{d_2^2 + d_2 d_3 + d_3^2}{3} - & (\delta_1^2 + \bar{p}_1^2) \frac{(d_0 + d_1)^2}{4} - \\
- (\delta_2^2 + \bar{p}_2^2) \frac{(d_1 + d_2)^2}{4} - & (\delta_3^2 + \bar{p}_3^2) \frac{(d_2 + d_3)^2}{4} - \\
- 2(\delta_{12} + \bar{p}_1 \bar{p}_2) \frac{(d_0 + d_1)(d_1 + d_2)}{4} - & 2(\delta_{23} + \bar{p}_2 \bar{p}_3) \frac{(d_1 + d_2)(d_2 + d_3)}{4} - \\
- 2(\delta_{13} + \bar{p}_1 \bar{p}_3) \frac{(d_0 + d_1)(d_2 + d_3)}{4}. &
\end{aligned} \tag{8}$$

Очень часто исследователю удобнее работать не с математическим ожиданием $\bar{\sigma}^2$ рандомизированной дисперсии $\tilde{\sigma}^2$ случайной величины \tilde{x} , а с математическим ожиданием $\bar{\sigma}(I)$ ее рандомизированного стандартного (среднеквадратичного) отклонения $\tilde{\sigma} = \sqrt{\tilde{\sigma}^2}$. Однако, получить явную формулу зависимости $\bar{\sigma}$ от моментов рандомизированных вероятностей $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3$ в общем случае не удастся. Поэтому, следуя методу моментов, можно взять в качестве первого приближения к оценке среднего значения рандомизированного стандартного отклонения $\tilde{\sigma}$ величину $\bar{\sigma} = \sqrt{\bar{\sigma}^2}$ (заметим, что, вообще говоря, $E \tilde{\sigma} \neq \sqrt{E \tilde{\sigma}^2}$).

3. Байесовская схема оценивания параметров распределения Дирихле. Рассмотрим следующую систему альтернатив A_1, A_2, A_3 , $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \Omega$, $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \emptyset$, вероятности которых суть $p_1 = P(A_1)$, $p_2 = P(A_2)$, $p_3 = P(A_3)$, $p_1 + p_2 + p_3 = 1$, $0 < p_i < 1$, $i = 1, 2, 3$.

Предполагается, что неизвестный вектор вероятностей $p = (p_1, p_2, p_3)$, согласно [1], принадлежит двумерному симплексу $S_2 = \{p = (p_1, p_2, p_3) : p_1 + p_2 + p_3 = 1, p_i \geq 0, i = 1, 2, 3\}$, расположенному в трёхмерном евклидовом пространстве R^3 . Неопределенность выбора вектора вероятностей $p = (p_1, p_2, p_3)$ из множества S_2 моделируется

рандомизацией этого вектора, то есть заданием случайного вектора $\tilde{p} = (\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3)$, принимающего значения из множества S_2 и определяемого некоторой плотностью распределения $f_{\tilde{p}}(p_1, p_2, p_3)$.

Поставим задачу оценки вектора вероятностей p_1, p_2, p_3 , определяющего плотность распределения $f_{\tilde{m}}(m_1, m_2, m_3 / p_1, p_2, p_3)$ случайной величины \tilde{x} , как задачу оценки параметров p_1, p_2, p_3 полиномиального распределения.

$$f_{\tilde{m}}(m_1, m_2, m_3 / p_1, p_2, p_3) = \frac{n!}{m_1! \cdot m_2! \cdot m_3!} p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot p_3^{m_3}, \quad (9)$$

где $p_i \in (0,1)$ есть вероятность осуществления события A_i в последовательности m независимых испытаний с тремя альтернативными исходами, имеющими постоянные вероятности p_i , $i=1,2,3$, соответственно; $(\tilde{m}_1, \tilde{m}_2, \tilde{m}_3) ((m_1, m_2, m_3))$ — вектор случайных частот (наблюдаемых частот) появления событий A_1, A_2, A_3 в m испытаниях; $m_1 + m_2 + m_3 = m$. Таким образом, величина $f_{\tilde{m}}(m_1, m_2, m_3 / p_1, p_2, p_3)$ есть условная вероятность появления событий A_1, A_2, A_3 в m испытаниях ровно m_1, m_2, m_3 раз (при условии, что вероятность появления каждого события A_i в одном испытании равна p_i). Заметим, что переменные m_1, m_2, m_3 в распределении (9) связаны линейной зависимостью $m_1 + m_2 + m_3 = m$, и, поэтому, любая отдельная переменная может быть выражена через остальные переменные.

Знание совместного распределения $f_{\tilde{m}}(m_1, m_2, m_3 / p_1, p_2, p_3)$ случайных частот $\tilde{m}_1, \tilde{m}_2, \tilde{m}_3$ позволяет найти математическое ожидание $E \tilde{m}_i = m p_i$ и дисперсию $D \tilde{m}_i = m p_i(1 - p_i)$ случайной частоты \tilde{m}_i , а также ковариацию $\text{cov}(\tilde{m}_i, \tilde{m}_j) = -m p_i p_j$ случайных частот \tilde{m}_i, \tilde{m}_j . Отсюда получаются аналогичные формулы для математического ожидания $E \tilde{f}_i$ и дисперсии $D \tilde{f}_i$ случайной относительной частоты \tilde{f}_i , а также для ковариации $\text{cov}(\tilde{f}_i, \tilde{f}_j)$ случайных относительных частот \tilde{f}_i, \tilde{f}_j :

$$E \tilde{f}_i = p_i, \quad D \tilde{f}_i = \frac{p_i(1-p_i)}{m}, \quad \text{cov}(\tilde{f}_i, \tilde{f}_j) = -\frac{p_i p_j}{m} \quad (10)$$

Неопределенность выбора значения векторного параметра p описывается случайным выбором этого значения, т.е. рандомизацией параметров полиномиального распределения, дающей случайный вектор параметров \tilde{p} , имеющий распределение Дирихле (обобщенное бета-распределение) с параметрами v_1, v_2, v_3 , $v_i > 0$, $i=1,2,3$. Иными словами, $\tilde{p} = (\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3) = \tilde{\beta}(v_1, v_2, v_3)$, где $\tilde{\beta}(v_1, v_2, v_3) = (\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \tilde{\beta}_3)$ есть непрерывная случайная величина, описываемая плотностью

$$f_{\tilde{p}}(p) = f_{\tilde{\beta}}(p_1, p_2, p_3; v_1, v_2, v_3) = \frac{p_1^{v_1-1} \cdot p_2^{v_2-1} \cdot p_3^{v_3-1}}{B(v_1, v_2, v_3)}, \quad (11)$$

где $B(v_1, v_2, v_3)$ есть интеграл Дирихле (обобщенная бета-функция), задаваемый формулой

$$B(v_1, v_2, v_3) = \int \int_{S_2^*} (1-x_1-x_2)^{v_3-1} \prod_{i=1}^2 x_i^{v_i-1} dx_1 dx_2, \quad (12)$$

где интегрирование идет по единичному двумерному симплексу S_2^* , расположенному в R^3 : $S_2^* = \{(x_1, x_2): x_1 + x_2 \leq 1, x_i \geq 0, i=1,2\}$. Заметим, что переменные p_1, p_2, p_3 в распределении (11) связаны линейной зависимостью $p_1 + p_2 + p_3 = 1$, и, поэтому, любая отдельная переменная может быть выражена через остальные переменные.

Обобщенную бета-функцию $B(v_1, v_2, v_3)$ можно выразить через гамма-функции:

$$B(v_1, v_2, v_3) = \frac{\Gamma(v_1) \cdot \Gamma(v_2) \cdot \Gamma(v_3)}{\Gamma(v_1 + v_2 + v_3)}. \quad (13)$$

Формула (13) позволяет переписать формулу (11) для «гипотетической» плотности $f_{\tilde{p}}(p)$ рандомизированного вектора параметров \tilde{p} в виде

$$f_{\tilde{p}}(p) = \frac{\Gamma(\nu_1 + \nu_2 + \nu_3)}{\Gamma(\nu_1) \cdot \Gamma(\nu_2) \cdot \Gamma(\nu_3)} p_1^{\nu_1-1} \cdot p_2^{\nu_2-1} \cdot p_3^{\nu_3-1}. \quad (14)$$

Частные распределения обобщенного бета-распределения с параметрами ν_1, ν_2, ν_3 суть бета-распределения с параметрами $\nu_i, \nu - \nu_i$, $i = 1, 2, 3$, где $\nu = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3$. Благодаря этому обстоятельству исследователь, моделирующий неопределенность выбора значения вектора параметров p распределения $f_{\tilde{m}}(m_1, m_2, m_3 / p_1, p_2, p_3)$ случайного числа $\tilde{m}_1, \tilde{m}_2, \tilde{m}_3$ появлений событий A_1, A_2, A_3 при помощи рандомизированной вероятности $\tilde{p} = \tilde{\beta}(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$, может оценить математическое ожидание и дисперсию компонентов случайного вектора $\tilde{p} = (\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3)$:

$$\bar{p}_i = E \tilde{p}_i = \frac{\nu_i}{\nu_1 + \dots + \nu_r} = \frac{\nu_i}{\nu}, \quad \delta_i^2 = D \tilde{p}_i = \frac{\nu_i(\nu - \nu_i)}{\nu^2(\nu + 1)} \quad (15)$$

Из формулы (15) легко получить совместную плотность $f_{\tilde{p}_i, \tilde{p}_j}(p_i, p_j / m)$ двух случайных величин \tilde{p}_i, \tilde{p}_j , $i \neq j$ и найти ковариацию $\delta_{ij} = \text{cov}(\tilde{p}_i, \tilde{p}_j)$:

$$\delta_{ij} = \text{cov}(\tilde{p}_i, \tilde{p}_j) = \text{cov}(\tilde{\beta}(\nu_i, \nu - \nu_i), \tilde{\beta}(\nu_j, \nu - \nu_j)) = -\frac{\nu_i \nu_j}{\nu^2(\nu + 1)} \quad (16)$$

Можно определить следующие оценки параметров ν_1, ν_2, ν_3 , выраженные через математические ожидания $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3$ и дисперсии $\delta_1^2, \delta_2^2, \delta_3^2$, используя формулы (14) и (16):

$$\nu = 2 \frac{\bar{p}_1 \bar{p}_2 + \bar{p}_1 \bar{p}_3 + \bar{p}_2 \bar{p}_3}{\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2} - 1, \quad \nu_i = \bar{p}_i \nu, \quad i = 1, 2, 3. \quad (17)$$

Разумеется, вряд ли можно ожидать от экспертов точных числовых значений математических ожиданий $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3$ и дисперсий $\delta_1^2, \delta_2^2, \delta_3^2$, необходимых для вычисления по формулам (17) параметров ν_1, ν_2, ν_3 распределения Дирихле. Поэтому исследователю придется привлекать к оценке вероятностей p_1, p_2, p_3 альтернатив A_1, A_2, A_3 экспертов, которые не могут дать точных числовых оценок этих вероятностей и ограничиваются только совокупностью сравнительных суждений типа: «Вероятность одной альтернативы превосходит вероятность другой альтернативы», «Вероятности двух данных альтернатив практически равны» и т.п.

Далее мы будем предполагать, что исследователь обладает лишь нечисловой (ординальной), неточной (интервальной) и неполной экспертной информацией (ННН-информацией) I , задаваемой $I = \{p_i > p_l, p_u = p_v; a_s \leq p_s \leq b_s; i, l, u, v, s \in \{1, 2, 3\}\}$ системой равенств и неравенств для вероятностей p_1, p_2, p_3 альтернатив A_1, A_2, A_3 [13].

Множество всех возможных векторов $p = (p_1, p_2, p_3)$ вероятностей альтернатив A_1, A_2, A_3 представляет собой, согласно [1], симплекс $P(3) = \{p = (p_1, p_2, p_3) : p_i \geq 0, p_1 + p_2 + p_3 = 1\}$. Учет ННН информации I позволяет сформировать множество всех допустимых (с точки зрения информации I) векторов вероятностей, представляющее собой полиэдр $P(r; I) \subseteq P(r)$. Таким образом, ННН-информация I определяет вектор вероятностей $p = (p_1, p_2, p_3)$ «с точностью до множества $P(3; I)$ ». Иными словами, имеет место так называемая теоретико-множественная неопределенность задания вероятностей альтернатив [8]. Моделируя неопределенность выбора вектора вероятностей $p = (p_1, p_2, p_3)$ из множества $P(3; I)$ при помощи рандомизации этого выбора, получаем случайный вектор $\tilde{p}(I) = (\tilde{p}_1(I), \tilde{p}_2(I), \tilde{p}_3(I))$, $\tilde{p}_i(I) \geq 0$, $\tilde{p}_1(I) + \tilde{p}_2(I) + \tilde{p}_3(I) = 1$, распределенный на полиэдре $P(3; I)$. Компонента $\tilde{p}_i(I)$ случайного вектора $\tilde{p}(I)$ есть *рандомизированная (стохастическая, случайная) оценка* вероятности альтернативы A_i , учитывающая ННН-информацию I , полученную от эксперта. Предполагается, что для случайных величин $\tilde{p}_i(I)$ можно найти

математические ожидания $\bar{p}_i(I) = E \tilde{p}_i(I)$, дисперсии $\delta_i^2(I) = D\tilde{p}_i(I)$ и ковариации $\delta_{i,j} = \text{cov}(\tilde{p}_i(I), \tilde{p}_j(I))$, $i, j = 1, 2, 3$.

Для упрощения реализации на ЭВМ вычисления статистических характеристик рандомизированных вероятностей $\tilde{p}_1(I), \tilde{p}_2(I), \tilde{p}_3(I)$ положим, что вероятности p_1, p_2, p_3 отсчитываются с конечным шагом $h = 1/n$, т.е. принимают дискретные значения из множества $\{0, 1/n, \dots, (n-1)/n, 1\}$.

Тогда множество $P(3, n; I) = \{p^{(t)} : t = 1, \dots, N(3, n; I)\}$ всех допустимых (с точки зрения ННН-информации I) векторов вероятностей конечно, и равномерное распределение вектора вероятностей $\tilde{p}(I)$ на этом множестве $P(3, n; I)$ может быть задано случайным номером \tilde{t} , равномерно распределенным на множестве значений $\{1, \dots, N(3, n; I)\}$: $\text{Prob}(\{\tilde{p}(I) = p^{(t)}\}) = \text{Prob}(\{\tilde{t} = t\}) = 1/N(3, n; I)$. Вычисления математических ожиданий $\bar{p}_i(I) = E \tilde{p}_i(I)$, дисперсий $\delta_i^2(I) = D\tilde{p}_i(I)$ и ковариаций $\delta_{i,j} = \text{cov}(\tilde{p}_i(I), \tilde{p}_j(I))$, $i, j = 1, 2, 3$, необходимых для определения параметров распределения Дирихле, осуществлены с помощью СППР APIS [2].

Обобщая «формулу Байеса» на случай распределения Дирихле, получаем в случае тернарного разбиения следующего выражения

$$f_{\tilde{p}^*}(p_1, p_2, p_3 / m_1, m_2, m_3) = \frac{p_1^{v_1+m_1-1} \cdot p_2^{v_2+m_2-1} \cdot p_3^{v_3+m_3-1}}{B(v_1+m_1, v_2+m_2, v_3+m_3)} =$$

$$= \frac{\Gamma(v_1+v_2+v_3+m)}{\Gamma(v_1+m_1) \cdot \Gamma(v_2+m_2) \cdot \Gamma(v_3+m_3)} p_1^{v_1+m_1-1} \cdot p_2^{v_2+m_2-1} \cdot p_3^{v_3+m_3-1}, \quad (18)$$

из которого следует, что условный случайный вектор \tilde{p}^* , задаваемый условной плотностью распределения $f_{\tilde{p}^*}(p_1, p_2, p_3 / m_1, m_2, m_3)$, имеет обобщенное бета-распределение с параметрами $v_i^* = v_i + m_i$, $i = 1, 2, 3$: $\tilde{p}^* = \tilde{\beta}(v_1^*, v_2^*, v_3^*)$.

Частная плотность $f_{\tilde{p}_i^*}(p_i / m_1, m_2, m_3)$, описывающая распределение компоненты \tilde{p}_i^* вектора $\tilde{p}^* = \tilde{\beta}(v_1^*, \dots, v_3^*)$, совпадает с бета-

плотностью $\tilde{\beta}(v_i^*, v^* - v_i^*)$, определяемой параметрами $v_i^* = v_i + m_i$, $v^* - v_i^* = v - v_i + m - m_i$, $v^* = v_1^* + v_2^* + v_3^* = v + m$. Иными словами, рандомизированная условная вероятность \tilde{p}_i^* имеет бета распределение: $\tilde{p}_i^* = \tilde{\beta}(v_i^*, v^* - v_i^*) = \tilde{\beta}(v_i + m_i, v - v_i + m - m_i)$. Полученное выражение для частной плотности $f_{\tilde{p}_i^*}(p_i / m_1, m_2, m_3)$ позволяет найти математическое ожидание и дисперсию условной случайной вероятности \tilde{p}_i^* :

$$\bar{p}_i^* = E \tilde{p}_i^* = E \tilde{\beta}(v_i + m_i, v - v_i + m - m_i) = \frac{v_i + m_i}{v + m}, \quad (19)$$

$$[\delta_i^*]^2 = D \tilde{p}_i^* = D \tilde{\beta}(v_i + m_i, v - v_i + m - m_i) = \frac{(v_i + m_i)(v - v_i + m - m_i)}{(v + m)^2(v + m + 1)}. \quad (20)$$

Из формулы (18) можно получить совместную плотность $f_{\tilde{p}_i \tilde{p}_j}(p_i, p_j / m_1, m_2, m_3)$ случайных величин \tilde{p}_i^* , \tilde{p}_j^* , $i \neq j$ и найти ковариацию $\delta_{ij}^* = \text{cov}(\tilde{p}_i^*, \tilde{p}_j^*)$ и коэффициент $\rho_{ij}^* = \text{corr}(\tilde{p}_i^*, \tilde{p}_j^*)$ корреляции этих случайных величин:

$$\begin{aligned} \bar{\delta}_{ij}^* &= \text{cov}(\tilde{p}_i^*, \tilde{p}_j^*) = \text{cov}(\tilde{\beta}(v_i^*, v^* - v_i^*), \tilde{\beta}(v_j^*, v^* - v_j^*)) = \\ &= \text{cov}(\tilde{\beta}(v_i + m_i, v - v_i + m - m_i), \tilde{\beta}(v_j + m_j, v - v_j + m - m_j)) = \\ &= -\frac{v_i^* v_j^*}{(v^*)^2(v^* + 1)} = -\frac{(v_i + m_i)(v_j + m_j)}{(v + m)^2(v + m + 1)}, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\text{corr}(\tilde{p}_i^*, \tilde{p}_j^*) = -\sqrt{\frac{v_i^* v_j^*}{(v^* - v_i^*)(v^* - v_j^*)}} = -\sqrt{\frac{(v_i + m_i)(v_j + m_j)}{(v - v_i + m - m_i)(v - v_j + m - m_j)}} \quad (22)$$

4. Использование Байесовского метода оценки вероятностей альтернатив по нечисловой экспертной информации для анализа статистических характеристик приращений курса швейцарского франка CHF относительно счётной денежной единицы XDR резервного платёжного средства SDR. Изложенная выше модель при-

меняется для оценки и прогноза статистических характеристик приращений курса швейцарского франка (CHF) относительно счётной денежной единицы (XDR) резервного платёжного средства SDR Международного валютного фонда (МВФ). Исходный временной ряд значений курса CHF относительно XDR построен по данным сайта [14] за 10 лет (01.01.2001-30.06.2011) и содержит $T = 3520$ наблюдений. Для импортирования ряда в электронные таблицы Excel был использован язык программирования для статистической обработки данных R [4]. При помощи операций Excel был построен график значений курса $c(CHF, XDR; t)$, $t = 1, \dots, T = 3520$. Величина $c(CHF, XDR; t)$ есть коэффициент обмена, который указывает, сколько единиц SDR обменивается на один швейцарский франк в момент времени t .

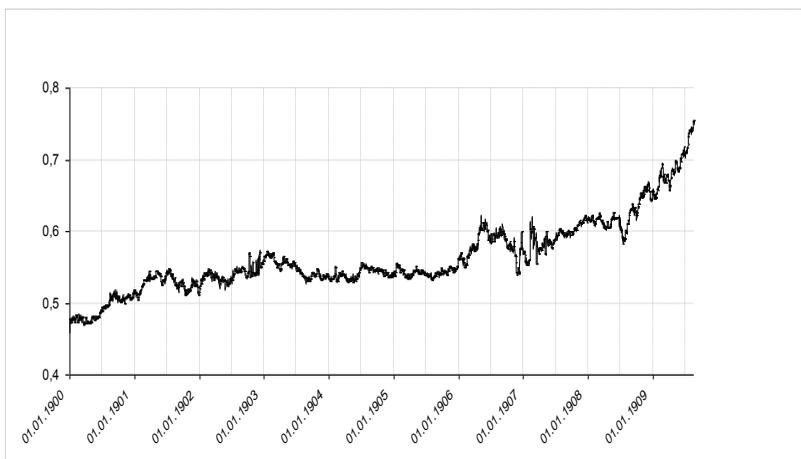


Рисунок 1. График значений курса $c(CHF, XDR)$ швейцарского франка относительно счётной единицы МВФ за период с $t=1-01.01.2011$ до $t=T-30.06.2011$.

Используя полученный график, мы выделили периоды времени, на протяжении которых функция обладает следующими типичными формами поведения приращений валютного курса:

- (1) Стационарный тип поведения в течение всего выделенного периода (значения временного ряда в период с 14.01.2007 по 23.02.2007).

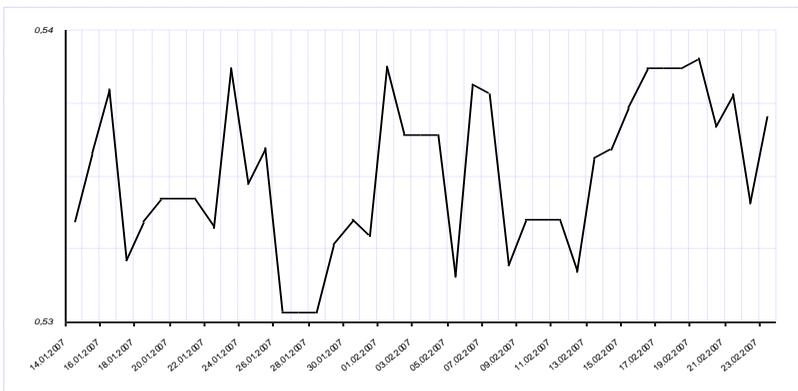


Рисунок 2. Стационарный тип поведения в течение всего выделенного периода (значения временного ряда в период с 14.01.2007 по 23.02.2007).

- (2) Стационарный тип поведения в течение первой половины выделенного периода с последующим снижением графика во второй половине (значения временного ряда в период с 14.12.2008 по 22.01.2009).

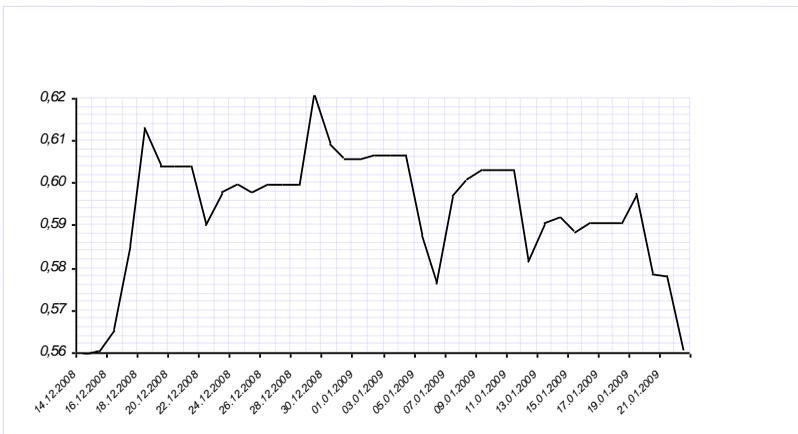


Рисунок 3. Стационарный тип поведения в течение первой половины выделенного периода с последующим снижением графика во второй половине (значения временного ряда в период с 14.12.2008 по 22.01.2009).

- (3) Стационарный тип поведения в течение первой половины выделенного периода с последующим заметным подъёмом гра-

фика во второй половине (значения временного ряда в период с 11.05.2011 по 19.06.2011).

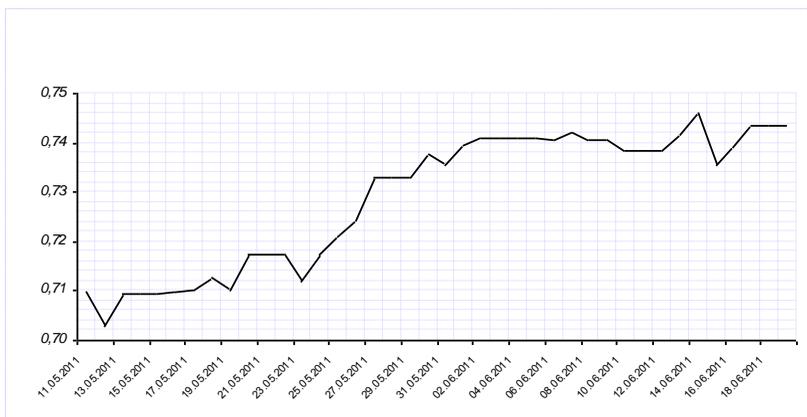


Рисунок 4. Стационарный тип поведения в течение первой половины выделенного периода с последующим заметным подъёмом графика во второй половине (значения временного ряда в период с 11.05.2011 по 19.06.2011).

Далее мы трактовали первую половину каждого выделенного периода как «обучающий период» (LP – Learning Period), а вторую половину – как «тестовый период» (TP – Testing Period). Предполагалось, что исследователю известны все значения коэффициента обмена $c(CHF, XDR; t)$ (валютных курсов) на протяжении обучающего периода, и перед ним стоит задача оценки (прогноза) статистических характеристик приращения валютного курса на тестовом периоде.

Далее был проведён анализ для данных трёх коротких временных рядов приращения валютного курса на выделенных промежутках времени. Мы установили интервал возможных значений показателя $c(CHF, XDR; t)$ для каждого ряда и разделили эти интервалы точками на три непересекающихся интервала.

Каждый из трёх временных рядов представляет собой значения некоторой непрерывной случайной величины, описываемой кусочно-постоянной плотностью распределения. Данная плотность задаётся параметрами, являющимися вероятностями попадания значений этой случайной величины в заданные нами непересекающиеся интервалы. Пользуясь формулой (1), мы построили графики кусочно-постоянных плотностей для обучающих периодов (LP) каждого временного ряда.

Так как относительные частоты f_1, f_2, f_3 попадания значений $c(CHF, XDR; t)$, $t = 1, \dots, 20$ в выделенные интервалы являются состоятельными и несмещёнными оценками параметров p_i , $i = 1, 2, 3$, полиномиального распределения, мы можем в первом приближении использовать в качестве оценок математического ожидания $E \tilde{f}_i = p_i$, дисперсии $D \tilde{f}_i$ и ковариации $\text{cov}(\tilde{f}_i, \tilde{f}_j)$ формулы (10), заменив в них вероятности p_i на соответствующие выборочные относительные частоты.

Знание статистических характеристик $E \tilde{f}_i$, $D \tilde{f}_i$, $\text{cov}(\tilde{f}_i, \tilde{f}_j)$ позволяет найти по формулам (7) и (8) выборочные оценки математического ожидания μ_* и дисперсии σ_*^2 (стандартного отклонения σ_*) возможных значений показателя $c(CHF, XDR)$. Результаты вычислений для выбранных трёх коротких временных рядов представлены в табл. 1–3.

Таблица 1. Эмпирические относительные частоты $f_i, i = 1, 2, 3$, и выборочные оценки математического ожидания μ_* и стандартного отклонения σ_* значений приращений курса валют для ряда (1).

f_1	f_2	f_3	μ_*	σ_*
0,35	0,65	0	0,53	0,008

Таблица 2. Эмпирические относительные частоты $f_i, i = 1, 2, 3$, и выборочные оценки математического ожидания μ_* и стандартного отклонения σ_* значений приращений курса валют для ряда (2).

f_1	f_2	f_3	μ_*	σ_*
0,15	0,70	0,15	0,58	0,02

Таблица 3. Эмпирические относительные частоты $f_i, i=1,2,3$, и выборочные оценки математического ожидания μ_* и стандартного отклонения σ_* значений приращений курса валют для ряда (3).

f_1	f_2	f_3	μ_*	σ_*
0,50	0,45	0,05	0,71	0,1

Далее для исследования была привлечена экспертная информация. Пусть эксперт имеет ННН-информацию о вероятностях альтернатив A_1, A_2, A_3 :

Для ряда (1): $I = \{p_1 < p_2 > p_3\}$;

Для ряда (2): $I = \{p_1 < p_2 > p_3\}$;

Для ряда (3): $I = \{p_1 < p_2 < p_3\}$.

Используя СППР APIS [2], мы получили оценки математических ожиданий, стандартных отклонений и ковариаций рандомизированных вероятностей для каждого из трёх случаев временных рядов $\tilde{p}_1(I), \tilde{p}_2(I), \tilde{p}_3(I)$: $\bar{p}_1(I) = E \tilde{p}_1(I)$, $\bar{p}_2(I) = E \tilde{p}_2(I)$, $\bar{p}_3(I) = E \tilde{p}_3(I)$; $\delta_1(I) = \sqrt{D \tilde{p}_1(I)}$, $\delta_2(I) = \sqrt{D \tilde{p}_2(I)}$, $\delta_3(I) = \sqrt{D \tilde{p}_3(I)}$; $\delta_{12}(I), \delta_{13}(I), \delta_{23}(I)$.

Подставляя полученные значения статистических характеристик $\bar{p}_i(I), \delta_i^2(I), \delta_{i,j}(I)$ случайных вероятностей $\tilde{p}_i(I)$ в формулы (7), (8), получаем «гипотетические» (экспертные) оценки математического ожидания $\mu = \mu(I)$ и дисперсии $\sigma^2 = \sigma^2(I)$ (стандартного отклонения $\sigma = \sigma(I)$) случайного курса валют $c(CHF, XDR)$. Результаты вычислений для выбранных трёх коротких временных рядов представлены в табл. 4–6.

Таблица 4. Экспертные оценки вероятностей $\bar{p}_i = \bar{p}_i(I), i=1,2,3$, математического ожидания $\mu = \mu(I)$ и стандартного отклонения $\sigma = \sigma(I)$ значений приращений курса валют для ряда (1).

\bar{p}_1	\bar{p}_2	\bar{p}_3	μ	σ

0,19	0,62	0,19	0,54	0,004
------	------	------	------	-------

Таблица 5. Экспертные оценки вероятностей $\bar{p}_i = \bar{p}_i(I)$, $i = 1,2,3$, математического ожидания $\mu = \mu(I)$ и стандартного отклонения $\sigma = \sigma(I)$ значений приращений курса валют для ряда (2).

\bar{p}_1	\bar{p}_2	\bar{p}_3	μ	σ
0,19	0,62	0,19	0,50	0,41

Таблица 6. Экспертные оценки вероятностей $\bar{p}_i = \bar{p}_i(I)$, $i = 1,2,3$, математического ожидания $\mu = \mu(I)$ и стандартного отклонения $\sigma = \sigma(I)$ значений приращений курса валют для ряда (3).

\bar{p}_1	\bar{p}_2	\bar{p}_3	μ	σ
0,11	0,28	0,62	0,72	0,01

По значениям $\bar{p}_i(I)$, $\delta_i(I)$, $i = 1,2,3$, с помощью формулы (17) для каждого из трёх случаев были найдены параметры ν_1 , ν_2 , ν_3 , ν гипотетических плотностей $f_{\bar{p}}(p_1, p_2, p_3) = f_{\bar{\beta}}(p_1, p_2, p_3; \nu_1, \nu_2, \nu_3)$ случайного вектора вероятностей попадания в соответствующие непересекающиеся интервалы.

При синтезе «эмпирической» информации (выборочные значения частот m_1 , m_2 , m_3 попадания случайной величины $c(CHF, XDR)$ в соответствующие непересекающиеся отрезки при m независимых испытаниях, $m = m_1 + m_2 + m_3 = 20$) и «гипотетической» информации (экспертные оценки параметров, ν_1 , ν_2 , ν_3 , ν гипотетической плотности распределения $f_{\bar{\beta}}(p_1, p_2, p_3; \nu_1, \nu_2, \nu_3)$) были получены по формулам (19), (20), (21) байесовские оценки математических ожиданий $\bar{p}_i^* = E \tilde{p}_i^*$, стандартных отклонений $\delta_i^* = \sqrt{D \tilde{p}_i^*}$ и ковариаций

$\delta_{ij}^* = \text{cov}(\tilde{p}_i^*, \tilde{p}_j^*)$ рандомизированных условных вероятностей \tilde{p}_i^* :
 $\bar{p}_1^*, \bar{p}_2^*, \bar{p}_3^*; \delta_1^*, \delta_2^*, \delta_3^*; \delta_{12}^*, \delta_{13}^*, \delta_{23}^*$.

После подстановки этих оценок в формулы (7), (8) были получены искомые «синтетические» оценки, учитывающие как «эмпирическую» информацию о выборочных частотах, так и «гипотетическую» информацию эксперта о параметрах распределения Дирихле, математического ожидания μ^* и стандартного отклонения σ^* случайного курса валют $c(CHF, XDR)$. Результаты вычислений для выбранных трёх коротких временных рядов представлены в табл. 7–9.

Таблица 7. Байесовские оценки вероятностей \bar{p}_i^* , $i = 1, 2, 3$, математического ожидания μ^* и стандартного отклонения σ^* значений приращений курса валют для рядов (1).

\bar{p}_1^*	\bar{p}_2^*	\bar{p}_3^*	μ^*	σ^*
0,30	0,64	0,06	0,5326	0,008

Таблица 8. Байесовские оценки вероятностей \bar{p}_i^* , $i = 1, 2, 3$, математического ожидания μ^* и стандартного отклонения σ^* значений приращений курса валют для рядов (2).

\bar{p}_1^*	\bar{p}_2^*	\bar{p}_3^*	μ^*	σ^*
0,16	0,64	0,16	0,56925	0,02

Таблица 9. Байесовские оценки вероятностей \bar{p}_i^* , $i = 1, 2, 3$, математического ожидания μ^* и стандартного отклонения σ^* значений приращений курса валют для рядов (3).

\bar{p}_1^*	\bar{p}_2^*	\bar{p}_3^*	μ^*	σ^*
0,49	0,42	0,09	0,712	0,0052

5. Построение ARIMA – модели и прогноза с помощью экспоненциального сглаживания. В связи с наличием ошибок измерения экономических показателей, наличием случайных флуктуаций, свой-

ственных экономическим системам, при исследовании временных рядов широко применяется вероятностно-статистический подход. В рамках такого подхода наблюдаемый временной ряд понимается как реализация некоторого случайного процесса. При этом неявно предполагается, что временной ряд имеет какую-то структуру, отличающую его от последовательности независимых случайных величин, так что наблюдения не являются набором совершенно независимых числовых значений. Обычно предполагается, что структуру ряда можно описать моделью, содержащей небольшое число параметров по сравнению с количеством наблюдений, – это практически важно при использовании модели для прогнозирования. Примерами таких моделей служат модели авторегрессии, скользящего среднего и их комбинации – модели AR(p), MA(q), ARMA(p, q), ARIMA(p, k, q).

При построении моделей приходится решать вопрос об отнесении каждого из рассматриваемых рядов к классу рядов, стационарных относительно детерминированного тренда (или просто стационарных) – TS (trend stationary) рядов, или к классу рядов, имеющих стохастический тренд (возможно, наряду с детерминированным трендом) и приводящихся к стационарному (или стационарному относительно детерминированного тренда) ряду только путем однократного или k-кратного дифференцирования ряда – DS (difference stationary) ряды – тест Дики – Фуллера.

Для исследуемых трёх коротких временных рядов была построена ARIMA(p, k, q). С помощью информационных критериев Akaike и Schwartz был осуществлён подбор модели для каждого из случаев. Далее, с помощью метода экспоненциального сглаживания были построены прогнозы. Результаты анализа для выбранных трёх коротких временных рядов представлены в табл. 10–12.

Таблица 10. Построение прогноза методом экспоненциального сглаживания для ряда (1).

μ^*	σ^*
0,538434	0,0007

Таблица 11. Построение прогноза методом экспоненциального сглаживания для ряда (2).

μ^*	σ^*
---------	------------

0,563072	0,000119
----------	----------

Таблица 12. Построение прогноза методом экспоненциального сглаживания для ряда (3).

μ^*	σ^*
0,743077	0,000942

6. Сравнительный анализ полученных результатов. Для сравнительного анализа результатов предложенных методов с помощью формул (3), (4) нам необходимо вычислить статистические характеристики трёх выбранных временных рядов на тестовом периоде (ТР). Результат этих вычислений приведены в табл. 13–15.

Таблица 13. Статистические характеристики тестового периода (ТР) для ряда (1).

μ^*	σ^*
0,5335	0,008

Таблица 14. Статистические характеристики тестового периода (ТР) для ряда (2).

μ^*	σ^*
0,5855	0,019

Таблица 15. Статистические характеристики тестового периода (ТР) для ряда (3).

μ^*	σ^*
0,74	0,0058

Мы видим, что байесовский анализ с большей точностью прогнозирует статистические характеристики, чем классический метод экспоненциального сглаживания. В первую очередь, это касается среднеквадратичного отклонения.

7. Заключение. В работе был проведён анализ выбранных коротких временных рядов приращений курса швейцарского франка CHF относительно счётной денежной единицы XDR резервного платёжного средства SDR (Special Drawing Rights) Международного валютного фонда (МВФ) изложенным ранее методом рандомизированных вероятностей для частного случая оценки кусочно-постоянной плотности распределения, соответствующей тернарному разбиению диапазона возможных значений исследуемой случайной величины. Был получен прогноз статистических характеристик выбранных трёх коротких временных рядов $c(CHF, XDR)$ с помощью Байесовского метода и с помощью построения ARIM – модели и получения прогноза с помощью метода экспоненциального сглаживания. Был проведён сравнительный анализ полученных результатов, вследствие которого было установлено, что для данных трёх коротких временных рядов, Байесовский анализ с большей точностью прогнозирует статистические характеристики, чем классический метод прогноза экспоненциального сглаживания.

Литература

1. Колесов Д.Н., Колодко Д.В., Хованов Н.В. Байесовская оценка распределения значений финансово-экономических показателей: теория и возможные приложения // Применение математики в экономике. Сборник статей. Выпуск 19. СПб.: 2012.
2. Хованов К.Н., Хованов Н.В. Система поддержки принятия решений АСПИД-3W (Анализ и Синтез Показателей при Информационном Дефиците). // Свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ № 960087 от 22.03.1996. Российское агентство по правовой охране программ для ЭВМ, баз данных и топологии интегральных микросхем. М.: РосАПО, 1996.
3. Страница EViews URL: <http://www.eviews.com/> (Доступ 11.05.2012.)
4. Домашняя страница проекта R URL: <http://www.r-project.org/>. (Доступ 11.05.2012.)
5. Вишняков И.В., Хованов Н.В. Система нормативов надёжности коммерческих банков. // Опыт статистического анализа. СПб.: СПбГУ, 1998. С. 28–30.
6. Вишняков И.В. Экономико-математические модели оценки деятельности коммерческих банков. СПб.: СПбГУ, 1999. С. 263–264.
7. Уиттл П. Вероятность. М.: Наука, 1982. 288 с.
8. Хованов Н.В. Три типа математических моделей неопределенности // Измерительная техника. 2005. N 9. С. 39–44.
9. Хованов Н.В. Математические модели риска и неопределенности. СПб.: СПбГУ, 1998. 200 с.
10. Bayes T. An essay towards solving a problem in the doctrine of chances // *Biometrika*. 1958. Vol. 45. P. 296–315 .
11. Хованов Н.В. Прогноз характеристик финансово-экономических показателей на основе синтеза экспертной и статистической информации // Труды 10-й международной научной школы «Моделирование и анализ безопасности и риска в сложных системах». Санкт-Петербург, 6-10 июля, 2010 г. СПб.: ГУАП, 2010. С. 114–122.

12. *Хованов Н.В., Юдаева М.С.* Использование метода рандомизированных вероятностей для оценки ожидаемых значений и вариаций финансово-экономических показателей // Труды 11-й международной научной школы «Моделирование и анализ безопасности и риска в сложных системах». Санкт-Петербург, 28 июня – 2 июля, 2011 г. СПб.: IPME RAS, 2011. С. 40–49.
13. *Hovanov N., Kornikov V., Seregin I.* Multicriteria estimation under uncertainty // Proceedings of the International Conference “Signals, Data, Systems”. Heiderabad (India). December 12-14, 1994. Vol. 1. Heiderabad: AMSE Press, 1994. P. 83–91.
14. Currency converter and historical exchange rates since 1979 URL: <http://www.fxtop.com>. (Доступ 11.05.2012.)

Жук Софья Николаевна — магистрант кафедры экономической кибернетики экономического факультета С.-Петербургского государственного университета (СПбГУ), младший научный сотрудник лаборатории теоретических и междисциплинарных проблем информатики СПИИРАН. Область научных интересов: статистический анализ данных, математическая статистика, теория вероятностей. Число публикаций — 1. Zhuk.S.N@gmail.com, СПИИРАН, 14-я линия В.О., д. 39, г. Санкт-Петербург, 199178, РФ; р.т. +7(812)328-3337, факс +7(812)328-4450. Научный руководитель — Н.В. Хованов.

Евстратчик Светлана Васильевна — доцент, канд. экон. наук. экономич. факультета С.-Петербургского государственного университета (СПбГУ). Область научных интересов: эконометрический анализ данных. Число публикаций — 14. s.evstratchik@econ.pu.ru; СПбГУ, экон. ф-т, ул. Чайковская, д.62, Санкт-Петербург, 191123, РФ.

Zhuk Sofya Nikolaevna — masters student of Mathematical methods in economics department, SPbSU, junior researcher, Theoretical and Interdisciplinary Computer Science Laboratory, SPIIRAS. Research area: statistics, the theory of probabilities. The number of publications — 1. Zhuk.S.N@gmail.com, SPIIRAS, 14-th line V.O., 39, St. Petersburg, 199178, Russia; office phone +7(812)328-3337, fax +7(812)328-4450. Scientific advisor — N.V. Hovanov.

Evstratchik Svetlana Vasilievna — docent, PhD in economics science. Research area: econometric analysis of the data. The number of publications — 14. s.evstratchik@econ.pu.ru, SPbSU, the economical faculty, st. Chaikovskaya, 62, Saint-Petersburg, 191123, Russia.

Рекомендовано ТИМПИ СПИИРАН, зав. лаб. А.Л. Тулупьев, д.ф.-м.н., доцент.
Работа поступила в редакцию 26.03.2012.

РЕФЕРАТ

Жук С.Н., Евстратчик С.В. Применение байесовской модели для оценивания вероятностей альтернатив в условиях неопределённости с использованием нечисловой, неточной и неполной экспертной информации.

Байесовский анализ эмпирических данных опирается на историческую статистику и привлекает дополнительную экспертную информацию, которой может обладать исследователь.

В рамках разработанной ранее байесовской модели оценки кусочно-постоянной плотности распределения, основанной на оценке параметров распределения Дирихле по нечисловой, неточной и неполной экспертной информации, изложена теоретическая часть метода рандомизированных вероятностей для частного случая оценки кусочно-постоянной плотности распределения, соответствующего тернарному разбиению диапазона возможных значений исследуемой случайной величины.

Изложенная модель применяется для оценки и прогноза статистических характеристик приращений курса швейцарского франка (CHF) относительно счётной денежной единицы (XDR) резервного платёжного средства SDR Международного валютного фонда (МВФ).

Для исследуемых трёх коротких временных рядов, имеющих различное поведение, была построена модель ARIMA(p, k, q). С помощью информационных критериев Akaike и Schwartz был осуществлён подбор модели для каждого из случаев. Далее с помощью метода экспоненциального сглаживания были построены прогнозы статистических характеристик.

Для сравнительного анализа результатов двух методов вычислены статистические характеристики трёх выбранных временных рядов на тестовом периоде.

Был проведён сравнительный анализ полученных результатов. Был сделан вывод, что байесовский анализ с большей точностью прогнозирует статистические характеристики, чем классический метод экспоненциального сглаживания. В первую очередь, это касается среднеквадратичного отклонения.

ABSTRACT

Zhuk S.N., Evstratchik S.V. **The application of bayesian model for estimation of the probabilities of alternatives under uncertainty with the use of nonnumeric, inaccurate and incomplete expert information.**

Bayesian analysis of empirical data bases on historic statistics and attracts additional expert information, which can be obtained by a researcher.

The theoretic part of the method of randomized probabilities for the special case of piecewise constant estimates of the density distribution, corresponding ternary partition of the range of possible values of the random variable is presented as a part of the previously developed Bayesian estimation model of a piecewise-constant density distribution, based on an estimate of the parameters of the Dirichlet distribution with the use of nonnumeric, inaccurate and incomplete information, presented.

This model is used for assessment and prediction of statistical characterization of the increments of the Swiss franc (CHF) with respect to the monetary unit (XDR) backup means of payment SDR (Special Drawing Rights) of the International Monetary Fund (IMF).

The model ARIMA (p, k, q) was constructed for three investigated short time series. With the use of the information criteria of Akaike and Schwartz the model for each case was selected. Further on forecasts of the statistical characteristics were constructed with the use of the method of exponential smoothing.

For a comparative analysis of two methods the statistical characteristics of three selected time series for the test period were calculated.

A comparative analysis of the results was done. As a result of which it was concluded that the Bayesian analysis predicts more accurately the statistical characterizations than the classical method of exponential smoothing. First of all, it is related to the standard deviation.