

А.А. ИВАШКО, Г.Р. САФОНОВ  
**МОДЕЛЬ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ  
ОПТИМАЛЬНОЙ СТРАТЕГИИ В ОНЛАЙН-АУКЦИОНЕ**

*Ивашко А.А., Сафонов Г.Р. Модель машинного обучения для определения оптимальной стратегии в онлайн-аукционе.*

**Аннотация.** В работе рассмотрено применение модели машинного обучения для определения оптимальной стратегии пользователя для победы в аукционе на покупку товара/услуги с использованием задачи наилучшего выбора. Применение модели наилучшего выбора позволяет участникам аукциона определить стратегию, которая минимизирует ожидаемую стоимость товара/услуги на основе функции распределения его цен. На практике наиболее часто цены на товар, услугу или ресурс имеют распределение, близкое к нормальному или к смеси нормальных распределений. Возникают задачи определения числа компонент смеси нормальных распределений и определения ее параметров. Одним из распространенных методов для определения числа компонент смеси распределений является *BIC* критерий. Оценить неизвестные параметры смеси нормальных распределений при фиксированном числе компонент можно с помощью *EM*-алгоритма, однако временные затраты на оценку параметров данным методом возрастают как при увеличении объема выборки, так и при увеличении числа рассматриваемых компонент смеси. Разработана классификационная модель машинного обучения на основе сверточной нейронной сети для автоматизации и ускорения процесса определения числа компонент смеси нормальных распределений и оценки ее параметров. Приведены результаты тренировки и тестирования модели машинного обучения. Проведено сравнение применения разработанной модели с другими алгоритмами, не использующими нейронные сети. Результаты показывают, что предложенная модель позволяет эффективно определить наиболее подходящее число компонент для смеси нормальных распределений и уменьшает скорость вычисления параметров распределения при применении *EM*-алгоритма. Модель машинного обучения может быть применена в различных областях, например, в финансовом анализе или для определения оптимальной стратегии в аукционе на аренду вычислительного ресурса.

**Ключевые слова:** машинное обучение, аукцион, задача наилучшего выбора, смесь нормальных распределений, *EM*-алгоритм.

**1. Введение.** Системы онлайн-аукционов в современном мире широко распространены в различных областях. Пользователи заинтересованы в покупке/продаже товаров или услуг, аренде жилья или вычислительных ресурсов по сниженной цене. Удобным решением для осуществления сделок являются различные торговые площадки (Ozon, Wildberries, eBay), поисковые системы (Yandex, Google), системы облачных вычислений (Yandex.Cloud, AmazonEC2, Google), площадки биржевых торгов (фондовый рынок). Данные сервисы стали особенно популярны в связи с возрастающим спросом на удаленный формат участия в них. Использование аукциона позволяет пользователям снизить затраты на приобретение товара или услуги. Поэтому актуальной

является задача определения оптимальной ценовой стратегии для победы в аукционе.

Вызывает интерес исследование подходов к определению цены на товар или ресурс с использованием схем аукционов и конкурсов. Исследованиям в данном направлении посвящено много работ, связанных как с теоретическими исследованиями поведения пользователей различных сервисов, механизмов аукционов и ценообразования, так и с практическими исследованиями, связанными с математическим моделированием, возможностью применения искусственного интеллекта. Различные механизмы аукционов рассматривались в работах [1, 2]. Обзор разных видов аукционов, включая онлайн-аукционы и аукционы в России, приведены в работе [3]. Вероятностные и статистические модели ценообразования исследовались в работах [4, 5]. Конкурентная модель аукциона рассматривалась в работе [6].

Модели с оптимальной остановкой часто используются для исследования поведения участников в различных схемах конкурсов и аукционов, например, в работах [7–9] представлены примеры использования таких моделей в онлайн-аукционах на покупку товара. Работа [10] содержит решение задачи определения ставки в многошаговом аукционе с неполной информацией о распределении цен. В работе [11] рассмотрено применение задач с оптимальной остановкой к онлайн-аукционам, проводимым поисковой системой Яндекс.

В данной работе был использован подход, который заключается в применении задачи наилучшего выбора для определения оптимальной ставки, чтобы выиграть аукцион на предоставление товара или услуги. Данный подход был использован, например, в работе [12] для определения оптимальной ставки в аукционе на аренду облачного вычислительного ресурса.

Для применения модели наилучшего выбора необходимо знать закон распределения цен и его параметры. При этом площадка, на которой происходит аукцион, может хранить информацию о ценах покупки/продажи за определенный период времени. Для того чтобы выиграть аукцион и получить товар по сниженной цене, пользователю необходимо установить ставку, основываясь на динамике цен. Как показывают исследования, цены могут иметь различное распределение. Возникает важная задача сбора и анализа уже имеющейся статистики цен, определения закона распределения и оценки его параметров.

В данной работе предполагается, что динамика цен характеризуется смесью нормальных распределений, что часто встречается на практике. В этом случае возникает задача определения числа компонент смеси.

Если известно число компонент смеси, то одним из подходящих методов для оценки ее параметров является *EM*-алгоритм [13]. Однако, оценка параметров таким способом занимает много времени. Одним из удобных инструментов решения подобных задач являются модели машинного обучения. Так как такие модели интенсивно используются в задачах классификации, представляется возможным разработать архитектуру модели машинного обучения для определения видов вероятностных распределений и оценки их параметров. В работе [14] описаны методы сбора и анализа данных с различных аукционов. В работе [15] рассмотрено применение нейронных сетей к исследованию инфокоммуникационных сетей для определения вида распределения. Работа [16] посвящена рассмотрению возможностей использования нейронных сетей для решения задачи классификации.

Смеси вероятностных распределений повсеместно применяются при математическом моделировании многих явлений и анализе данных в таких областях, как биология, экономика, физика, финансовый анализ [17–19]. В работах [20, 21] с помощью таких методов проведена оценка параметров распределения цен на платформе облачных вычислительных ресурсов, если известен их закон распределения.

В данной работе описывается применение классификационной модели машинного обучения для автоматизации и ускорения процесса определения вида распределения цен, оценки параметров этого распределения и дальнейшего получения оптимальной ставки пользователя, который хочет принять участие в аукционе. Данный подход иллюстрируется на примере платформы Amazon EC2, для которой доступны исторические данные о ценах, но он может быть использован и адаптирован для более широкого круга задач принятия решений и классификации.

**2. Модель определения ставки в аукционе.** В данном разделе описана математическая модель аукциона, предложенная в работе [12]. Также приведены *EM*-алгоритм для оценки параметров распределения, если известно число компонент смеси [21].

**2.1. Модель наилучшего выбора для определения оптимальной ставки в аукционе.** Для определения оптимальной ставки для победы в аукционе за основу берется математическая модель наилучшего выбора. Задачи наилучшего выбора изучаются в теории оптимальной остановки случайных процессов. Эта теория имеет дело с задачами выбора времени принятия какого-либо решения на основе последовательного наблюдения за случайными величинами с целью максимизации выигрыша.

Задача наилучшего выбора имеет прямое сходство с задачей определения наилучшей ставки на аукционе. Предполагается, что для победы в аукционе доступно  $n$  шагов. Пользователь, желающий купить товар в определенный момент времени, как и в задаче наилучшего выбора, наблюдает последовательность  $X_1, X_2, X_3, \dots$  цен, представляющих собой независимые и одинаково распределенные случайные величины с известной непрерывной функцией распределения  $F(x)$  на интервале  $[p_{min}, p_{max}]$ .  $p_{min}$  соответствует минимальной возможной стоимости товара на аукционе, а  $p_{max}$  максимальной не превышающей цену данного товара. Стратегией пользователя является пороговое значение (ставка)  $\tau_i$  перед  $i$ -м шагом,  $i = 1, \dots, n$ . Если ставка превышает текущую цену, то пользователь выигрывает в аукционе. Целью является минимизация ожидаемой стоимости товара за весь период времени.

Описанная выше задача наилучшего выбора с полной информацией и конечным горизонтом времени решается методом динамического программирования. Не выиграв аукцион по окончании периода  $n$ , пользователь должен купить его по максимальной цене  $p_{max}$ , поэтому ставка  $\tau_n = p_{max}$ . Далее на предыдущем шаге ставка пользователя представляет собой ожидаемое значение цены, которую он заплатит, если выигрывает аукцион.

Таким образом, получается система рекуррентных уравнений, позволяющая определить оптимальное значение ставки  $\tau_i$  для каждого шага  $i$  для заданного периода  $n$ :

$$\begin{aligned} \tau_n &= p_{max}, \\ \tau_i &= \mathbf{E}[\min\{X, \tau_{i+1}\}] = \int_{p_{min}}^{p_{max}} \min\{x, \tau_{i+1}\} dF(x) = \\ & \int_{p_{min}}^{\tau_{i+1}} x f(x) dx + \int_{\tau_{i+1}}^{p_{max}} \tau_{i+1} f(x) dx, \quad i = 1, \dots, n-1, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\mathbf{E}[X]$  – математическое ожидание случайной величины  $X$ ,  $f(x)$  – плотность распределения  $X$ .

Если ставка  $\tau_1$  на первом шаге не выиграла, следующая ставка  $\tau_2$  используется на втором шаге. Продолжая процесс, пользователь гарантированно получает товар за период  $n$  с минимальной ожидаемой стоимостью.

**2.2. Определение распределения цен и нахождение его параметров.** Для применения модели наилучшего выбора для определения ставки в аукционе, описанной формулой (1), необходимо знать распределение цен на товар. Для этого может быть исследована

динамика цен на основе исторических данных. По полученным значениям цен строятся гистограммы относительных частот. Предполагается, что динамика цен характеризуется смесью нормальных распределений.

Далее необходимо оценить неизвестные параметры распределения. Оценку параметров нормального распределения можно провести методом моментов. А оценку параметров распределения смеси нормальных распределений проводится с помощью *EM*-алгоритма.

Рассмотрим процесс оценки параметров с помощью *EM*-алгоритма. Плотность распределения смеси нормальных распределений с  $k$  компонентами имеет вид:

$$f(x) = \sum_{j=1}^k \omega_j f_j(x, a_j, \sigma_j),$$

$$f_j(x, a_j, \sigma_j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_j} e^{-\frac{(x-a_j)^2}{2\sigma_j^2}}, \quad (2)$$

где  $j = 1, \dots, k$ ,  $\sum_{j=1}^k \omega_j = 1$ .

Рассмотрим шаги *EM*-алгоритма [13]:

1) **Е-шаг**, вычисляется ожидаемое значение (expectation) вектора скрытых переменных:

$$g_{ij} = \frac{\omega_j f_j(x_i, a_j, \sigma_j)}{\sum_{s=1}^k \omega_s f_s(x_i, a_s, \sigma_s)}, \quad i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, k;$$

2) **М-шаг**, решается задача максимизации правдоподобия (maximization) и находится следующее приближение вектора параметров:

$$\omega_j = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m g_{ij},$$

$$a_j = \frac{1}{m\omega_j} \sum_{i=1}^m g_{ij} x_i,$$

$$\sigma_j^2 = \frac{1}{m\omega_j} \sum_{i=1}^m g_{ij} (x_i - a_j)^2, \quad j = 1, \dots, k,$$

где  $m$  – количество элементов в выборке, а  $g_{ij}$  – вероятность того, что элемент  $x_i$  выборки принадлежит  $j$ -го компоненте смеси распределений.

Последовательные итерации шагов E и M повторяются до тех пор, пока максимальное изменение переменных  $g_{ij}$  при переходе с  $t$ -й к  $(t + 1)$ -й итерации не станет меньше  $10^{-5}$ .

Для применения модели наилучшего выбора необходимо сформулировать гипотезу о виде вероятностного распределения цен, провести оценку его параметров и затем провести проверку гипотезы. EM-алгоритм является основным инструментом для оценки параметров смеси нормальных распределений, если известно число ее компонент. Однако временные затраты на оценку параметров данным методом возрастают как при увеличении объема выборки, так и при увеличении числа рассматриваемых компонент смеси. Данная особенность алгоритма не позволяет сформулировать и проверить гипотезы для каждого рассматриваемого распределения, так как этот процесс будет крайне затратным как относительно времени, так и вычислительных ресурсов.

**3. Модель машинного обучения для определения вида распределения.** В настоящей работе описано применение модели машинного обучения для определения наиболее подходящего вида распределения цен и нахождения его параметров. Для этого была реализована модель, предназначенная для автоматизированной постановки гипотезы о виде распределения цен на основе получаемой истории цен. Для рассматриваемой модели задачей машинного обучения является задача классификации по трём классам, соответствующим следующим видам распределений: нормальное распределение, смесь двух нормальных распределений и смесь трёх нормальных распределений.

**3.1. Описание архитектуры нейронной сети.** Сверточные нейронные сети (CNN) успешно используются для решения задачи распознавания образов на изображениях. Использование свертки позволяет получить новое изображение из исходного с более выраженными ключевыми особенностями [22, 23]. В данной работе используется этот тип нейронных сетей для ускорения процесса классификации. Дополнительно использование сверточной нейронной сети позволяет решить задачу, используя меньшее число обучаемых параметров и сохраняя достаточную точность. Для решения данной задачи применялись и иные популярные виды архитектур нейронных сетей, такие как полносвязные и рекуррентные (LSTM и GRU). Однако, в случае с полносвязными сетями обучение модели не давало удовлетворительных результатов в связи с проблемой переобучения, в случае с рекуррентными моделями не удалось достичь удовлетворительного качества классификации.

Описание структуры, предлагаемой свёрточной нейронной сети представлена на рисунке 1.

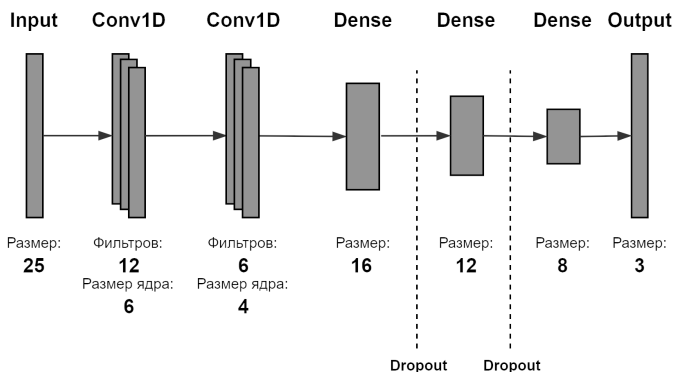


Рис. 1. Описание структуры нейронной сети

На рисунке 1 использованы следующие обозначения:

- Input – входной полносвязный слой, принимающий 25 значений интервальных частот;
- Conv1D – слои одномерной свёртки;
- Dense – полносвязные слои;
- Dropout – слой исключения;
- Output – выходной слой, каждый нейрон которого соответствует одному из рассматриваемых распределений.

Модель машинного обучения была реализована на языке программирования Python 3.6 с использованием программной библиотеки Keras.

В результате модель содержит 2995 обучаемых параметров, что позволяет решать поставленную задачу с незначительным потреблением вычислительных ресурсов.

**3.2. Генерация данных.** Для обучения и тестирования нейронной сети были использованы стандартизированные последовательности, сгенерированные из трёх рассматриваемых распределений (нормального, смеси двух нормальных, смеси трёх нормальных). Длина генерируемой последовательности варьируется от 500 до 950 значений. Генерация последовательности происходит в три этапа:

1. Генерация параметров распределения;
2. Генерация псевдослучайных величин из распределения;
3. Проверка соответствия полученной последовательности распределению.

Параметры распределения определяются псевдослучайным образом из равномерного распределения с дополнительными ограничениями. Математическое ожидание каждой  $i$ -й компоненты смеси не должно попадать в интервалы  $(a_j - 2 \cdot \sigma_j, a_j + 2 \cdot \sigma_j)$  при  $j \neq i$ , где  $a_j$  – математическое ожидание  $j$ -й компоненты,  $\sigma_j$  – среднее квадратическое отклонение  $j$ -й компоненты. Веса каждой из компонент ограничены интервалом  $(0,1, 0,8)$ .

После генерации последовательности из распределения с заданными параметрами, проводится проверка на соответствие полученной последовательности заданному распределению с помощью алгоритма, основанного на  $BIC$ -критерии, его описание представлено на рисунке 2. Если полученная последовательность не проходит проверку на соответствие, то осуществляется переход на первый этап.

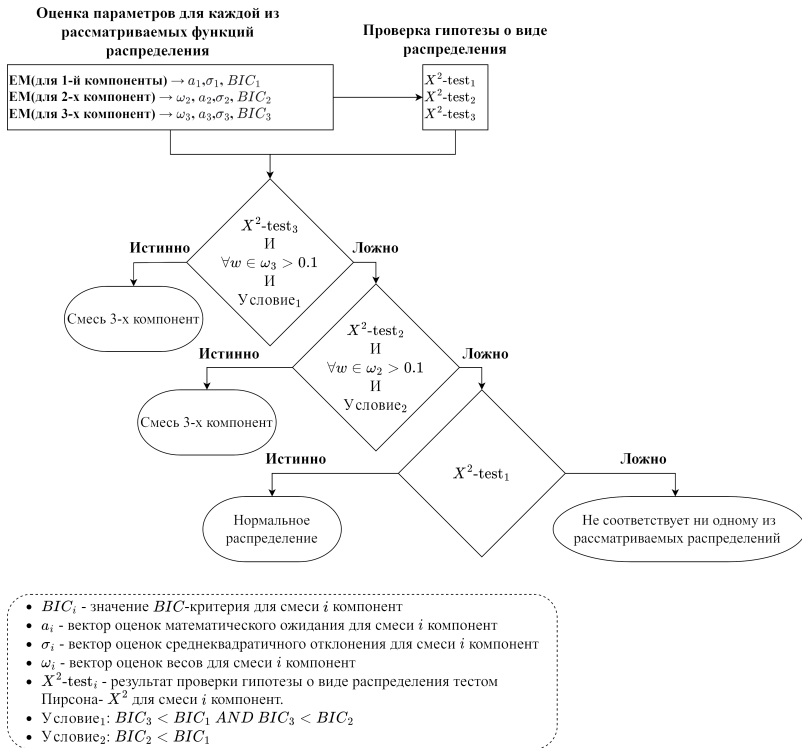


Рис. 2. Описание алгоритма разметки на основе  $BIC$



**3.3. Тренировка и тестирование нейронной сети.** Для формирования тренировочной выборки выше описанным методом было сгенерировано 8400 наборов векторов интервальных частот с распределением по классам, представленным таблице 1.

Таблица 1. Распределение наборов тренировочных данных по классам

Класс	Количество наборов
Нормальное распределение	2785
Смесь 2-х нормальных распределений	2790
Смесь 3-х нормальных распределений	2850

Для формирования тестовой выборки было сгенерировано 3600 наборов интервальных частот.

Для обучения модели было применено 200 эпох, в результате чего на основе тренировочных данных получены значения метрик, которые даны в таблице 2.

Таблица 2. Результаты обучения модели (на тренировочных данных)

Метрика	Значение
Точность	0.963
Полнота	0.962
Значение функции потерь	0.113

На рисунках 3 и 4 представлены графики значений точности для тренировочной и валидационной выборок, для формирования валидационной выборки было использовано 25% наборов от тренировочной выборки.

На рисунках 3 и 4 показано, что график точности возрастает, в то время как график функции потерь убывает на всем протяжении эпох обучения для тренировочной и валидационной выборок. Следовательно, обучение нейронной сети прошло успешно без переобучения.

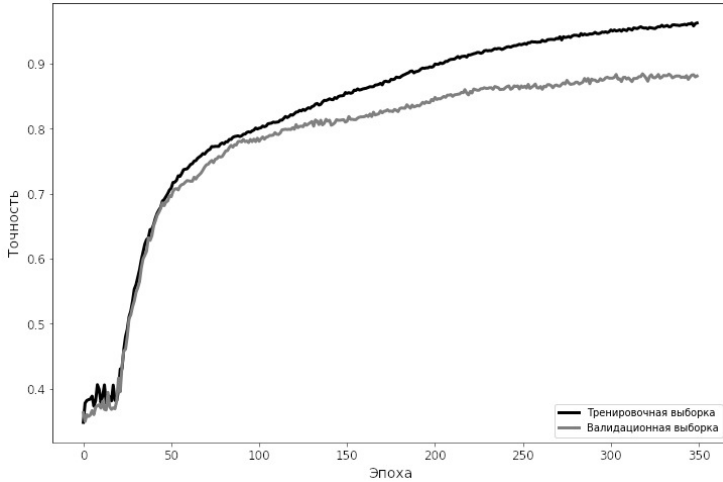


Рис. 3. Графики изменения точности для тренировочной и валидационной выборок в зависимости от эпохи обучения

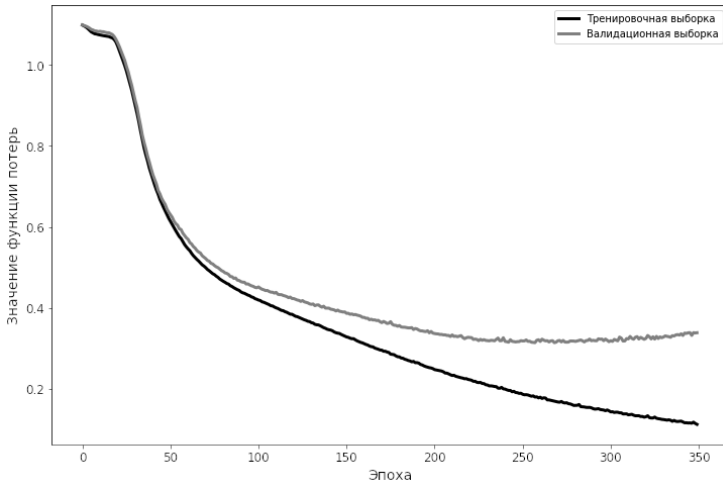


Рис. 4. Графики изменения функции потерь для тренировочной и валидационной выборок в зависимости от эпохи обучения

В результате применения предложенной модели на тестовых данных были получены значения метрик, которые представлены в таблице 3.

Таблица 3. Результаты применения модели на тестовой выборке

Метрика	
Точность	0.875
F1-метрика	0.874
Значение функции потерь	0.355

**3.4. Сравнение скорости работы.** Основной задачей применения полученной модели является ускорение процесса определения типа распределения и его параметров, связанного с применением *EM*-алгоритма, поэтому было проведено сравнение скорости работы трёх алгоритмов по определению количества компонент в смеси нормальных распределений:

1. Оценка параметров с помощью *EM*-алгоритма для максимального числа рассматриваемых компонент.

2. Применение алгоритма, основанного на *BIC*-критерии, аналогичного тому, который применялся для предварительной разметки исходных данных.

3. Применение полученной модели машинного обучения для определения числа компонент.

Первый алгоритм основан на идее о том, что если оценка параметров будет проводиться для большего количества компонент, чем имеется в действительном распределении цен, то полученные в результате применения *EM*-алгоритма веса тех компонент, которые не согласованы с реальными данными, будут близки к 0. Данный подход потребует применения *EM*-алгоритма для каждого набора данных, а с увеличением максимального числа компонент будут увеличиваться и временные затраты на применение *EM*-алгоритма.

Второй алгоритм, основанный на *BIC*-критерии, является самым затратным относительно вычислительных и временных ресурсов, так как требует применить *EM*-алгоритм дважды для каждого набора данных.

Третий алгоритм, основанный на модели машинного обучения, предполагает следующие этапы обработки данных:

1. Получение интервальных частот для входного набора цен.

2. Применение свёрточной нейронной сети для определения количества компонент в смеси.

3. Применение *EM*-алгоритма для определения параметров смеси нормальных распределений с найденным на прошлом шаге количеством компонент.

4. Проверка гипотезы о виде распределения на основе критерия Пирсона- $\chi^2$ .

На тестовой выборке, содержащей 150 равновзвешенных по классам наборов данных, было проведено сравнение скорости обработки всего набора данных тремя ранее указанными алгоритмами. При проведении тестирования было использовано устройство со следующими техническими характеристиками:

- CPU: Intel Core i5-1035G1;
- RAM: DDR4, 8Gb.

При применении нейронной сети графический ускоритель не применялся. В таблице 4 представлены значения времени обработки всех 150 значений тремя алгоритмами в секундах для 5 итераций.

Таблица 4. Время выполнения алгоритмов для 5 итераций по 150 наборов

	CNN	EM для 3-х компонент	BIC
Итерация 1	62.55	91.55	169.85
Итерация 2	63.38	86.3	161.37
Итерация 3	61.12	85.15	181.11
Итерация 4	58.43	86.77	198.37
Итерация 5	64.25	86.51	194.03
Среднее время	58.79	87.26	180.95

Как видно из таблицы 4, разработанная модель машинного обучения позволила ускорить процесс определения вида распределения цен.

**4. Применение модели машинного обучения к реальным данным.** Полученная модель может быть использована как для автоматизации анализа данных, так и для построения различных моделей оптимального поведения.

Смеси распределений часто встречаются в различных сферах, в частности, в финансовой области [19]. Например, в месячном разбиении истории цен акций ВТБ с 2015 по 2021 год:

- 31% последовательностей имеет нормальное распределение;
- 34% последовательностей имеют распределение в виде смеси двух нормальных распределений;
- 18% последовательностей имеют распределение в виде смеси трёх нормальных распределений.

С помощью модели машинного обучения возможно автоматизировать и ускорить процесс определения вида распределения

и его параметров, и затем применить различные модели финансового анализа.

Другим примером применения предложенной модели машинного обучения может служить анализ данных площадки облачных вычислений Amazon EC2 [24, 25], которые являются открытыми для пользователей, и определение оптимальной ставки в аукционе на аренду облачного ресурса.

На площадке Amazon EC2 одним из способов аренды вычислительного ресурса (инстанса) является спотовый аукцион. Пользователи делают ставки на максимальную стоимость часа пользования инстансом. Если сделанная ставка выше спотовой цены, то она является выигрышной. Все победившие пользователи платят одинаковую цену, которая равна значению минимальной выигравшей ставки.

Рассмотрим пример определения оптимальных ставок для инстанса типа *us-west-2c m5ad.4xlarge*, для которого было получено 500 значений цен.

График статистики цен изображен на рисунке 5.

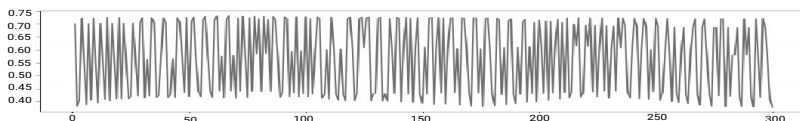


Рис. 5. Динамика спотовых цен инстанса *us-west-2c m5ad.4xlarge*

В результате применения модели машинного обучения и *EM* - алгоритма получим, что исторические данные в период с 26.11.2021 по 23.12.2021 (всего 500 значений) описываются смесью трёх нормальных распределений с параметрами  $a_1 = 0.405$ ,  $a_2 = 0.726$ ,  $a_3 = 0.624$ ;  $\sigma_1 = 0.024$ ,  $\sigma_2 = 0.005$ ,  $\sigma_3 = 0.056$ ;  $\omega_1 = 0.402$ ,  $\omega_2 = 0.237$ ,  $\omega_3 = 0.361$ . Гистограмма значений цен представлена на рисунке 6.

Далее применим формулу (1) для определения оптимальных ставок,  $p_{min} = 0.379$ ,  $p_{max} = 0.736$ .

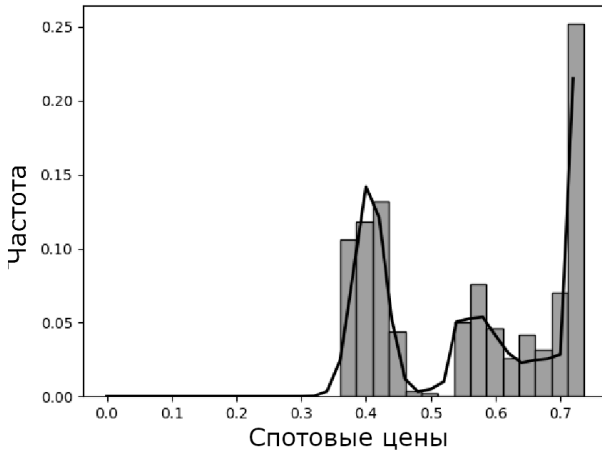


Рис. 6. Гистограмма спотовых цен

В таблице 5 представлены оптимальные пороги (ставки) для  $n = 10$  шагов модели. Заметим, что ставки возрастают по  $i$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Таблица 5. Значения ставок в соответствии с оптимальной стратегией для  $n = 10$

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tau_i$	0.358	0.367	0.377	0.387	0.399	0.415	0.438	0.478	0.546	0.736

Для иллюстрации оптимального поведения участника аукциона рассмотрим один из периодов с количеством шагов  $n = 10$ . На рисунке 7 представлены оптимальные пороги (серая линия) и цены на каждом из шагов (чёрная линия). В данном периоде оптимальным шагом для остановки будет  $i = 3$ , так как цена станет меньше ставки для данного шага. При этом значение ставки необходимо установить равной 0.377.

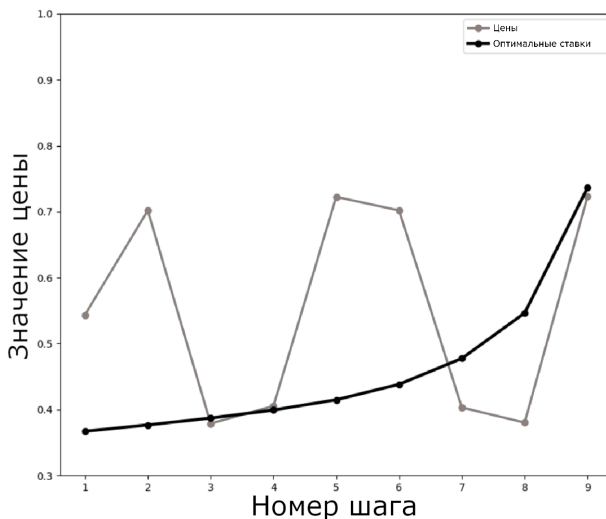


Рис. 7. Спотовые цены и оптимальные пороги для  $n = 10$

Для проверки эффективности предложенной оптимальной стратегии было проведено сравнение с тремя другими возможными стратегиями:

1. *Постоянная стратегия.*

Пользователь определяет значение ставки, постоянное для всех шагов. Эта ставка дает минимальное значение ожидаемой стоимости инстанса. Если за  $n$  шагов пользователь не получает инстанс, то он покупает инстанс по максимальной цене. Значение ставки  $x^*$  определяется по формуле  $x^* = \operatorname{argmin}(P(x))$ , где:

$$P(x) = \sum_{i=1}^n \left[ \int_x^{p_{max}} f(y) dy \right]^{i-1} \int_{p_{min}}^x y f(y) dy + \left[ \int_x^{p_{max}} f(y) dy \right]^n p_{max}. \quad (3)$$

В формуле (3) вычисляется ожидаемая стоимость инстанса при постоянном пороге  $x$ .

2. *Линейная стратегия.*

Пользователь использует ставки, имеющие линейный вид:  $\tau_n = ki + b$ , где  $i$  номер шага, а значения  $k$  и  $b$  зависят от общего числа шагов  $n$ .

### 3. Случайная стратегия.

Ставка пользователя является случайной величиной, имеющей распределение вида смеси нормальных распределений с определенными ранее параметрами. Пользователь определяет значение ставки как псевдослучайное число, которое может быть вычислено следующим образом:

- Генерируется псевдослучайное число из равномерного распределения с параметрами 0 и 1. На основании полученного значения определяется компонента смеси распределений.

- Генерируется псевдослучайное число из нормального распределения с параметрами, соответствующими выбранной компоненте. Полученное число представляет собой значение ставки для выбранного шага.

Таким образом, генерируются значения для каждого из  $n$  шагов.

Сравнение стратегий проводилось на основе данных из истории цен *Amazon EC2* в регионе *us-west-2c*, полученных с января по май 2022 года, всего было рассмотрено 302 инстанса и 1787865 значений истории цен. Для последовательности цен каждого инстанса были сформированы наборы, содержащие данные для постановки гипотезы о виде распределения (включающие в себя данные за 60 предшествующих дней) и наборы значений для применения стратегий для  $n = 10$  и  $n = 15$ . Значение итоговой цены выхода из аукциона каждой стратегии сравнивалось с максимальным значением цены за предшествующие 60 дней. В таблице 6 представлены средние значения процента прибыли при применении каждой стратегии в сравнении с покупкой по максимальной цене.

Таблица 6. Результаты сравнения стратегий

Стратегия	Средняя прибыль в % для $n = 10$ шагов	Средняя прибыль в % для $n = 15$ шагов
Оптимальная	44	49
Линейная	40	44
Постоянная	34	34
Случайная	19	18

Как видно из таблицы 6, приобретение инстанса через аукцион позволяет пользователю сэкономить до 49 % от его максимальной цены. Также результаты показывают, что ставки пользователя, которые представляют собой оптимальные пороги, найденные по формуле (1),



позволяют уменьшить стоимость приобретаемого инстанса на аукционе по сравнению с другими возможными стратегиями.

**5. Заключение.** В данной работе рассмотрена задача определения оптимальных ставок пользователя онлайн-аукциона на приобретение товара или услуги. Применен подход, основанный на применении задачи наилучшего выбора, которая, в свою очередь, использует исторические данные цен. Для автоматизации и ускорения процесса определения вида распределения истории цен и оценки его параметров была разработана модель машинного обучения на основе сверточной нейронной сети. Представлены результаты обучения и тестирования данной модели.

Результаты показывают, что предложенная сверточная нейронная сеть может быть успешно применена для определения наиболее подходящего количества компонент в смеси нормальных распределений для цен и ускорит процесс применения *EM*-алгоритма для оценки параметров распределения. Приведены результаты сравнения скорости работы разработанной модели машинного обучения с другими алгоритмами по определению количества компонент смеси распределений. Также рассмотрены возможные сферы применения полученных результатов для определения вида распределения, например, финансовых данных и оптимальной стратегии в аукционе на аренду облачного вычислительного ресурса. На основе реальных данных была проведена демонстрация последовательности действий определения оптимальной стратегии, включающая в себя применение предложенной модели машинного обучения, оценку параметров с помощью *EM*-алгоритма и применение алгоритма построения оптимальной стратегии. Проведено сравнение эффективности предложенной модели машинного обучения, использующей задачу наилучшего выбора для определения оптимальных ставок, с другими возможными стратегиями пользователя в аукционе.

В дальнейшем для увеличения точности предложенной модели машинного обучения размер и разнообразие тренировочных выборок могут быть увеличены. Также распределения цен не ограничены только нормальным распределением и его смесью. Можно встретить другие типы распределений, такие как экспоненциальное и логнормальное распределения. Следовательно, модель может быть расширена на более широкий класс распределений.

Полученные в работе результаты могут быть применены для исследования других типов аукционов, конкурсов, финансовых торгов. Предложенная модель машинного обучения может быть использована не только для аукционов, но и для других задач, в которых необходимо

проанализировать и классифицировать данные или оценить закон распределения поступающих наблюдений.

### Литература

1. Myerson R.B. Optimal Auction Design // *Mathematics of Operations Research*. 1981. vol. 6. no. 1. pp. 58–73.
2. Сонин К.И. Основы теории аукционов (Нобелевская премия по экономике 2020 года) // *Вопросы экономики*. 2021. № 1, С. 5–32.
3. Савватеев А.В., Филатов А.Ю. Теория и практика аукционов // *Вестник ВГУ. Серия: Экономика и управление*. 2018. № 3. С. 119–131.
4. Wang Y., Liu X., Zheng Z., Zhang Z., Xu M., Yu C., Wu F. On Designing a Two-stage Auction for Online Advertising // *WWW '22: Proceedings of the ACM Web Conference*. 2022. pp. 90–99.
5. Shmueli G., Russo R.P., Jank W. Modeling Bid Arrivals in Online Auctions. Robert H. Smith School Research Paper No. RHS-06-001, 2004. Available at SSRN: <https://ssrn.com/abstract=902868> (accessed 26.07.2022).
6. Maslov A., Schwartz J. Imperfect Competition in Online Auctions // *Journal of Mathematical Economics*. 2022 Advance Access, Available at SSRN: <https://ssrn.com/abstract=4025920> (accessed 26.07.2022).
7. Harrell G., Harrison J., Mao G., Wang J. Online Auction and Secretary Problem // *Int'l Conf. Scientific Computing*. 2015. pp. 241–244.
8. Babaioff M., Immorlica N., Kempe D., Kleinberg R. Online auctions and generalized secretary problems // *SIGecom Exch.* 2008. vol. 7. no. 2. pp. 1–11.
9. Guo X. An optimal strategy for sellers in an online auction // *Authors Info & Claims ACM Transactions on Internet Technology*. 2002. Vol. 2, Issue 1. pp. 1–13.
10. Mazalov V.V., Ivashko A.A. Online Auction and Optimal Stopping Game with Imperfect Observation // *Intelligent Information and Database Systems. ACIIDS 2020, LNCS*. 2020. vol. 12033. Springer. pp. 145–156.
11. Мазалов В.В., Фалько (Ивашко) А.А. Задача наилучшего выбора и ее применение в рекламных кампаниях поисковой системы Яндекс // *Интернет-Математика 2007. Яндекс*. 2007. С. 126–134.
12. Ивашко Е.Е., Черных А., Ивашко А.А., Сафонов Г.Р. Эффективная по цене стратегия аренды облачных ресурсов при неопределенности цены // *Математическая Теория Игр и ее Приложения*. 2019. Т. 11. Вып. 3. С. 5–30.
13. McLachlan G.J., Lee S.X., Rathnayake S.I. Finite Mixture Models // *Annual Review of Statistics and Its Application*. 2019. vol. 6, no. 1. pp. 355–378.
14. Jank W., Shmueli G. *Modeling Online Auctions*. 2010. Wiley. 336 p.
15. Гойхман В., Лапий А. Построение архитектуры нейронной сети для выявления вида распределения случайных величин // *Технологии и средства связи*. 2016. Вып. 3, С. 36–40.
16. Khoussi S., Heckert N., Battou A., Bensalem S. Neural Networks for Classifying Probability Distributions, Technical Note (NIST TN), National Institute of Standards and Technology, Gaithersburg, MD. Available at: [https://tsapps.nist.gov/publication/get\\_pdf.cfm?pub\\_id=931221](https://tsapps.nist.gov/publication/get_pdf.cfm?pub_id=931221) (accessed 12.10.2022).
17. Королев В. Ю., Ломской В.А., Пресняков Р.Р., Рэй М. Анализ компонент волатильности с помощью метода скользящего разделения смесей // *Системы и средства информатики. Специальный выпуск*. 2005. М: ИПИРАН. С. 180–206.
18. Волков Н.А., Буденный С.А., Андрианова А.М. Смесей вероятностных распределений в задачах регрессии и проверки на аномальность и их применение для PVT-свойств // *ТРУДЫ МФТИ*. 2020. Т. 12, № 3, С. 17–43.

19. Abba Mallam Hassane, Barro Diakarya, Yaméogo WendKouni, Saley Bisso Pricing Multivariate European Equity Option Using Gaussians Mixture Distributions and EVT-Based Copulas // International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. 2021. vol. 2021. Article ID 7648093, 9 pages.
20. Javadi B., Thulasiram K.R., Rajkumar B. Characterizing spot price dynamics in public cloud environments // Future Generation Computer Systems. 2013. vol. 29. Issue 4, June 2013. pp. 988–999.
21. Ivashko A., Safonov G. Optimal strategy modelling in an online auction for the rent of computing resources // CEUR Workshop Proceedings, Volume 2792, 2020, 2nd International Workshop on Stochastic Modeling and Applied Research of Technology, SMARTY 2020; Petrozavodsk; Russian Federation; 16 August 2020. 2020. pp. 66–75.
22. Buduma N., Buduma N., Papa J. Fundamentals of Deep Learning, 2nd Edition O'Reilly Media, Inc., 2022. 296 p.
23. Голубинский А. Н., Толстых А. А. Гибридный метод обучения сверточных нейронных сетей // Информатика и автоматизация. 2021. Т. 20, Вып. 2. С. 463–490.
24. Amazon Inc. Amazon Elastic Compute Cloud (Amazon EC2). Available at: <http://aws.amazon.com/ec2> (accessed 8.06.2022).
25. Kumar D., Baranwal G., Raza Z., Vidyarthi D.P. A Survey on Spot Pricing in Cloud Computing // Journal of Network and Systems Management. 2018. pp. 809–856.

**Ивашко Анна Антоновна** — канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник, институт прикладных математических исследований, Карельский научный центр Российской академии наук; доцент, кафедра математического анализа, Петрозаводский государственный университет. Область научных интересов: теория вероятностей, математическая статистика, теория оптимальной остановки случайных процессов, теория игр. Число научных публикаций — 63. [aivashko@krc.karelia.ru](mailto:aivashko@krc.karelia.ru); улица Пушкинская, 11, 185910, Петрозаводск, Россия; р.т.: +7(8142)766-312.

**Сафонов Георгий Романович** — студент магистратуры, Петрозаводский государственный университет. Область научных интересов: машинное обучение, теория игр, теория вероятностей и математическая статистика. Число научных публикаций — 4. [jiri.safonov@gmail.com](mailto:jiri.safonov@gmail.com); проспект Ленина, 33, 185910, Петрозаводск, Россия; р.т.: +7(953)535-8814.

A.A. IVASHKO, G.R. SAFONOV  
**MACHINE LEARNING MODEL FOR DETERMINATION OF THE  
OPTIMAL STRATEGY IN AN ONLINE AUCTION**

*Ivashko A.A., Safonov G.R. Machine Learning Model for Determination of the Optimal Strategy in an Online Auction.*

**Abstract.** We apply a machine learning model to determine the optimal strategy in an online auction for the rent of computing resources using the best-choice model. The best-choice model allows clients to minimize the expected cost of renting a computing resource based on the spot price distribution function. The spot price dynamics platform is investigated. The most suitable price distributions in an auction are the normal distribution and its mixtures. In this case, the problems of determining the number of components in the mixture and estimating its parameters arise. One of the well-known methods for determining the number of components in a mixture of normal distributions is the BIC criterion. The EM algorithm is a basic tool for estimating the parameters of a mixture of distributions if we know the number of components. However, parameter estimation by this method takes more time when both the sample size and the number of components of the mixture increase. To automate and expedite the process of determining the number of components for a mixture of normal distributions and estimating its parameters, a classification machine learning model based on a convolutional neural network is developed. The results of the model training and validation are presented. The suggested model is compared with other algorithms which do not use neural networks. The results show that the suggested model performs well in determining the most appropriate number of components for a mixture of normal distributions and in reducing the time spent on applying the EM algorithm to estimate its parameters. This model can be used in different areas, for example, in finance or for determination of the optimal strategy in an online auction for the rent of computing resources.

**Keywords:** machine learning, auction, best-choice problem, mixture of normal distributions, EM-algorithm.

## References

1. Myerson, R. B. Optimal Auction Design. *Mathematics of Operations Research*. 1981. vol. 6. no. 1. pp. 58–73.
2. Sonin K.I. [The principles of auction theory (Nobel Memorial Prize in Economic Sciences 2020)] *Voprosy Ekonomiki. [Problems of Economics]*. 2021. no. 1, pp. 5–32. (In Russ.).
3. Savvateev A.V, Filatov A.Yu. [Theory and practice of auctions]. *Vestnik VGU. Serija: Jekonomika i upravlenie [Proceedings of Voronezh State University. Series: Economics and Management]*. 2018. no. 3. pp. 119–131. (In Russ.).
4. Wang Y., Liu X., Zheng Z., Zhang Z., Xu M., Yu C., Wu F. On Designing a Two-stage Auction for Online Advertising. *WWW '22: Proceedings of the ACM Web Conference*. 2022. pp. 90–99.
5. Shmueli G., Russo R.P., Jank W. Modeling Bid Arrivals in Online Auctions. Robert H. Smith School Research Paper No. RHS-06-001, 2004. Available at SSRN: <https://ssrn.com/abstract=902868> (accessed 26.07.2022).
6. Maslov A., Schwartz J., Imperfect Competition in Online Auctions. *Journal of Mathematical Economics*. 2022 Advance Access, Available at SSRN: <https://ssrn.com/abstract=4025920> (accessed 26.07.2022).

7. Harrell G., Harrison J., Mao G., Wang J. Online Auction and Secretary Problem. *Int'l Conf. Scientific Computing*. 2015. pp. 241–244.
8. Babaioff M., Immorlica N., Kempe D., Kleinberg R. Online auctions and generalized secretary problems. *SIGecom Exch*. 2008. vol. 7. no. 2. pp. 1–11.
9. Guo X. An optimal strategy for sellers in an online auction. *Authors Info & Claims ACM Transactions on Internet Technology*. 2002. Vol. 2, Issue 1. pp. 1–13.
10. Mazalov V.V., Ivashko A.A. Online Auction and Optimal Stopping Game with Imperfect Observation. *Intelligent Information and Database Systems. ACIIDS 2020, LNCS*. 2020. vol. 12033. Springer. pp. 145–156.
11. Mazalov V.V., Falko (Ivashko) A.A. [Best-choice problem and its application in the advertising campaign of the search engine Yandex] *Internet-Matematika 2007 [Internet-Mathematics 2007]*. Yandex. 2007. pp. 126–134. (In Russ.).
12. Ivashko E.E., Tchernykh A., Ivashko A.A., Safonov G.R. [Cost-efficient strategy in clouds with spot price uncertainty] *Matematicheskaja teorija igr i ee prilozhenija. [Mathematical Game Theory and Applications.]* 2019. vol. 11, no. 3. pp. 5–30. (In Russ.).
13. McLachlan G.J., Lee S.X., Rathnayake S.I. Finite Mixture Models. *Annual Review of Statistics and Its Application*. 2019. vol. 6. no. 1. pp. 355–378.
14. Jank W., Shmueli G. *Modeling Online Auctions*. 2010. Wiley. 336 p.
15. Goikhman V., Lapiy A. [Development of the neural network's architecture for identifying type of distribution of random variables] *Tehnologii i sredstva svjazi.[Technology and Communication.]*. 2016. v. 3. pp. 36-40. (In Russ.).
16. Khoussi S., Heckert N., Battou A., Bensalem S. *Neural Networks for Classifying Probability Distributions, Technical Note (NIST TN)*. 2021. National Institute of Standards and Technology, Gaithersburg, MD. Available at: [https://tsapps.nist.gov/publication/get\\_pdf.cfm?pub\\_id=931221](https://tsapps.nist.gov/publication/get_pdf.cfm?pub_id=931221) (accessed 12.10.2022)
17. Korolev V., Lomskoy V., Presnyakov N., Rey M. [Analysis of volatility components by the method of moving separation of mixtures] *Sistemy i sredstva informatiki. Special'nyj vypusk. [Systems and Means of Informatics]*. 2005. pp. 180–206. (In Russ.).
18. Volkov N.A., Budennyj S.A., Andrianova A.M. [Mixture of probability distributions in the problems of regression and anomaly detection and its applications to PVT properties] *TRUDY MFTI. [Proceedings of MIPT.]* 2020. Vol. 12, No. 3, pp. 17–43. (In Russ.).
19. Abba Mallam Hassane, Barro Diakarya, Yaméogo WendKouni, Saley Bisso, Pricing Multivariate European Equity Option Using Gaussians Mixture Distributions and EVT-Based Copulas. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*. 2021. vol. 2021. Article ID 7648093. 9 pages.
20. Javadi B., Thulasiram K.R., Rajkumar B. Characterizing spot price dynamics in public cloud environments. *Future Generation Computer Systems*. 2013. vol. 29. Issue 4, June 2013. pp. 988–999.
21. Ivashko A., Safonov G. Optimal strategy modelling in an online auction for the rent of computing resources. *CEUR Workshop Proceedings*. 2020. Volume 2792, 2nd International Workshop on Stochastic Modeling and Applied Research of Technology, SMARTY 2020; Petrozavodsk; Russian Federation; 16 August 2020. pp. 66–75.
22. Buduma N., Buduma N., Papa J. *Fundamentals of Deep Learning, 2nd Edition*, O'Reilly Media, Inc., 2022. 296 p.
23. Golubinsiy A., Tolstykh A. Hybrid Method of Conventional Neural Network Training. *Informatika i avtomatizacija. [Informatics and Automation]*. 2021. vol. 20. no. 2, pp. 463–490. (In Russ.).
24. Amazon Inc. *Amazon Elastic Compute Cloud (Amazon EC2)*. Available at: <http://aws.amazon.com/ec2> (accessed 8.06.2022).

25. Kumar D., Baranwal G., Raza Z., Vidyarthi D.P. A Survey on Spot Pricing in Cloud Computing. *Journal of Network and Systems Management*. 2018. pp. 809–856.

**Ivashko Anna** — Ph.D., Senior researcher, Institute of applied mathematical research, Karelian Research Centre of the Russian Academy of Sciences; Associate professor, Department of mathematical analysis, Petrozavodsk State University. Research interests: probability theory, mathematical statistics, optimal stopping theory, game theory. The number of publications — 63. aivashko@krc.karelia.ru; 11, Pushkinskaya St., 185910, Petrozavodsk, Russia; office phone: +7(8142)766-312.

**Safonov Georgy** — Master student, Petrozavodsk State University. Research interests: machine learning, game theory, probability theory and mathematical statistics. The number of publications — 4. jiri.safonov@gmail.com; 33, Lenin Ave., 185910, Petrozavodsk, Russia; office phone: +7(953)535-8814.