

Г.А. ЛЕОНОВ, Н.В. КУЗНЕЦОВ, Е.В. КУДРЯШОВА,
О.А. КУЗНЕЦОВА
**СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ СИМВОЛЬНЫХ
ВЫЧИСЛЕНИЙ: ЛЯПУНОВСКИЕ
ВЕЛИЧИНЫ И 16-Я ПРОБЛЕМА
ГИЛЬБЕРТА**

Леонов Г.А., Кузнецов Н.В., Кудряшова Е.В., Кузнецова О.А. **Современные методы символьных вычислений: ляпуновские величины и 16-я проблема Гильберта.**

Аннотация. Данная работа посвящена различным методам вычисления ляпуновских величин и реализациям основанных на них алгоритмов символьных вычислений в пакете Матлаб.

Ключевые слова: символьные вычисления, ляпуновские величины, слабый фокус, 16-я проблема Гильберта, малые предельные циклы.

Leonov G.A., Kuznetsov N.V., Kudryashova E.V., Kuznetsova O.A. **Modern symbolic computation methods: Lyapunov quantities and 16th Hilbert problem.**

Abstract. In this work various methods of Lyapunov quantities computation are discussed and implementations of symbolic computation algorithms, based on them, in Matlab are shown.

Keywords: symbolic computations, Lyapunov quantities, weak focus, 16th Hilbert problem, small limit cycles.

1. Введение. Развитие методов вычисления и анализа ляпуновских величин стимулировалось как чисто математическими проблемами (16-я проблема Гильберта, задача различения центра и фокуса, определение цикличности фокуса, анализ устойчивости динамических систем), так и прикладными инженерными задачами (исследование границ области устойчивости и возбуждения колебаний). Применение современной компьютерной техники и пакетов символьных вычислений позволило существенно продвинуться в изучении ляпуновских величин. В то время как символьные выражения для первой и второй ляпуновских величины были получены в 1940–1950-е гг. [1, 2], а первая программа их вычисления для ЭВМ была создана в 1968 г. [3], выражение для третьей ляпуновской величины в общем виде было впервые вычислено только в 2008 г. [4–7]. Это стало возможным благодаря развитию аналитических методов вычисления ляпуновских величин, реализации эффективных алгоритмов на их основе и применению современных

методов компьютерных вычислений. В настоящей статье описаны различные методы вычисления ляпуновских величин, приведены примеры их компьютерных реализаций.

2. Ляпуновские величины. Для исследования устойчивости нелинейных динамических систем в случае двух чисто мнимых собственных значений матрицы первого приближения (так называемый критический случай, когда оказывается недостаточно рассматривать линейное приближение системы для определения устойчивости исходной нелинейной системы) в классических работах А. Пуанкаре [8] и А.М. Ляпунова [9] был предложен метод вычисления так называемой ляпуновской величины (фокусной величины или константы Пуанкаре—Ляпунова). Знак ляпуновской величины характеризует закрутку/раскрутку решений системы в малой окрестности состояния равновесия и устойчивость/неустойчивость состояния равновесия.

Рассмотрим достаточно гладкую двумерную систему

$$\frac{dx}{dt} = F(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = G(x, y), \quad (1)$$

где $F(0, 0) = G(0, 0) = 0$ (т. е. точка $(0, 0)$ является стационарной точкой системы). Запишем систему (1) в виде

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f_{10}x + f_{01}y + f(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= g_{10}x + g_{01}y + g(x, y), \end{aligned} \quad (2)$$

где разложение функций f и g начинается с членов не ниже второго порядка.

Будем предполагать, что в открытой окрестности U радиуса R_U точки $(x, y) = (0, 0)$ правая часть системы имеет непрерывные частные производные n -го порядка

$$f(\cdot, \cdot), g(\cdot, \cdot): \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \in C^n(U) \quad (3)$$

и выполнено представление

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= \sum_{k+j=2}^n f_{kj} x^k y^j + o((|x| + |y|)^n) = f_n(x, y) + o((|x| + |y|)^n), \\
 g(x, y) &= \sum_{k+j=2}^n g_{kj} x^k y^j + o((|x| + |y|)^n) = g_n(x, y) + o((|x| + |y|)^n).
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

Рассмотрим матрицу первого приближения системы в нулевой стационарной точке

$$A_{(0,0)} = \begin{pmatrix} f_{10} & f_{01} \\ g_{10} & g_{01} \end{pmatrix}
 \tag{5}$$

и, введя обозначения

$$\sigma = \text{Tr}A_{(0,0)} = f_{10} + g_{01}, \quad \Delta = \det A_{(0,0)} = f_{10}g_{01} - f_{01}g_{10},$$

запишем ее собственные числа:

$$\lambda_{1,2} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} - \Delta}.$$

Пусть матрица $A_{(0,0)}$ первого приближения системы имеет два чисто мнимых собственных числа (т. е. $\sigma = 0$ и $\Delta > 0$). В этом случае, не умаляя общности (т. е. всегда существует такая неособая линейная замена переменных), можно считать, что

$$f_{10} = 0, \quad f_{01} = -1, \quad g_{10} = 1, \quad g_{01} = 0$$

и рассматривать систему

$$\begin{aligned}
 \frac{dx}{dt} &= -y + f(x, y), \\
 \frac{dy}{dt} &= x + g(x, y).
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

Здесь в системе первого приближения

$$\frac{dx}{dt} = -y, \quad \frac{dy}{dt} = x
 \tag{7}$$

для системы (6) собственные числа матрицы равны $\pm i$ и все траектории системы первого приближения являются замкнутыми, а

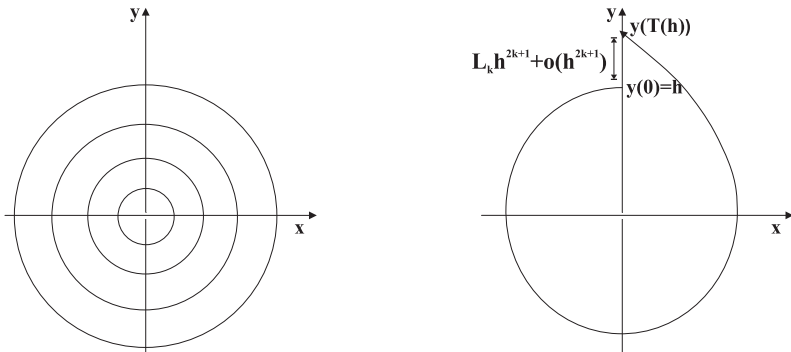


Рис. 1: Центр и фокус при определении ляпуновской величины.

стационарная точка $(0, 0)$ называется центром (рис. 1,). Для исследования влияния нелинейных членов $f(x, y)$ и $g(x, y)$ на поведение траекторий системы (6) в малой окрестности стационарной точки рассмотрим, следуя методу Пуанкаре, пересечения траектории (6) с прямой $x = 0$.

Выпустим в момент времени $t = 0$ из точки $(0, h)$ на прямой $x = 0$ траекторию $(x(t, h), y(t, h))$

$$(x(0, h), y(0, h)) = (0, h)$$

и обозначим через $T(h)$ время оборота траектории — время до следующего пересечения траектории с прямой $x = 0$ (для достаточно малых h такое время существует и конечно, так как правые части систем (6) и (7) различаются на $o(|x| + |y|)$ в окрестности нуля).

Тогда

$$x(T(h)) = 0,$$

а $y(T(h))$ можно последовательно приближать отрезком ряда по степеням h

$$y(T(h)) = h + \tilde{L}_2 h^2 + \tilde{L}_3 h^3 + \dots \quad (8)$$

Здесь первый ненулевой коэффициент \tilde{L}_m называется ляпуновской величиной, определяет устойчивость или неустойчивость стационарной точки и характеризует закрутку/раскрутку траектории

(рис. 1,). Можно показать, что первый ненулевой коэффициент будет обязательно иметь нечетный номер $m = (2k + 1)$. Значение L_{2k+1} называют k -й ляпуновской величиной:

$$L_k = \tilde{L}_{2k+1},$$

а состояние равновесия — слабым фокусом k -го порядка.

Аналогично вводится понятие ляпуновской величины и для комплексных собственных чисел матрицы первого приближения (5) в случае $\sigma \neq 0$. В этом случае вводится понятие нулевой ляпуновской величины $L_0 = \tilde{L}_1$:

$$y(T(h)) = (1 + \tilde{L}_1)h + o(h),$$

которая характеризует экспоненциальный рост решений системы (аналогично ляпуновским экспонентам или характеристическим показателям, см. [10]), обусловленный вещественной частью собственных чисел.

Отметим, что, следуя работе А.М. Ляпунова [9], аналогичную процедуру исследования устойчивости можно проводить и для систем большей размерности (в случае, когда у линейной системы два чисто мнимых корня и остальные отрицательные). Некоторые результаты по вычислению ляпуновских величин для систем большей размерности содержатся, например, в [1].

3. Методы вычисления ляпуновских величин. Развитие методов вычисления и анализа ляпуновских величин стимулировалось и чисто математическими проблемами (16-й проблемой Гильберта, определением цикличности фокуса, различением центра и фокуса), и прикладными задачами (исследованием границ области устойчивости и возбуждения колебаний).

Так, метод Н.Н. Баутина [11], основанный на независимом разнонаправленном изменении значений последовательных нулевых ляпуновских величин при помощи возмущений коэффициентов, позволяет получать аналитические условия существования в окрестности состояния равновесия малых предельных циклов (так называемая локальная 16-я проблема Гильберта [12]) в терминах коэффициентов разложения правой части системы. Для двумерных квадратичных систем эта техника позволяет построить три малых предельных цикла вокруг одного из состояний равновесия (слабого фокуса) [11], а для двумерных систем с правой частью в

виде полиномов n -ой степени — получить оценку снизу числа предельных циклов (см., например, обзоры [13–15]). Здесь основной проблемой (см., например, [16,17]) является определение независимых нулей в выражениях для ляпуновских величин (определение так называемого базиса идеала Баутина, основанного на полиномиальных выражениях ляпуновских величин в терминах коэффициентов системы).

В инженерной механике с вычислением ляпуновских величин связан важный вопрос о поведении динамической системы при значениях параметра, близких к границе области устойчивости. Следуя работе Н.Н. Баутина [1], различают «опасные» и «безопасные» границы, малое нарушение которых влечет малые (обратимые) или необратимые изменения состояния системы. Такие изменения соответствуют, например, сценариям «мягкого» и «жесткого» возбуждения колебаний, рассмотренным А.А. Андроновым [18]. Так, в случае двух комплексно-сопряженных собственных чисел линейной части двумерной системы в окрестности стационарной точки при пересечении границы области устойчивости от отрицательных значений действительной части корней к положительным, если первая ляпуновская величина отрицательна, то появляется единственный устойчивый предельный цикл, который стягивается в точку при обратном изменении параметра, что соответствует «безопасной» границе. Напротив, если первая ляпуновская величина положительна, то при малых изменениях траектория может отойти бесконечно далеко от состояния равновесия, что соответствует «опасной» границе.

В настоящее время существует несколько методов нахождения ляпуновских величин и их компьютерных реализаций, которые позволяют определять данные величины в виде символьных выражений, зависящих от коэффициентов разложения правых частей уравнений системы. Эти методы различаются по сложности реализации алгоритмов, пространству, в котором проводятся вычисления, и компактности получаемых символьных выражений [14, 15, 19–23].

Первый метод нахождения ляпуновских величин был предложен в работах [8] и [9]. Он базируется на последовательном построении функции Ляпунова на основе интеграла линейной части системы.

В дальнейшем были разработаны различные методы вычисле-

ния ляпуновских величин, использующие приведение системы к нормальной форме [14, 24]. Однако при реализации этих методов возникают сложности, связанные с неоднозначностью процесса построения нормальной формы системы.

Другой подход к вычислению ляпуновских величин связан с нахождением приближений решения системы. Так, в работе [9] используется переход к полярным координатам и процедура последовательного построения приближений решения.

В работах [4–6] был предложен новый метод вычисления ляпуновских величин, основанный на построении приближений решения (в виде конечной суммы по степеням начальных данных) в исходной евклидовой системе координат и во временной области. Преимуществом данного метода является идеологическая простота и наглядность. Этот подход также может применяться для решения задачи определения изохронного центра [25], так как позволяет найти приближение времени «оборота» траектории в зависимости от начальных данных.

Часто для упрощения алгоритма вычисления и конечных выражений ляпуновских величин используются различные модификации рассмотренных выше методов, связанные с преобразованием системы к комплексным переменным [3, 14, 23, 26]. Так, на основе модификации для комплексной области метода построения функции Ляпунова в 1968 г. была разработана, по-видимому, самая первая компьютерная программа вычисления ляпуновских величин [3].

Отметим, что анализ и вычисление символьных выражений ляпуновских величин могут быть также сведены к применению рекуррентных формул [15], использованию алгебраических методов построения и исследования специальных полиномов [12, 17].

Кроме того, отметим, что в то время как символьные выражения первой и второй ляпуновских величин для систем общего вида были вычислены еще в 1940–1950-е гг. соответственно Н.Н. Баутиным [1] и Н.Н. Серебряковой [2], вычисление выражений для последующих ляпуновских величин стало возможным лишь много позже благодаря появлению мощной вычислительной техники. Так, выражение для третьей ляпуновской величины в общем виде в терминах коэффициентов разложения правых частей уравнений системы получено в 2008 г. при помощи пакетов символьных вычислений [4–6] и занимает несколько страниц.

Метод Пуанкаре—Ляпунова: построение функции Ляпунова.

Следуя классическим работам [8, 9], рассмотрим задачу построения функции Ляпунова для системы (6). Заметим, что

$$V_2(x, y) = \frac{(x^2 + y^2)}{2}$$

является интегралом системы (7) (линейная система первого приближения для системы (6)), и будем для нелинейной системы (6) искать в окрестности нулевого состояния функцию Ляпунова в виде

$$V(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2} + V_3(x, y) + \dots + V_{n+1}(x, y), \quad (9)$$

где $V_k(x, y)$ — однородные полиномы

$$V_k(x, y) = \sum_{i+j=k} V_{ij} x^i y^j, \quad k = 3, \dots, n+1$$

с неизвестными коэффициентами $\{V_{ij}\}_{i+j=k}$. Для производной $\dot{V}(x, y)$ в силу системы (6) с учетом представления (4) имеем

$$\dot{V}(x, y) = \frac{\partial V(x, y)}{\partial x}(-y + f_n(x, y)) + \frac{\partial V(x, y)}{\partial y}(x + g_n(x, y)) + o((|x| + |y|)^{n+1}). \quad (10)$$

Обозначая в получившемся выражении однородные члены порядка k через $W_k(x, y)$ и учитывая, что в силу равенства

$$\dot{V}_2(x, y) = xf(x, y) + yg(x, y) = o((|x| + |y|)^2),$$

выполнено $\dot{V}(x, y) = o((|x| + |y|)^2)$, получим

$$\dot{V}(x, y) = W_3(x, y) + \dots + W_{n+1}(x, y) + o((|x| + |y|)^{n+1}). \quad (11)$$

Здесь

$$W_k(x, y) = \left(x \frac{\partial V_k(x, y)}{\partial y} - y \frac{\partial V_k(x, y)}{\partial x} \right) + u_k(x, y),$$

где коэффициенты формы $u_k(x, y)$ зависят от $\{V_{ij}\}_{i+j < k}$ и $\{f_{ij}, g_{ij}\}_{i+j < k}$.

Коэффициенты $\{V_{ij}\}_{i+j=k}$ могут быть последовательно определены для $k = 3, 4, \dots$ так, чтобы производная $V(x, y)$ в силу системы (11) приняла вид

$$\dot{V}(x, y) = w_1(x^2 + y^2)^2 + w_2(x^2 + y^2)^3 + \dots,$$

где w_i — некоторые выражения, содержащие только коэффициенты $\{f_{ij}, g_{ij}\}$ разложения правых частей уравнений системы.

Для определения коэффициентов $\{V_{ij}\}_{i+j=k}$ при нечетных k необходимо решить вообще говоря неоднородную линейную систему (полученную из уравнения $W_{2m+1}(x, y) = 0$) из $(k+1)$ уравнения относительно $(k+1)$ неизвестного коэффициента, которая всегда имеет единственное решение.

При четных $k = (2m+2)$ решается вообще говоря неоднородная линейная система (полученная из равенства $W_{2m+2}(x, y) - w_m(x^2 + y^2)^{m+1} = 0$) из $(k+1)$ уравнения относительно $(k+2)$ неизвестных коэффициентов — $(k+1)$ коэффициента $\{V_{ij}\}_{i+j=k}$ и w_m . Чтобы неизвестные коэффициенты определялись единственным образом, к системе добавляют [15] одно из уравнений:

$$\begin{aligned} V_{(m+1)(m+1)} &= 0, \text{ если } m \text{ нечетное,} \\ V_{(m)(m+2)} + V_{(m+2)(m)} &= 0, \text{ если } m \text{ четное.} \end{aligned}$$

Отметим здесь, что равенство $W_{2m+2}(x, y) = 0$ приводит к линейной системе, у которой ранг матрицы равен $2m+1$ (в отличие от нечетных номеров).

Первый ненулевой коэффициент w_m называется константой Ляпунова или Пуанкаре—Ляпунова [19, 25] ($2\pi w_m$ равняется m -й ляпуновской величине [27]). Если такая константа $w_m \neq 0$ найдена, то в некоторой малой окрестности нуля производная $V(x, y)$ в силу системы является знакоопределенной (знак совпадает со знаком w_m), а сама $V(x, y)$ является определенно-положительной (т. е. построена функция, удовлетворяющая условиям теоремы Ляпунова об устойчивости и неустойчивости):

$$\begin{aligned} V(x, y) &= \frac{x^2 + y^2}{2} + o((|x| + |y|)^2), \\ \dot{V}(x, y) &= w_m(x^2 + y^2)^{m+1} + o((|x| + |y|)^{2m+2}). \end{aligned}$$

Если для системы с аналитическими правыми частями все $w_k = 0$, то в рассматриваемой окрестности все траектории являются периодическими, с периодом, зависящем от начальных данных.

Пример реализации в MatLab.

```

1 function [L] = fLQ_poincare(fxy,gxy,N)
2 syms x y 'real'
3
4 Nfg = 2*N+1; %
5 dx = -y + fxy; dy = x + gxy;
6
7 V(1:Nfg+2,1:Nfg) = 0*x;
8 V(1,1) = 'W2'; V(2,1) = 1/2; V(3,1) = 1/2; % L0
9
10 v = (x^2+y^2)/2;
11 w = V(1,1)*(x^2+y^2);
12
13 for k = 3 : Nfg+1
14     for j = 0 : k
15         i = k - j;
16         if (mod(i,2) == 0) && (i == j || i == j - 2)
17             V(j+1,k-1) = sym(['W',int2str(k)], 'real' );
18             w = w + V(j+1,k-1)*(x^2+y^2)^(k/2);
19             if (i == j - 2)
20                 v = v - V(i+1,k-1)*x^i*y^j;
21             end
22         else
23             V(j+1,k-1)=sym(['V',int2str(i), '_ ',
24                             int2str(j)], 'real' );
25             v=v + V(j+1,k-1)*x^i*y^j;
26         end
27     end
28     dv = simplify (diff (v,x)*dx + diff (v,y)*dy);
29     dVW(1:Nfg,1:Nfg+2) = 0*x*y;
30     dvw = dv-w;
31     for k = 2 : Nfg+1
32         for j = 0 : k
33             i = k - j;
34             dVW(k-1,j+1) =
35                 simplify (subs((diff (dvw),x,i)
36                             /factorial(i),y,j)/factorial(j)),{x y},{0 0});
37         end
38     end
39     New_V(1:Nfg+2,1:Nfg) = 0*x;
40     for k = 3 : Nfg + 1
41         clear M;
42         M(1:k+1,1:k+1) = 0*x;
43         for i = 1 : k+1
44             M(1:k+1,i) = diff (dVW(k-1,1:k+1),V(i,k-1));
45         end
46         clear P;
47         P(1:k+1,1) = 0*x;
48         for i = 1 : k+1
49             P(i,1) = -dVW(k-1,i) + M(i,1:k+1) *
50                 V(1:k+1,k-1);
51         end
52     end
53 end

```

```

50     New_V(1:k+1,k-1) = simplify (M^(-1)*P);
51 end
52
53 L(1:N) = 0*x; % ñòìèááô ëÿíóíñâñèèö áâèèèèèí
54 for i = 1 : N
55     L(i) = New_V(i+2+mod(i+1,2),2*i+1);
56     for k = Nfg+1 : -1 : 4
57         for j = 0 : k-1
58             L(i) = subs (L(i), V(j+1,k-2),
59                         New_V(j+1,k-2), 0);
59         end
60     end
61     L(i) = factor (2*pi*L(i));
62 end

```

Метод Ляпунова: приведение к полярным координатам.

Рассмотрим, следуя работе [9], метод построения приближений решения в полярной системе координат.

Сделаем в системе (6) замену переменных

$$x = r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi$$

и, выражая производные r и ϕ , перейдем к системе

$$\begin{aligned} \dot{r} &= f(r \cos \phi, r \sin \phi) \cos \phi + g(r \cos \phi, r \sin \phi) \sin \phi, \\ \dot{\phi} &= 1 - \frac{f(r \cos \phi, r \sin \phi) \sin \phi}{r} + \frac{g(r \cos \phi, r \sin \phi) \cos \phi}{r}. \end{aligned}$$

Здесь, согласно (4), пока r достаточно мало, ϕ будет непрерывно возрастающей функцией и может играть роль «времени». Поделив первое уравнение на второе, для достаточно малых r получим уравнение

$$\frac{dr}{d\phi} = \frac{f(r \cos \phi, r \sin \phi) \cos \phi + g(r \cos \phi, r \sin \phi) \sin \phi}{1 - \frac{f(r \cos \phi, r \sin \phi) \sin \phi}{r} + \frac{g(r \cos \phi, r \sin \phi) \cos \phi}{r}} = R(r, \phi), \quad (12)$$

где $R(0, 0) = 0$.

Здесь функция $R(r, \phi)$ является периодической по ϕ с периодом 2π , а также, согласно (4), имеет непрерывные частные производные до порядка n и выполнена оценка $\bar{R}(r, \phi) = o(r)$. Тогда справедливо представление

$$\frac{dr}{d\phi} = \tilde{R}_{r,2}(\phi)r^2 + \dots + \tilde{R}_{r,n}(\phi)r^n + o(r^n). \quad (13)$$

Здесь $\phi \in [0, 2\pi]$ и не принимается во внимание зависимость остаточного члена $o(r^n)$ от ϕ (это справедливо, например, когда $\left(R(r, \phi) - \sum_{k=1}^n r^k \tilde{R}_{r^k}(\phi) \right)$ является гладкой функцией и, соответственно, равномерно ограниченной по ϕ на рассматриваемом множестве).

Учитывая представление правой части уравнения (13), будем искать решение $r(\phi, h)$, где $r(0, h) = h$, в виде

$$r(\phi, h) = h + \tilde{r}_{h^2}(\phi)h^2 + \tilde{r}_{h^3}(\phi)h^3 + \dots + \tilde{r}_{h^n}(\phi)h^n + o(h^n). \quad (14)$$

Подставляя представление решения (14) в уравнение (13) и приравнявая выражения при соответствующих степенях h , получим уравнения

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{r}_{h^2}(\phi)}{d\phi} &= \tilde{R}_{r^2}(\phi), \\ \frac{d\tilde{r}_{h^3}(\phi)}{d\phi} &= \tilde{R}_{r^3}(\phi) + 2\tilde{R}_{r^2}(\phi)\tilde{r}_{h^2}(\phi), \\ &\dots \\ \frac{d\tilde{r}_{h^n}(\phi)}{d\phi} &= \tilde{R}_{r^n}(\phi) + 2\tilde{R}_{r^2}(\phi)\tilde{r}_{h^{n-1}}(\phi) + \dots \end{aligned} \quad (15)$$

для последовательного определения $\tilde{r}_{h^k}(\phi)$ таких, что $\tilde{r}_{h^k}(0) = 0$.

Рассматривая $r(\phi, h)$ при $\phi = 2\pi$ получим функцию последования

$$r(2\pi, h) = h + \tilde{r}_2 h^2 + \tilde{r}_3 h^3 + \dots, \quad \tilde{r}_k = \tilde{r}_{h^k}(2\pi),$$

где \tilde{r}_k называются фокусными величинами. Если $\tilde{r}_2 = \dots = \tilde{r}_{2m} = 0$, то \tilde{r}_{2m+1} равняется m -ой ляпуновской величине.

Пример реализации в MatLab.

```

1 function [L] = fLQ_polar(fxy, gxy, N)
2 syms x y r v h 'real'
3
4 Nfg = 2*N+1;% ïïðÿâïê ñèñðàèù (íáíáóíàèùé äëÿ
      âù÷-îèÿ L_N)
5
6 syms r v
7 frv = subs(fxy, [x y], [r*cos(v) r*sin(v)]);
8 grv = subs(gxy, [x y], [r*cos(v) r*sin(v)]);
9 dr = frv*cos(v)+grv*sin(v);
10 dv = simplify(1 - frv*sin(v)/r+grv*cos(v)/r);
11 Rrv = dr/dv;
```

```

12 NL = Nfg; Rv(1:NL) = 0*h;
13 for i=1:NL
14     Rv(i) = subs (( diff (Rrv,r,i)/factorial(i)),r, '0' );
15 end;
16 rv_s(1:NL) = 0*h; rvh_s = 0*h;
17 for n=1:NL
18     rv_s(n) = sym([ 'rv_' ,int2str (n)], 'real' );
19     rvh_s = rvh_s + rv_s(n)*h^n;
20 end
21 Rv_s(1:NL) = 0*h; Rvr_s = 0*r;
22 for n=1:NL
23     Rv_s(n) = sym([ 'Rv_' ,int2str (n)], 'real' );
24     Rvr_s = Rvr_s + Rv_s(n)*r^n;
25 end
26 uv_Rrs(1:NL) = 0*h;
27 uvh_Rrs=subs(Rvr_s, r, rvh_s);
28 for n=1:NL
29     uv_Rrs(n)=simplify ( subs(diff (uvh_Rrs, 'h' ,n)/
30         factorial(n),h,'0' ));
31 end
32
33 uv_Rrs_full = uv_Rrs;
34 uvh_Rrs = simplify ( subs(uvh_Rrs,rv_s(1), '1' ));
35 uv_Rrs = simplify ( subs(uv_Rrs,rv_s(1), '1' ));
36 uvh_Rrs = simplify ( subs(uvh_Rrs,Rv_s(1), '0' ));
37 uv_Rrs = simplify ( subs(uv_Rrs,Rv_s(1), '0' ));
38
39 uv(1:NL) = 0*v; rv(1:NL)=0*v; Lv(1:NL) = 0*v;
40 rv(1) = 1; rv_cur = rv(1)*h; Lv(1) = 1;
41 for i=2:NL
42     uv_rs = subs(uv_Rrs(i),Rv_s,Rv,0);
43     uv(i)= subs (uv_rs,rv_s, rv,0);
44     lv = int(uv(i),v); l_v0 = lv - subs(lv,v, '0' ,0);
45     rv(i) = simplify (l_v0+0*h);
46     rv_cur = rv_cur + rv(i)*h^i;
47     Lv(i) = simplify ( subs(rv(i), 'v' , '2*pi' ,0)+0*h);
48 end;
49 for i = 1 : N
50     L(i) = Lv(2*i+1);
51 end

```

Метод аппроксимации решений и времени оборота в Евклидовых координатах и во временной области.

В работах [4–6] был предложен новый метод вычисления ляпуновских величин, основанный на построении приближений решения в исходной евклидовой системе координат и во временной области, преимуществом которого является идеологическая простота и наглядность.

Пусть $x(t, x(0), y(0))$, $y(t, x(0), y(0))$ — решение системы (6) с начальными данными

$$x(0) = 0, \quad y(0) = h. \quad (16)$$

Обозначим

$$x(t, h) = x(t, 0, h), \quad y(t, h) = y(t, 0, h).$$

Рассмотрим время $T(h)$ первого пересечения решения $(x(t, h), y(t, h))$ с полуосью $\{x = 0, y > 0\}$ и доопределим (по непрерывности) его в нуле: $T(0) = 2\pi$. Из условия гладкости (3) для достаточно малых h следует, что время оборота $T(h)$ можно представить в виде

$$T(h) = 2\pi + \Delta T(h) = 2\pi + \sum_{k=1}^n \tilde{T}_k h^k + o(h^n), \quad \tilde{T}_k = \frac{1}{k!} \frac{d^k T(h)}{dh^k}, \quad (17)$$

а решение системы представимо в виде

$$\begin{aligned} x(t, h) &= x_{h^n}(t, h) + o(h^n) = \sum_{k=1}^n \tilde{x}_{h^k}(t) h^k + o(h^n), \\ \tilde{x}_{h^k}(t) &= \frac{1}{k!} \frac{\partial^k x(t, h)}{\partial h^k}, \\ y(t, h) &= y_{h^n}(t, h) + o(h^n) = \sum_{k=1}^n \tilde{y}_{h^k}(t) h^k + o(h^n), \\ \tilde{y}_{h^k}(t) &= \frac{1}{k!} \frac{\partial^k y(t, h)}{\partial h^k}. \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь $t \in [0, T(h)]$ и не принимается во внимание зависимость остаточного члена $o(h^n)$ от t (это справедливо, например, когда $(x(t, h) - x_{h^n}(t, h))$ является гладкой функцией и соответственно равномерно ограниченной по t на рассматриваемом множестве).

Для первого приближения решения с начальными данными (16) имеем

$$x_{h^1}(t, h) = \tilde{x}_{h^1}(t) h = -h \sin(t), \quad y_{h^1}(t, h) = \tilde{y}_{h^1}(t) h = h \cos(t), \quad (19)$$

а последующие приближения $(x_{h^k}(t, h), y_{h^k}(t, h))$ определяются из рекуррентной процедуры. Заметим, что для определения k -го приближения решения при подстановке $x(t, h) = x_{h^k}(t, h) + o(h^k)$ и $y(t, h) = y_{h^k}(t, h) + o(h^k)$ в $f(x, y)$ и $g(x, y)$ получившиеся выражения при h^k (обозначим их через $u_{h^k}^f$ и $u_{h^k}^g$ соответственно) будут зависеть только от предыдущих приближений

$\{x_{h^m}(t, h), y_{h^m}(t, h)\}_{m < k}$ (т. е. в рамках рекуррентной процедуры будут известными функциями времени) и не будут зависеть от неизвестных функций $\tilde{x}_{h^k}(t)$ и $\tilde{y}_{h^k}(t)$:

$$\begin{aligned} f(x_{h^k}(t, h) + o(h^k), y_{h^k}(t, h) + o(h^k)) &= u_{h^k}^f(t)h^k + o(h^k), \\ g(x_{h^k}(t, h) + o(h^k), y_{h^k}(t, h) + o(h^k)) &= u_{h^k}^g(t)h^k + o(h^k). \end{aligned} \quad (20)$$

Тогда после подстановки (18) в (6) для определения $\tilde{x}_{h^k}(t)$ и $\tilde{y}_{h^k}(t)$ получим систему

$$\frac{d\tilde{x}_{h^k}(t)}{dt} = -\tilde{y}_{h^k}(t) + u_{h^k}^f(t), \quad \frac{d\tilde{y}_{h^k}(t)}{dt} = \tilde{x}_{h^k}(t) + u_{h^k}^g(t). \quad (21)$$

Лемма 1 *ля р ш ний сист мы 21 с н ч льными нными*

$$\tilde{x}_{h^k}(0) = 0, \quad \tilde{y}_{h^k}(0) = 0 \quad (22)$$

ум м

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{h^k}(t) &= u_{h^k}^g(0) \cos(t) + \cos(t) \int_0^t \cos(\tau) ((u_{h^k}^g(\tau))^0 + u_{h^k}^f(\tau)) d\tau + \\ &+ \sin(t) \int_0^t \sin(\tau) ((u_{h^k}^g(\tau))^0 + u_{h^k}^f(\tau)) d\tau - u_{h^k}^g(t), \\ \tilde{y}_{h^k}(t) &= u_{h^k}^g(0) \sin(t) + \sin(t) \int_0^t \cos(\tau) ((u_{h^k}^g(\tau))^0 + u_{h^k}^f(\tau)) d\tau - \\ &- \cos(t) \int_0^t \sin(\tau) ((u_{h^k}^g(\tau))^0 + u_{h^k}^f(\tau)) d\tau. \end{aligned} \quad (23)$$

Таким образом, используя (20) и (23), последовательно определяются коэффициенты разложения (18).

Рассмотрим время $t = 2\pi + \Delta T(h)$ и представим, учитывая условие гладкости (3), найденные коэффициенты в виде

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{h^k}(2\pi + \Delta T(h)) &= \tilde{x}_{h^k}(2\pi) + \sum_{m=1}^n \tilde{x}_{h^k}^{(m)}(2\pi) \frac{(\Delta T(h))^m}{m!} + \\ &+ o((\Delta T(h))^n), \quad k = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Тогда, подставляя полученные выражения с учетом (17), в первое уравнение (18) и обозначая коэффициенты при h^k через \tilde{x}_k , получим разложение $x(T(h), h)$ по степеням h :

$$x(T(h), h) = \sum_{k=1}^n \tilde{x}_k h^k + o(h^n). \quad (24)$$

Из равенства $x(T(h), h) = 0$ для коэффициентов $\{\tilde{x}_k\}$ получим

$$h : 0 = \tilde{x}_1 = \tilde{x}_{h^1}(2\pi),$$

$$h^2 : 0 = \tilde{x}_2 = \tilde{x}_{h^2}(2\pi) + \tilde{x}_{h^1}^0(2\pi)\tilde{T}_1,$$

$$h^3 : 0 = \tilde{x}_3 = \tilde{x}_{h^3}(2\pi) + \tilde{x}_{h^1}^0(2\pi)\tilde{T}_2 + \frac{1}{2}\tilde{x}_{h^2}^0(2\pi)\tilde{T}_1 + \frac{1}{2}\tilde{x}_{h^1}^{00}(2\pi)\tilde{T}_1^2,$$

...

$$h^n : 0 = \tilde{x}_n = \tilde{x}_{h^n}(2\pi) + \tilde{x}_{h^1}^0(2\pi)\tilde{T}_{n-1} + \dots$$

Отсюда можно последовательно определить коэффициенты $\tilde{T}_{k=1, \dots, n-1}$ через коэффициенты f_{ij} и g_{ij} , так как в выражение для \tilde{x}_k входят коэффициенты $\tilde{T}_{1 \leq m < k-1}$ и слагаемое $\tilde{x}_{h^1}^0(2\pi)\tilde{T}_{k-1} = -\tilde{T}_{k-1}$ (здесь 0 обозначает производную по времени t).

Проводя аналогичную процедуру для $y(T(h), h)$, получим из равенства

$$y(T(h), h) = \sum_{k=1}^n \tilde{y}_k h^k + o(h^n)$$

следующие соотношения:

$$h : \tilde{y}_1 = \tilde{y}_{h^1}(2\pi),$$

$$h^2 : \tilde{y}_2 = \tilde{y}_{h^2}(2\pi) + \tilde{y}_{h^1}^0(2\pi)\tilde{T}_1,$$

$$h^3 : \tilde{y}_3 = \tilde{y}_{h^3}(2\pi) + \tilde{y}_{h^1}^0(2\pi)\tilde{T}_2 + \frac{1}{2}\tilde{y}_{h^2}^0(2\pi)\tilde{T}_1 + \frac{1}{2}\tilde{y}_{h^1}^{00}(2\pi)\tilde{T}_1^2,$$

...

$$h^n : \tilde{y}_n = \tilde{y}_{h^n}(2\pi) + \tilde{y}_{h^1}^0(2\pi)\tilde{T}_{n-1} + \dots$$

для последовательного определения $\tilde{y}_{k=1, \dots, n}$. Здесь $\tilde{y}_{h^1}(2\pi) = 1$, значения $\tilde{T}_{k=1, \dots, n-1}$ и функции $\tilde{y}_{h^k=1, \dots, n}(t)$ определены выше. Если при этом $\tilde{y}_2 = \dots = \tilde{y}_{2m} = 0$, то \tilde{y}_{2m+1} является m -й ляпуновской величиной L_m .

Отметим здесь, что из равенств $\tilde{x}_{h2}(2\pi) = 0$ и $y_{h1}^0(2\pi, h) = 0$ следует, что L_1 не зависит от $\Delta T(h)$, так как $T_1 = 0$ и $\tilde{y}_{h1}^0(2\pi)\tilde{T}_2 = 0$, а L_{m-2} зависит от $\{\tilde{T}_k\}_{2 \leq k \leq 2m-1}$.

Пример реализации в MatLab.

```

1 function [L,T,xt,yt] = fLQ_kl(fxy,gxy,N)
2 syms x y h t 'real'
3 NL=2*N+1; Nfg=NL;
4 xt_s(1:Nfg-1)=0*h; yt_s(1:Nfg-1)=0*h; xth_s=0*t;
5     yth_s=0*t;
6 for n=1:Nfg
7     xt_s(n)=sym(['xt_',int2str(n)], 'real' );
8     xth_s=xth_s+xt_s(n)*h^n;
9     yt_s(n)=sym(['yt_',int2str(n)], 'real' );
10    yth_s=yth_s+yt_s(n)*h^n;
11 end
12 disp(['NL=',int2str(NL)]);
13 sT_h_cur=0;
14 for i=1:NL-1
15     sT_h(i,1)=sym(['T',int2str(i)], 'real' );
16     sT_h_cur=sT_h_cur + sT_h(i,1)*h^i;
17 end;
18 ugt(1:Nfg)=0*t; xt(1:Nfg)=0*t; yt(1:Nfg)=0*t;
19 xt(1)=-sin(t); yt(1)=cos(t); xt_cur=xt(1)*h;
20     yt_cur=yt(1)*h;
21 for i=2:NL
22     uft_s= subs( diff ( subs(fxy, [x y], [xth_s
23         yth_s]),h,i)
24         /factorial(i),h,0);
25     uft(i)= subs(uft_s, [xt_s yt_s], [xt yt]);
26     ugt_s= subs( diff ( subs(gxy, [x y], [xth_s
27         yth_s]),h,i)
28         /factorial(i),h,0);
29     ugt(i)= subs( ugt_s, [xt_s yt_s], [xt yt]);
30     ult= diff ( ugt(i),t)+uft(i);
31     lucos=int(cos(t)*ult,t); lucos_t0=(lucos -
32         subs(lucos,t,0));
33     lusin=int(sin(t)*ult,t); lusin_t0=(lusin -
34         subs(lusin,t,0));
35     ug0=subs( ugt(i),t,0);
36     xt(i)=simplify (cos(t)*ug0+lucos_t0*cos(t)
37         +lusin_t0*sin(t)-ugt(i));
38     yt(i)=simplify (sin(t)*ug0+lucos_t0*sin(t)-
39         lusin_t0*cos(t));
40     xt_cur=xt_cur+xt(i)*h^i; yt_cur=yt_cur+yt(i)*h^i;
41 end;
42 xh_cur=subs(xt_cur,t,2*pi);
43 for k=1:NL
44     xh_cur=xh_cur +
45         subs( diff ( xt_cur,k,t),t,2*pi)*sT_h_cur^k
46         /factorial(k);
47 end;
48 for k=1:NL
49     xh(k,1)=subs ( diff ( xh_cur,k,h)/factorial(k),h,0);
50 end;

```

```

44   xh_temp=xh; T_cur=0; T(1,1)=0*x;
45   for k=2:NL
46       T(k-1,1)=solve (xh_temp(k,1),sT_h(k-1,1));
47       T_cur=T_cur + T(k-1,1)*h^(k-1);
48       xh_temp=subs(xh_temp,sT_h(k-1,1),T(k-1,1));
49   end;
50
51   yh_cur=subs(yt_cur,t,2*pi);
52   for k=1:NL
53       yh_cur=yh_cur +
54           subs(diff (yt_cur,k,t),t,2*pi)*T_cur^k
55           /factorial(k);
56   end;
57   for k=1:NL
58       yh(k,1)=subs (diff (yh_cur,k,h)/factorial(k),h,0);
59   end;
60
61   for k=1:N
62       L(k)=factor (yh(2*k+1))
63   end;

```

Применение функции Ляпунова на последнем шаге вычисления ляпуновской величины.

Пусть известны приближения решения

$$(x(t, h) = x_{h^{2m}}(t, h) + o(h^{2m}), y(t, h) = y_{h^{2m}}(t, h) + o(h^{2m}))$$

и времени пересечения $T(h) = 2\pi + \Delta T_{2m}(h) + o(h^{2m})$ с точностью до $o(h^{2m})$. Тогда в случае

$$\tilde{y}_2 = \dots = \tilde{y}_{2m} = 0 \quad (25)$$

для определения качественного поведения траекторий в окрестности нуля рассмотрим функцию Ляпунова и ее производную в силу системы (6)

$$V(x, y) = \frac{(x^2 + y^2)}{2}, \quad \dot{V}(x, y) = xf(x, y) + yg(x, y).$$

Введем обозначение

$$L(h) = \int_0^{T(h)} \dot{V}(x(t, h), y(t, h)) dt.$$

Тогда выполнено следующее соотношение:

Лемма 2

$$L(h) = \int_0^{2\pi + \Delta T_{2m}(h)} \left[x_{h^{2m}}(t, h) f(x_{h^{2m}}(t, h), y_{h^{2m}}(t, h)) + \right. \\ \left. + y_{h^{2m}}(t, h) g(x_{h^{2m}}(t, h), y_{h^{2m}}(t, h)) \right] dt + o(h^{2m+2}). \quad (26)$$

Подставляя в выражение (26) для $L(h)$ найденные в виде ряда (18) и (17) по степеням h приближения решения $(x_{h^{2m}}(t, h), y_{h^{2m}}(t, h))$ и времени пересечения $T_{2m}(h)$ соответственно, интегрируя и собирая коэффициенты при одинаковых степенях h , получим

$$L(h) = \sum_{k=3}^{2m+2} \tilde{L}_k h^k + o(h^{2m+2}).$$

Здесь, согласно (25), получим $\tilde{L}_{3, \dots, 2m+1} = 0$ и $\tilde{L}_{2m+2} = L_m$.

4. Малые предельные циклы.

Если $L_{1, \dots, n-1} = 0$ и $L_n \neq 0$, тогда, следуя методу Баутина [1, 11], можно в общем случае построить n «малых» предельных циклов с помощью малых возмущений коэффициентов системы (см., например [15]).

Так, если $L_1 = 0$ и $L_2 > 0$, можно, слабо возмущая коэффициенты системы, добиться, чтобы в возмущенной системе выполнялись неравенства

$$L_1 < 0, \quad L_2 > 0.$$

Тогда для достаточно малых начальных данных $h = r_0^I$ траектории возмущенной системы будут закручиваться вокруг стационарной точки, а для некоторых начальных данных $h = r_0^{II}$ ($r_0^{II} \gg r_0^I$) траектории системы будут раскручиваться. Таким образом, для описанного возмущения получается «малый» неустойчивый предельный цикл (Рис. 2) вокруг нулевого состояния равновесия.

Аналогичным образом, возмущая несколько первых ляпуновских величин, в возмущенной системе можно получить несколько «малых» предельных циклов.

Так, для квадратичной системы эта техника позволяет построить 3 «малых» предельных цикла, если коэффициенты системы

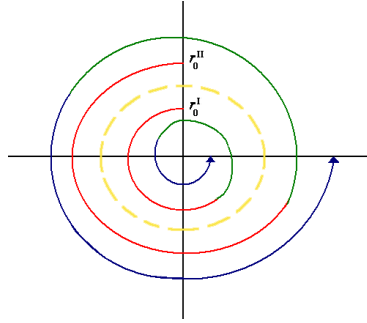


Рис. 2: . Построение «малого» предельного цикла.

подобраны таким образом, что $L_{1,2} = 0$ и $L_3 \neq 0$ (заметим, что если в квадратичной системе $L_{1,2,3} = 0$, то $L_{4,5,\dots} = 0$).

Дальнейшее применение глобального анализа позволяет проводить анализ областей параметров, соответствующих сосуществованию «малых» и «больших» предельных циклов (см., например, [28–38]).

В общем случае метод определения и возмущения ляпуновских величин позволяет получать для различных систем оценки снизу возможного числа предельных циклов в 16-й проблеме Гильберта (см., например, [15]).

5. Примеры.

Уравнение Дуффинга.

Запишем уравнение Дуффинга $\ddot{x} + x + x^3 = 0$ в виде системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y, \\ \dot{y} &= x + x^3. \end{aligned} \tag{27}$$

Тогда для решений системы $(x(t), y(t))$ с начальными данными $x_0 = 0, y_0 = h$ имеем

$$y(t)^2 + x(t)^2 + \frac{1}{2}x(t)^4 = h^2, \tag{28}$$

и, следовательно, траектории системы являются замкнутыми и периодическими. Отсюда в квадранте $(x < 0 < y)$ получим

$$x(t) = -\sqrt{-1 + \sqrt{1 + 2h^2 - 2y(t)^2}},$$

и из второго уравнения системы (27) следует

$$\frac{dt}{dy} = \frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{1}{-\sqrt{-1 + \sqrt{1+2h^2-2y^2}} \sqrt{1+2h^2-2y^2}}.$$

Тогда, рассматривая четверть оборота траектории до пересечения решения с полуосью $x < 0, y = 0$, для полного времени оборота (периода) траектории $T(h)$ получим

$$T(h) = 4 \int_h^0 \frac{dy}{-\sqrt{-1 + \sqrt{1+2h^2-2y^2}} \sqrt{1+2h^2-2y^2}}.$$

Чтобы интервал интегрирования не зависел от h , сделаем замену

$$y = h \cos(z) \Rightarrow z = \arccos \frac{y}{h}, \quad dy = -h \sin(z) dz$$

$$y = h \Rightarrow z = 0, \quad y = 0 \Rightarrow z = \frac{\pi}{2}$$

и получим

$$T(h) = 4 \int_0^{\pi/2} \frac{h \sin(z) dz}{\sqrt{-1 + \sqrt{1+2h^2 \sin^2 z}} \sqrt{1+2h^2 \sin^2 z}}.$$

Здесь, раскладывая функцию $T(h)$ в сумму по степеням h

$$T(h) = 2\pi + \tilde{T}_1 h + \tilde{T}_2 h^2 + \tilde{T}_3 h^3 + \tilde{T}_4 h^4 + \tilde{T}_5 h^5 + \tilde{T}_6 h^6 + \dots$$

можно аналитически получить значения временных констант

$$\tilde{T}_1 = 0, \quad \tilde{T}_2 = -\frac{3\pi}{4}, \quad \tilde{T}_3 = 0, \quad \tilde{T}_4 = \frac{105\pi}{128}, \quad \tilde{T}_5 = 0, \quad \tilde{T}_6 = \frac{1155\pi}{1024}, \dots$$

Для разложения решения системы (27) по степеням h

$$x(t, h) = \tilde{x}_{h^1}(t)h + \tilde{x}_{h^2}(t)h^2 + \tilde{x}_{h^3}(t)h^3 + \tilde{x}_{h^4}(t)h^4 + \dots$$

$$y(t, h) = \tilde{y}_{h^1}(t)h + \tilde{y}_{h^2}(t)h^2 + \tilde{y}_{h^3}(t)h^3 + \tilde{y}_{h^4}(t)h^4 + \dots$$

получим

$$\tilde{x}_{h^1}(t) = -\sin(t), \quad \tilde{y}_{h^1}(t) = \cos(t); \quad \tilde{x}_{h^2}(t) = \tilde{y}_{h^2}(t) = 0;$$

$$\begin{aligned}\tilde{x}_{h^3}(t) &= \frac{1}{8} \cos(t)^2 \sin(t) - \frac{3}{8} t \cos(t) + \frac{1}{4} \sin(t), \\ \tilde{y}_{h^3}(t) &= -\frac{3}{8} t \sin(t) + \frac{3}{8} \cos(t) - \frac{3}{8} \cos(t)^3, \\ \tilde{x}_{h^4}(t) &= \tilde{y}_{h^4}(t) = 0.\end{aligned}$$

Таким образом, периодическое решение здесь приближается отрезком ряда по степеням начального данного с неперiodическими коэффициентами. При этом, все ляпуновские величины системы равны нулю

$$L_1 = L_2 = \dots = 0,$$

что соответствует условию (28) замкнутости траекторий.

Пример реализации в MatLab вычисления ляпуновских величин и временных констант для уравнения Дуффинга.

```

1 % Öðááíáíèà Äóððèíàà
2 %\ddot{x} + x + x^3 = 0
3 fxy=0; gxy=x^3;
4 [L_kl,T,xt,yt] = fLQ_kl(fxy,gxy,3)
5 L_polar = fLQ_polar(fxy,gxy,3)
6 L_poincare = fLQ_poincare(fxy,gxy,3)
7
8 syms z h
9 xz=-sqrt(-1+sqrt(1+2*h^2*sin(z)^2))
10 Th = 4*int(-h*sin(z)/(xz*(1+xz^2)),z,0,pi/2);
11 taylor(Th,h,7)

```

Выражения для Ляпуновских величин в общем виде.

Рассмотрим полную двумерную систему с разложением правых частей до пятого порядка:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + f_{20}x^2 + f_{11}xy + f_{02}y^2 + f_{30}x^3 + f_{21}x^2y + f_{12}xy^2 + f_{03}y^3 + \\ &\quad + f_{40}x^4 + f_{31}x^3y + f_{22}x^2y^2 + f_{13}xy^3 + f_{04}y^4 + f_{50}x^5 + f_{41}x^4y + \\ &\quad + f_{32}x^3y^2 + f_{23}x^2y^3 + f_{14}xy^4 + f_{05}y^5 + o(|x| + |y|)^5, \\ \dot{y} &= x + g_{20}x^2 + g_{11}xy + g_{02}y^2 + g_{30}x^3 + g_{21}x^2y + g_{12}xy^2 + g_{03}y^3 + \\ &\quad + g_{40}x^4 + g_{31}x^3y + g_{22}x^2y^2 + g_{13}xy^3 + g_{04}y^4 + g_{50}x^5 + g_{41}x^4y + \\ &\quad + g_{32}x^3y^2 + g_{23}x^2y^3 + g_{14}xy^4 + g_{05}y^5 + o(|x| + |y|)^5.\end{aligned}\tag{29}$$

Для первой ляпуновской величины имеем [1]

$$\begin{aligned}L_1 &= \frac{\pi}{4}(g_{21} + f_{12} + 3f_{30} + 3g_{03} + f_{20}f_{11} + f_{02}f_{11} - \\ &\quad - g_{11}g_{20} + 2g_{02}f_{02} - 2f_{20}g_{20} - g_{02}g_{11}).\end{aligned}$$

Для вычисления второй ляпуновской величины найдем коэффициенты \tilde{T}_2 и \tilde{T}_3 разложения невязки времени пересечения:

$$\begin{aligned}\tilde{T}_2 &= \frac{\pi}{12}(-9g_{30} + 4f_{20}^2 + 9f_{03} - 3g_{12} + 10g_{20}^2 + 10f_{02}^2 + 4g_{02}^2 + \\ &+ g_{11}^2 + f_{11}^2 + 3f_{21} - 5f_{20}g_{11} - f_{11}g_{20} - 5f_{11}g_{02} + 10g_{02}g_{20} - \\ &- f_{02}g_{11} + 10f_{20}f_{02}), \\ \tilde{T}_3 &= -\frac{\pi}{18}(2f_{20} + f_{02} + g_{11})(-9g_{30} + 4f_{20}^2 + 9f_{03} - 3g_{12} + 10g_{20}^2 + \\ &+ 10f_{02}^2 + 4g_{02}^2 + g_{11}^2 + f_{11}^2 + 3f_{21} - 5f_{20}g_{11} - f_{11}g_{20} - 5f_{11}g_{02} + \\ &+ 10g_{02}g_{20} - f_{02}g_{11} + 10f_{20}f_{02}).\end{aligned}$$

Выберем коэффициент g_{03} так, чтобы $L_1 = 0$,

$$g_{03} = -\frac{1}{3}(g_{21} + f_{12} + 3f_{30} + f_{20}f_{11} + f_{02}f_{11} - g_{11}g_{20} + 2g_{02}f_{02} - 2f_{20}g_{20} - g_{02}g_{11})$$

и получим выражение для второй ляпуновской величины [2]:

$$\begin{aligned}L_2 &= -\frac{\pi}{72}(-66f_{20}g_{04} - 3f_{11}g_{30}f_{20} - 24g_{20}g_{02}g_{21} + 12f_{30}g_{11}f_{02} + \\ &4f_{11}f_{20}^2g_{11} - 12f_{11}f_{21}f_{20} + 2g_{20}g_{11}^3 - 9g_{11}g_{02}g_{12} - 12f_{20}f_{11}f_{03} - \\ &12g_{11}g_{02}f_{03} + 3g_{20}f_{12}f_{11} + 9g_{21}g_{30} - 6f_{02}f_{11}g_{12} + 9g_{20}g_{11}g_{02}^2 + \\ &30f_{20}g_{02}g_{12} + 30g_{02}f_{21}f_{20} - 60g_{04}f_{02} + g_{11}^2f_{11}f_{20} - 5f_{11}f_{20}^3 - 21f_{20}f_{13} - \\ &3f_{11}^3f_{20} - 9g_{02}g_{21}f_{11} + 7g_{11}g_{21}f_{02} - 5f_{11}g_{11}f_{02}^2 + 5f_{02}^2f_{11}f_{20} - 3g_{11}g_{20}f_{21} + \\ &6g_{02}f_{20}f_{11}^2 + 9g_{21}f_{03} - 3f_{30}f_{11}^2 + 15f_{11}f_{40} - 21g_{11}g_{30}g_{02} - 6g_{11}f_{03}f_{11} + \\ &f_{11}f_{02}g_{11}^2 - 18g_{20}f_{03}f_{20} - 42g_{20}g_{02}f_{30} - 6g_{11}g_{12}g_{20} - 30f_{02}^2g_{20}f_{20} + \\ &3f_{11}^2g_{02}f_{02} + 60f_{40}g_{20} + 9g_{11}g_{40} + 24f_{20}g_{20}f_{21} - 9g_{11}g_{20}f_{03} - 10g_{11}f_{20}^2g_{02} + \\ &18g_{02}g_{12}f_{02} - 6g_{11}f_{11}g_{30} - 24f_{20}f_{03}g_{02} - 30f_{03}f_{02}g_{02} - 24g_{11}g_{20}g_{30} - \\ &12f_{11}f_{30}g_{02} - 3g_{12}f_{11}f_{20} + f_{12}g_{11}^2 - 9f_{21}f_{30} + 27f_{30}g_{30} + 3f_{30}g_{11}^2 + \\ &15f_{30}g_{02}^2 - 9f_{02}f_{31} - 28g_{20}f_{02}f_{20}^2 - 2g_{11}^2g_{21} - 3f_{22}f_{11} - 14f_{12}f_{20}^2 - \\ &6f_{12}g_{12} + 27g_{13}g_{02} - 3f_{02}f_{11}^3 + 7f_{20}g_{21}g_{11} + 3g_{20}^2f_{11}f_{20} - 10g_{02}g_{11}^2f_{20} - \\ &10f_{02}f_{12}f_{20} - 12g_{20}f_{30}f_{11} + 6f_{02}f_{21}g_{20} + 18f_{02}f_{11}g_{02}^2 + 3f_{12}g_{02}f_{11} + \\ &6g_{20}g_{02}f_{12} + 18g_{02}^2f_{12} + 9g_{13}g_{20} - 3f_{12}f_{11}^2 - 45g_{20}^2f_{30} - 15f_{13}f_{02} + \\ &30f_{20}g_{20}^3 - 18g_{02}f_{04} + 18f_{20}g_{40} - 21g_{20}f_{20}^2g_{11} + 2g_{02}g_{11}^3 + 3f_{02}g_{20}f_{11}^2 + \\ &20f_{02}f_{20}^2g_{02} - 9g_{02}^2g_{21} - 9g_{21}g_{20}f_{11} - 9f_{04}f_{11} + 6f_{22}g_{20} + 45f_{30}f_{02}^2 + \\ &15g_{11}g_{20}^3 - 15g_{11}g_{04} + 12f_{02}g_{02}f_{21} - 5f_{12}g_{11}f_{20} + 18g_{12}g_{20}f_{20} - \\ &5f_{12}g_{11}f_{02} + 20f_{02}g_{21}f_{20} + 21g_{02}g_{31} - 30g_{20}g_{02}^2f_{20} + 6g_{20}g_{12}f_{02} + \\ &12f_{22}g_{02} + 3f_{21}g_{21} + 18f_{20}^3g_{02} + 24g_{11}g_{20}^2g_{02} + 18f_{20}g_{02}g_{20}^2 + 6f_{11}g_{31} - \\ &6g_{22}f_{02} + 15g_{31}g_{20} + 3g_{22}g_{11} - 12g_{22}f_{20} - 9f_{30}g_{12} - 18f_{20}g_{02}^3 -\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 24f_{20}g_{02}g_{30} + 15f_{20}f_{11}g_{02}^2 - 7g_{20}f_{02}g_{11}^2 + 6g_{20}f_{02}f_{11}g_{02} - 6g_{11}f_{13} - \\
& 28f_{02}g_{11}g_{20}f_{20} - 12g_{11}f_{20}g_{02}f_{02} + 9g_{02}g_{11}f_{11}g_{20} - 9f_{02}f_{21}f_{11} - \\
& f_{11}g_{11}f_{02}f_{20} - 15f_{30}f_{20}^2 + 10f_{02}^2f_{20}g_{02} - 8g_{11}^2f_{02}g_{02} + 42f_{20}f_{30}f_{02} - \\
& 15g_{11}g_{20}f_{02}^2 + 6f_{20}g_{20}f_{11}g_{02} - 6f_{21}f_{12} + 6g_{20}f_{11}^2f_{20} + 66f_{40}g_{02} + \\
& 27f_{30}f_{03} - 45g_{05} - 9g_{23} + 15g_{21}f_{02}^2 - 27f_{20}f_{31} - 9g_{41} + 3g_{21}g_{12} + \\
& 9g_{11}g_{20}^2f_{11} - 15f_{11}f_{02}f_{03} - 45f_{50} + 12f_{30}g_{11}f_{20} + 10g_{20}f_{20}^3 - 48f_{20}g_{20}g_{30} - \\
& 10g_{02}f_{02}^2g_{11} - 9g_{11}^2g_{20}f_{20} + 13g_{21}f_{20}^2 - 9f_{14} - 9f_{32} - 15g_{21}g_{20}^2.
\end{aligned}$$

Для вычисления L_3 и L_4 в общем виде необходимо рассматривать разложения правых частей системы до 7-го и 9-го порядков, соответственно. Выражение для L_3 занимает более 4 страниц (21617 символов) и приведено в [4, 6, 7].

Уравнение Лъенара.

Рассмотрим правую часть в системе (2) специального вида

$$\begin{aligned}
f_{10} &= 0, \quad f_{01} = -1, \quad f(x, y) \equiv 0, \\
g_{01} &= 0, \quad g(x, y) = g_{x1}(x)y + g_{x0}(x),
\end{aligned}$$

где

$$g_{x1}(x) = g_{11}x + g_{21}x^2 + \dots, \quad g_{x0}(x) = g_{20}x^2 + g_{30}x^3 + \dots$$

Тогда мы получим так называемую систему Лъенара (которая соответствует широко известному уравнению Лъенара) в общем виде

$$\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = g_{10}x + g_{x1}(x)y + g_{x0}(x). \quad (30)$$

Здесь, для того чтобы матрица первого приближения в нуле имела два чисто мнимых собственных числа, необходимо выполнение условия $g_{10} > 0$.

Так как рассмотренные выше методы вычисления ляпуновских величин приведены для случая $g_{10} = 1$, то для их использования в системе необходимо сделать замену

$$t \rightarrow \sqrt{\frac{1}{g_{10}}}t, \quad x \rightarrow \sqrt{\frac{1}{g_{10}}}x,$$

тогда после замены коэффициент $g_{10} \rightarrow 1$. Отметим, что эта замена не меняет y , так как

$$y = -\frac{dx}{dt} \rightarrow -\frac{\sqrt{\frac{1}{g_{10}}}dx}{\sqrt{\frac{1}{g_{10}}}dt} = y.$$

Следовательно, не меняется разложение (8), а значит, выражения для ляпуновских величин совпадают в старых и новых переменных.

Ниже, в соответствии с [29, 39, 40], приведены символьные выражения ляпуновских величин $L_{i=1,\dots,4}$ для общего вида системы Лъенара.

Для первой ляпуновской величины имеем

$$L_1 = \frac{\pi}{4 (g_{10})^{5/2}} (g_{21} g_{10} - g_{11} g_{20}).$$

Если $g_{21} = \frac{g_{11} g_{20}}{g_{10}}$, то $L_1 = 0$ и

$$L_2 = \frac{-\pi}{24 (g_{10})^{9/2}} (3 g_{11} g_{10} g_{40} - 3 g_{41} g_{10}^2 + 5 g_{20} g_{10} g_{31} - 5 g_{30} g_{11} g_{20}).$$

Если $g_{41} = \frac{3 g_{11} g_{10} g_{40} + 5 g_{20} g_{10} g_{31} - 5 g_{30} g_{11} g_{20}}{3 g_{10}^2}$, то получим $L_2 = 0$ и

$$L_3 = \frac{-\pi}{576 (g_{10})^{15/2}} (63 g_{40} g_{10}^3 g_{31} - 70 g_{20}^3 g_{10} g_{31} - 105 g_{50} g_{10}^2 g_{11} g_{20} + 105 g_{20} g_{10}^3 g_{51} - 45 g_{61} g_{10}^4 - 105 g_{30} g_{10}^2 g_{20} g_{31} - 63 g_{30} g_{10}^2 g_{11} g_{40} + 105 g_{30}^2 g_{10} g_{11} g_{20} + 70 g_{20}^3 g_{30} g_{11} + 45 g_{11} g_{10}^3 g_{60}).$$

Пример реализации в MatLab вычисления двух первых ляпуновских величин для системы Лъенара.

```

1 clear all
2 syms x y 'real'
3
4 NS = 5; %ñòàíáíú óðàâíáíèÿ Ëüâíàððà
5 %syms g11 g21 g31 g41 g51 g61 g20 g30 g40 g50 g60 g70
6 'real'
7 %gxy=
8 %=(g11*x+g21*x^2+g31*x^3+g41*x^4)*y+
9 g20*x^2+g30*x^3+g40*x^4+g50*x^5
10 fxy=0; gxy=0;
11 for ix=1:NS-1
12     gxy=gxy+sym(['g' ,int2str (ix, '1' ], 'real' )]*x^ix*y;
13     %gi1*x^i*y
14     gxy=gxy+sym(['g' ,int2str (ix+1), '0' ], 'real' )]*x^(ix+1);
15     %gi0*x^i
16 end;
```

```

14 L_polar=fLQ_polar(fxy,gxy,2);
15 L1_polar= factor (L_polar(1))
16 g21=solve (L1_polar, 'g21' )
17 L2_polar= factor ( subs(L_polar(2), 'g21' ,g21))
18
19 L_poincare = fLQ_poincare(fxy,gxy,2);
20 L1_poincare= factor (L_poincare(1))
21 g21=factor ( solve (L1_poincare, 'g21' ))
22 L2_poincare= factor ( subs(L_poincare(2), 'g21' ,g21))
23
24 [L_kl,T,xt,yt] = fLQ_kl(fxy,gxy,2);
25 L1_kl= factor (L_kl(1))
26 g21=solve (L1_kl, 'g21' )
27 L2_kl= factor ( subs(L_kl(2), 'g21' ,g21))

```

Полученные здесь символьные выражения могут быть оформлены в виде отдельных функций для дальнейшего использования

Функция первой ляпуновской величины для системы Льенара.

```

1 % dx = -y
2 % dy = gx1(x)y+gx0(x)
3 % Цããññü gx0(x) = x + (÷ëäíû áíëää äûñîëîäî ïîðüëëä)
4 function L1 = fLs_L1_FxGx(gx1,gx0)
5     g20 = subs(diff (gx0, 'x' ,2)/2,x,0);
6     g11 = subs(diff (gx1(x), 'x' ,1),x,0);
7     g21 = subs(diff (gx1(x), 'x' ,2)/2,x,0);
8     %lãðãäÿ Èÿîíîññëäÿ äãëë÷ëä
9     L1 = -1/4*pi*(g20*g11-g21);

```

Литература

1. *Баутин Н.Н.* П ведение динамических систем вблизи границ бласти уст йчив стию Л.: ОГИЗ: Г стехиздат, 1949.
2. *Серебрякова Н.Н.* О п ведении динамическ й системы с дн й степенью св б ды вблизи тех т чек границы бласти уст йчив сти, где без пасная граница перех дит в пасную. // *Известия АН СССР. ОТН Механика и машиностроение*, **2**, 1959, pp. 178–182.
3. *Щуко С.Д.* Вычисление ляпун вских величин ан ЭВЦМ. // *Труды Горьковского инст. инж. водного транспорта*, **94**, 1968, стр. 97–109.
4. *Kuznetsov N.V. and Leonov G.A.* Computation of Lyapunov quantities. *6th EUROMECH Nonlinear Dynamics Conference* (<http://lib.physcon.ru/?item=1802>), 2008.

5. *Kuznetsov N.V. and Leonov G.A.* Limit cycles and strange behavior of trajectories in two dimension quadratic systems. // *Journal of Vibroengineering*, Vol. 10, Iss. 4, 2008, pp. 460–467.
6. *Leonov G.A., Kuznetsov, N.V. and Kudryashova E.V.* Limit cycles of two dimensional systems. Calculations, proofs, experiments. // *Vestnik St.Petersburg University. Mathematics*, **41**(3), 2008, pp. 216–250.
7. *Kuznetsov N.V.* Stability and Oscillations of Dynamical Systems: Theory and Applications. Jyväskylä University Printing House, Jyväskylä, 2008.
8. *Poincare H.* Memoire sur les courbes definiées par lesequations diffeentielles. // *J. de. Mathematiques Pures et Appliquees*, №4, Vol. 1, 1885, pp. 167–244.
9. *Ляпунов А.М.* Общая задача б уст йчив сти движения. Харьк в, 1892.
10. *Leonov G.A. and Kuznetsov N.V.* Time-Varying Linearization and Perron effects. // *International journal of bifurcation and chaos* Vol. 17, issue 4, 2007, pp. 1–29.
11. *Баутин Н.Н.* О числе предельных цикл в, р ждающихся при изменении к эффициент в из с ст яний равн весия типа Ф кус или центр. // *Мат. Сб рник (Н.С.)*, 30(72), вып. 1, 1952, стр. 181–196. [Transl. into English: *AMS Transl.*, (1)5, 1962, pp. 396–413.]
12. *Hauser H., Risler J.-J. and Teissier B.* The reduced Bautin index of planar vector fields. // *Duke Math. J.* 100, 1999, pp. 425–445.
13. *Lloyd N.G.* Limit cycles of polynomial systems - some recent developments. In *New Direction in Dynamical Systems*. Cambridge University Press, 1988, pp. 182–234.
14. *Li J.* Hilbert's 16th problem and bifurcation of planar polynomial vector fields. // *Int. J. Bifurcation Chaos*, 13, 2003, pp. 47–106.
15. *Lynch S.* Symbolic computation of Lyapunov quantities and the second part of Hilbert's sixteenth problem. Chapter in the book *Differential Equations with Symbolic Computations*, 2005, pp. 1-26.
16. *Варин В.П.* От бражение п след вания нек т рых п лин миальных систем дифференциальных уравнений. // *Матем. Сб рник*, 195(7), 2004, стр. 3–20.

17. Romanovski V.G., Jarrah A.S., Laubenbacher R. The cyclicity problem for two-dimensional polynomial systems. // *Differential Equations and Control Processes*, 2, 2008.
18. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин, С.Э. Теория колебаний, М.: Физматгиз, 1959.
19. Chavarriga J., Grau M. Some open problems related to 16th Hilbert problem. // *Sci. Ser. A Math. Sci. N.S.*, 9, 2003, pp. 1–26.
20. Dumortier F., Llibre J. and Artes J. Qualitative Theory of Planar Differential Systems. Berlin: Springer, 2006.
21. Christopher C. and Li Ch. Limit cycles of differential equations. Advanced Courses in Mathematics. CRM Barcelona. Basel: Birkhauser Verlag, 2007.
22. Gine J. On some problems in planar differential systems and Hilbert's 16th problem. // *Chaos, Solutions and Fractals*, Vol. 31, 2007, pp. 1118–1134.
23. Yu P., Chen G. Computation of focus values with applications. // *Nonlinear Dynamics*, 51(3), 2008, pp. 409–427.
24. Yu P. Computation of normal forms via a perturbation technique. // *J. Sound Vibr.*, 211, 1998, pp. 19–38.
25. Sabatini M. & Chavarriga J. A survey of isochronous centers. // *Qualitative Theory of Dynamical Systems*, 1, 1999, pp. 1–70.
26. Gasull A., Guillamon A. and Manosa V. An explicit expression of the first Liapunov and period constants with applications, *J. Math. Anal. Appl.*, 211, 1997, pp. 190–212.
27. Frommer M. Über das Auftreten von Wirbeln und Strudeln (geschlossener und spiralförmiger Integralkurven) in der Umgebung Rationaler Unbestimmtheitsstellen. // *Math. Annalen* 109, 1934, pp. 395–424.
28. Леонов Г.А. Предельные циклы уравнения Лъенара с разрывными коэффициентами, // Доклады Академии наук, сер. Механика, 2009, т. 426, №1, с. 47–50
29. Leonov G.A. and Kuznetsova O.A. Lyapunov quantities and limit cycles of two-dimensional dynamical systems. Analytical methods and symbolic computation. // *Regular and chaotic dynamics*, 2010. [in print]

30. *Леонов Г.А.* Эффективные методы поиска периодических колебаний в динамических системах, // Прикладная математика и механика, Т м 74, Вып. 1, 2010, стр. 37-73
31. *Leonov G.A.* Attractors, limit cycles and homoclinic orbits of low dimensional quadratic systems. analytical methods, // Canadian Applied Math Quarterly, Volume 17, №1, 2010, 121-159
32. *Леонов Г.А.* Четыре предельных цикла в квадратичных двумерных системах с в змущенным слабым ф кус м перв г п рядка, // Д -клады академии наук, сер. Математика, 2010, т м 431, № 4, с. 447-449
33. *Леонов Г.А.* Предельные циклы в квадратичных системах с слабым ф кус м перв г п рядка, // Дклады академии наук, сер. Математика, 2010, т м 435, № 4, с. 1-4
34. *Леонов Г.А.* Не бх димые и д стат чные усл вия граниченн сти решений двумерных квадратичных систем в п л жительн инвариантн й п лупл ск сти, // Дклады академии наук, сер. Математика, 2010, т м 430, № 2, стр. 157-159
35. *Леонов Г.А.* Синтез двумерных квадратичных систем с предельным цикл м, имеющим заданные начальные усл вия, // Дклады академии наук, сер. Математика, 2010, т м 431, № 3, стр. 316-318
36. *Леонов Г.А., Кузнецов Н.В., Кудряшова Е.В.* Прям й мет д вычисления ляпун вских величин двумерных динамических систем, // Труды Института Математики и Механики УрО РАН, Т м 16, №1, 2010, стр. 119-126
37. *Леонов Г.А., Кузнецов Н.В.* Предельные циклы квадратичных систем с в змущенным слабым ф кус м 3-г п рядка и седл вым с -ст янием равн весия на беск нечн сти, // Дклады академии наук, сер. Математика, т м 434, №1, 2010, стр. 21-24
38. *Леонов Г.А.* Критерий существ вания четырех предельных цикл в в квадратичных системах, // Прикладная математика и механика, Т. 74, N2, 2010, стр. 191-201
39. *Leonov G.A. and Kuznetsova O.A.* Evaluation of the First Five Lyapunov Exponents for the Lienard System. *Doklady Physics*, **54**(3), 2009, pp. 131–133.
40. *Кузнецова О.А.* Шестая и седьмая ляпун вские величины для системы Льенара, // Вестник Санкт-Петербургск г университета, Серия 10, №4, 2010, 25-29

Леонов Геннадий Алексеевич — декан математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета (СПбГУ), зав. каф. прикладной кибернетики, член-корр. РАН. leonov@math.spbu.ru; СПбГУ, Университетский пр., д. 28, Санкт-Петербург, 198504, РФ; р.т. +7(812)428-6944, факс +7(812)428-6944.

Gennady A. Leonov — Dean of Mathematics and Mechanics Faculty of St. Petersburg State University.

leonov@math.spbu.ru; Universitetsky pr., 28., St. Petersburg, 198504, Russia; office phone +7(812)428-6944, fax +7(812)428-6944.

Кузнецов Николай Владимирович — к.ф.-м.н., доцент; доцент кафедры прикладной кибернетики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета (СПбГУ).

kuznetsov@math.spb.ru, <http://www.math.spbu.ru/user/nk/>; СПбГУ, Университетский пр., д. 28, Санкт-Петербург, 198504, РФ; р.т. +7(812)428-6944, факс +7(812)428-6944.

Nikolay V. Kuznetsov — PhD, Associate Professor of Applied Cybernetics Department, St. Petersburg State University.

kuznetsov@math.spb.ru, <http://www.math.spbu.ru/user/nk/>; SPbGU, Universitetsky pr., 28., St. Petersburg, 198504, Russia; office phone +7(812)428-6944, fax +7(812)428-6944.

Кудряшова Елена Владимировна — к.ф.-м.н., м.н.с математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета (СПбГУ).

СПбГУ, Университетский пр., д. 28, Санкт-Петербург, 198504, РФ; р.т. +7(812)428-6944, факс +7(812)428-6944.

Elena V. Kudryashova — PhD, researcher, St. Petersburg State University.

SPbGU, Universitetsky pr., 28., St. Petersburg, 198504, Russia; office phone +7(812)428-6944, fax +7(812)428-6944.

Кузнецова Ольга Александровна — м.н.с математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета (СПбГУ).

СПбГУ, Университетский пр., д. 28, Санкт-Петербург, 198504, РФ; р.т. +7(812)428-6944, факс +7(812)428-6944.

Olga A. Kuznetsova — researcher, St. Petersburg State University.

SPbGU, Universitetsky pr., 28., St. Petersburg, 198504, Russia; office phone +7(812)428-6944, fax +7(812)428-6944.

Поддержка исследований. Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ и Санкт-Петербургского государственного университета.

Рекомендовано ЛПИ СПИИРАН, зав. лаб. Юсупов Р.М., член-корреспондент РАН.

Статья поступила в редакцию 15.02.2011.

РЕФЕРАТ

Л. Оно . . . Кузн цо Н. . Ку рьяшо . . . Кузн цо . . . **Современные методы символьных вычислений: ляпуновские величины и 16-я проблема Гильберта.**

Развитие методов в вычисления и анализа ляпуновских величин стимулировалось как чисто математическими проблемами (16-й проблемой Гильберта, задачей различения центра и ф-куса, предельным циклическими ф-куса, анализа устойчивости динамических систем), так и прикладными инженерными задачами (исследованием границ области устойчивости и возбуждения колебаний). Применение компьютерной техники и пакетов в символьных вычислениях позволило существенно продвинуться в изучении ляпуновских величин. В то время как символьные выражения для первой и второй ляпуновских величин были получены в 1940-1950-е гг., а первая программа их вычисления для ЭВМ была создана в 1968 году, выражение для третьей ляпуновской величины (в общем виде и в исходном пространстве) было впервые вычислено только в 2008 г. Это стало важным вкладом в развитие аналитических методов в вычислениях ляпуновских величин, реализации эффективных алгоритмов на их основе и применению современных методов в компьютерных вычислениях. В настоящей статье описаны различные методы вычисления ляпуновских величин, их компьютерная реализация.

SUMMARY

Leonov G.A. Ku netsov N. . Kudry shov E. . Ku netsov O.A.
Modern symbolic computation methods: Lyapunov quantities and 16th Hilbert problem.

Development of methods for computation and analysis of Lyapunov quantities was stimulated by as purely mathematical problems (the center-and-focus problem, Hilbert's sixteenth problem, and isochronous centers problem) as many applied problems (the oscillations of electronic generators and electrical machines, the dynamics of populations). Application of modern computer technologies and the symbolic computation packages allows to achieve significant progress in studying of Lyapunov quantities. While the general expressions for the first and second Lyapunov quantities were obtained in the 40–50s of last century and the first computer program for Lyapunov quantities computation was created in 1968, the third Lyapunov quantity (general form in initial space) was computed only in 2008. This begins possible by the development of analytical methods for computation Lyapunov quantities, realization of efficient algorithms based on them and the application of modern methods of computing. This article describes various methods for computing Lyapunov quantities, and their computer implementation.