

С.П. СОКОЛОВА, Р.С. ИВЛЕВ

МОДИФИЦИРОВАННАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ В КЛАССЕ «ХИЩНИК - ЖЕРТВА» ДЛЯ ЧУМНОЙ ТРИАДЫ

Соколова С.П., Ивлев Р.С. Модифицированная математическая модель в классе «хищник - жертва» для чумной триады.

Аннотация. Представлены модифицированная математическая модель в классе «хищник - жертва» для чумной триады, результаты решения задачи параметрической идентификации и моделирования процессов на популяционном уровне с использованием реальных данных, собранных в ландшафтно-экологическом районе (равнина Акдала) Прибалхашского природного очага чумы (Республика Казахстан).

Ключевые слова: чумная триада (носитель – переносчик – чумный микроб), паразито-хозяйинные отношения на популяционном уровне, интервальное расширение, оценка снизу глобального минимума.

Sokolova S.P., Ivlev R.S. Modified mathematical model in the class “predator – victim” for Plague triad.

Abstract. Modified mathematical model in the class “predator – victim” for Plague triad, the results of parametric identification solution and modeling the processes on the population level on the base real data collecting in the landscape region (Akdala Plain) Pribalkhach nature Plague hearth (Kazakhstan Republic) are offered.

Keywords: Plague triad, interval expansion and global minimum lower estimate.

1. Введение. Чума относится к особо опасным инфекциям. Природные очаги чумы существуют с древних времен и расположены в различных частях мира (Индия, Средняя Азия, Африка, Северная и Южная Америка). Пандемии чумы уносили огромное количество человеческих жизней.

За последние 150 лет вспышки чумы регулярно происходят в различных частях мира и приводят к значительным человеческим и экономическим потерям.

В Республике Казахстан и Российской Федерации располагаются обширные природные очаги чумы различных типов (песчаночьего, сусликового и т.д.). За последние 50 лет они рассматриваются как наиболее активные очаги чумы в мире. Эти очаги характеризуются различными механизмами регулирования на популяционном и биоценоотическом уровнях. Чумный эпизоотический процесс является сложной многокомпонентной динамической системой. Поведение отдельных подсистем чумной эпизоотической триады (носитель –

переносчик – чумный микроб); сложные паразито-хозяйинные отношения на популяционном уровне в чумной триаде неоднократно исследовались микробиологами, биологами, эпидемиологами и т.д. [1 – 3 и др.]. Однако, несмотря на это до сих пор отсутствуют эффективные методики оценивания состояния, как отдельных подсистем, так и чумной триады в целом.

Описание динамики популяций в традиционных типах моделей осуществляется, как правило, с помощью дискретного логистического уравнения. Однако, как правило, эколого-биологические модели с использованием дискретного логистического уравнения трудно поддаются исследованию, поскольку в нем использовано линейное приближение функции внутривидового взаимодействия. В работе [4] впервые сделана попытка вовлечь в структуру модели физиологические принципы развития и взаимодействия биологических видов переносчика и носителя. Это привело к существенному усложнению структуры модели и увеличению числа настраиваемых параметров настолько, что дальнейшее ее рассмотрение вызывает существенные затруднения, как на этапе решения задачи параметрической идентификации, так и с точки зрения исследования ее свойств и практического применения.

В этой связи уместно будет отметить, что приемлемость предложенной математической модели будет пониматься не в плане ее «истинности», а скорее в плане ее «полезности».

В отличие от вышеперечисленных работ в статье предложена модифицированная математическая модель, основанная на нетрадиционных моделях межвидового взаимодействия «паразит – хозяин» и «хищник-жертва», предложенных в [5].

Ниже представлено решение задачи структурной и параметрической идентификации математической модели чумной триады, исследования ее динамических свойств и моделирования процесса с использованием реальных данных по численностям зараженных и незараженных носителей и переносчиков.

2. Решение задач структурной и параметрической идентификации модифицированной математической модели чумной триады. Ниже используются следующие обозначения: номер сезона (дискретное время) t , $t = 1, 2, \dots, N$; общая численность популяции грызунов (хозяина) в сезон t – x_t ; общая численность популяции блох (паразитов) в сезон t – x_y ; численность зараженных

грызунов в сезон $t - x_t^{(i)}$; численность зараженных блох в сезон $t - y_t^{(i)}$, численность не зараженных грызунов в сезон $t - x_t^{(u)}$, численность не зараженных блох в сезон $t - y_t^{(u)}$.

При построении математической модели будут использованы:

- только однородные популяции без учета их возрастной, гипотетической и какой бы то ни было иной структурированности. Это продиктовано, в первую очередь, отсутствием численных данных, дифференцированных по половозрастному или иному признаку;
- показатели, определяющие долю зараженных носителей и переносчиков и косвенно характеризующие взаимодействие чумного микроба с носителем и переносчиком в чумной триаде. Как правило, в течение нескольких дней после инфицирования носитель либо погибает, либо его организм вырабатывает иммунитет, и он продолжает жить. При инфицировании у переносчика наблюдается ярко выраженное нарушение акта пищеварения, которое способствует смерти. Таким образом, как у носителей, так и у переносчиков после инфицирования увеличивается смертность. Следовательно, общая численность носителей и переносчиков, доживших до следующего сезона, уменьшается;
- условия того, что доля зараженных носителей пропорциональна общей численности переносчиков, так как в этом случае носители чаще подвергаются укусам переносчиков, что способствует распространению инфекции.

В основе структуры модели, подлежащей построению, лежит модель «паразит-хозяин» общего вида [5]:

$$\begin{cases} x_{t+1} = kx_t f(x_t) g(y_t), \\ y_{t+1} = kx_t f(x_t) [1 - g(y_t)], \end{cases} \quad t = 1, 2, \dots, N, \quad (1)$$

где k – коэффициент, характеризующий скорость размножения популяции хозяина (грызуна) в отсутствие паразита (блох) и внутривидовой борьбы, при этом $k > 1$. Функция $f(x_t)$ характеризует эффективность внутривидового взаимодействия популяции грызуна. Она удовлетворяет условиям: функция $f: \mathbf{R}^+ \rightarrow (0; \infty)$ является монотонно убывающей, $f(0) = 1$, а уравнение $kf(x_t)$ имеет единственный положительный корень x_t^* . Функция $g(y_t)$

характеризует эффективность межвидового взаимодействия популяций носителей и переносчиков и удовлетворяет условиям: функция $g: \mathbf{R}^+ \rightarrow (0; \infty)$ – монотонно убывающая и $g(0) = 1$. Как правило, эти функции выбираются из класса дробно-рациональных, т.е.

$$f(x_t) = \frac{1}{1 + \beta x_t}, \quad g(y_t) = \frac{1}{1 + \gamma y_t}, \quad (2)$$

где $\beta > 0$ и $\gamma > 0$ – постоянные коэффициенты, определяющие жесткость внутривидового взаимодействия и интенсивность воздействия паразита на популяцию хозяина.

Интенсивность воздействия чумного микроба на популяции, соответственно, носителей и переносчиков в зависимости от численности зараженных $x_t^{(i)}$ и $y_t^{(i)}$ в сезон t отражается следующими функциями:

$$\phi_1(x_t^{(i)}) = \frac{1}{1 + ax_t^{(i)}}, \quad \phi_2(y_t^{(i)}) = \frac{1}{1 + by_t^{(i)}}, \quad (3)$$

где $a > 0$ и $b > 0$ – постоянные коэффициенты (далее, если не оговорено отдельно, будут рассматриваться функции $\phi_1(x_t^{(i)})$ и $\phi_2(y_t^{(i)})$ при $a = b = 1$). С учетом введенных функций (3) правые части соотношений (1) видоизменяются следующим образом:

$$x_{t+1} = kx_t f(x_t) g(y_t) \phi_1(x_t^{(i)}), \quad y_{t+1} = kx_t f(x_t) [1 - g(y_t)] \phi_2(y_t^{(i)}). \quad (4)$$

Выполнение третьего условия характеризуется соотношениями между зараженными и незараженными носителями и переносчиками:

$$x_{t+1}^{(i)} = c_1 \frac{y_t}{1 + x_t + y_t} x_t, \quad y_{t+1}^{(i)} = c_2 \frac{y_t}{1 + x_t + y_t} y_t, \quad (5)$$

где $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$ – коэффициенты пропорциональности.

Объединяя соотношения (1 – 5) для общей и зараженной численности носителей и переносчиков, получим модифицированную математическую модель на популяционном уровне без учета биотических и абиотических факторов:

$$\begin{cases} x_{t+1} = kx_t f(x_t) g(y_t) \phi_1(x_t^{(i)}); \\ y_{t+1} = kx_t f(x_t) [1 - g(y_t)] \phi_2(y_t^{(i)}); \\ x_{t+1}^{(i)} = c_1 \frac{y_t}{1 + x_t + y_t} x_t; \\ y_{t+1}^{(i)} = c_2 \frac{y_t}{1 + x_t + y_t} y_t. \end{cases} \quad (6)$$

Как и любой реальный природный процесс, развитие чумной триады и ее соответствующих компонент – носителей и переносчиков, подвержен различного рода биотическим и абиотическим факторам. Естественно предполагать, что на изменение численностей носителей и переносчиков активно влияют природно-климатические условия, в виде различных индикаторов, таких как температура, суммарное количество осадков, толщина снежного покрова, сила и скорость ветра и т.д.

Будем считать, что указанные факторы действуют аддитивно:

$$\begin{cases} x_{t+1} = kx_t f(x_t) g(y_t) \phi_1(x_t^{(i)}) + q\xi_1; \\ y_{t+1} = kx_t f(x_t) [1 - g(y_t)] \phi_2(y_t^{(i)}) + r\xi_2; \\ x_{t+1}^{(i)} = c_1 \frac{y_t}{1 + x_t + y_t} x_t; \\ y_{t+1}^{(i)} = c_2 \frac{y_t}{1 + x_t + y_t} y_t, \end{cases} \quad (7)$$

где ξ_1 и ξ_2 – аддитивные факторы, $q > 0$ и $r > 0$ – постоянные коэффициенты.

Введем обозначения для следующих величин: непрерывное время обозначим через t , общая численность носителя – $x(t)$, общая численность переносчика – $y(t)$, численность инфицированных носителей $x^i(t)$ и переносчиков $y^i(t)$.

Для решения задачи параметрической идентификации предложенной модифицированной математической модели (7) введем в рассмотрение вектор параметров и множество значений вектора параметров θ в рамках структуры (7):

$$\theta = (k, \beta, \gamma, q, r, c_1, c_2) \in D_\theta \subseteq \mathbf{R}^m, \text{ где } m = 7; \quad (8)$$

$$D_\theta = \{(k, \beta, \gamma, q, r, c_1, c_2) \in \mathbf{R}^m \mid k > 1, \beta, \gamma, q, r, c_1, c_2 > 0\}.$$

Определим векторы:

$$\begin{aligned} X_0 &= (x_1, x_2, \dots, x_{N-1})^T \in \mathbf{R}^{N-1}, \quad X_0^{(i)} = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_{N-1}^{(i)})^T \in \mathbf{R}^{N-1}; \\ Y_0 &= (y_1, y_2, \dots, y_{N-1})^T \in \mathbf{R}^{N-1}, \quad Y_0^{(i)} = (y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, \dots, y_{N-1}^{(i)})^T \in \mathbf{R}^{N-1}; \\ X_1 &= (x_2, x_3, \dots, x_N)^T \in \mathbf{R}^{N-1}, \quad X_1^{(i)} = (x_2^{(i)}, x_3^{(i)}, \dots, x_N^{(i)})^T \in \mathbf{R}^{N-1}; \\ Y_1 &= (y_2, y_3, \dots, y_N)^T \in \mathbf{R}^{N-1}, \quad Y_1^{(i)} = (y_2^{(i)}, y_3^{(i)}, \dots, y_N^{(i)})^T \in \mathbf{R}^{N-1}, \end{aligned} \quad (9)$$

где $N = 23$.

Введем обозначения в правых частях уравнений системы (7):

$$\begin{aligned} kx_t f(x_t) g(y_t) \phi_1(x_t^{(i)}) &= F_1(x_t, y_t, x_t^{(i)}, y_t^{(i)}, \theta); \\ kx_t f(x_t) [1 - g(y_t)] \phi_2(y_t^{(i)}) &= F_2(x_t, y_t, x_t^{(i)}, y_t^{(i)}, \theta); \\ c_1 \frac{y_t}{1 + x_t + y_t} x_t &= F_3(x_t, y_t, x_t^{(i)}, y_t^{(i)}, \theta); \\ c_2 \frac{y_t}{1 + x_t + y_t} y_t &= F_4(x_t, y_t, x_t^{(i)}, y_t^{(i)}, \theta). \end{aligned}$$

Введем символическую запись для вектора

$$\left(F_1(x_1, y_1, x_1^{(i)}, y_1^{(i)}, \theta), F_1(x_2, y_2, x_2^{(i)}, y_2^{(i)}, \theta), \dots, \right. \\ \left. F_1(x_{N-1}, y_{N-1}, x_{N-1}^{(i)}, y_{N-1}^{(i)}, \theta) \right)^T \in \mathbf{R}^{N-1}$$

как $F_1(X_0, Y_0, X_0^{(i)}, Y_0^{(i)}, \theta) \in \mathbf{R}^{N-1}$, и аналогично для векторов:

$$F_i(X_0, Y_0, X_0^{(i)}, Y_0^{(i)}, \theta) \in \mathbf{R}^{N-1}, \quad i = 2, 3, 4.$$

С учетом введенных обозначений вектор ошибки $E(\theta) \in \mathbf{R}^{4(N-1)}$ запишется в виде

$$\begin{aligned} E(\theta) &= (X_1 - F_1(X_0, Y_0, X_0^{(i)}, Y_0^{(i)}, \theta), Y_1 - F_2(X_0, Y_0, X_0^{(i)}, Y_0^{(i)}, \theta), \dots, \\ &X_1^{(i)} - F_3(X_0, Y_0, X_0^{(i)}, Y_0^{(i)}, \theta), Y_1^{(i)} - F_4(X_0, Y_0, X_0^{(i)}, Y_0^{(i)}, \theta))^T. \end{aligned}$$

Выберем критериальную функцию в виде:

$$J(\theta) = \frac{1}{2} E^T(\theta) E(\theta) \quad (10)$$

Сформулируем задачу параметрической идентификации: требуется определить оценку вектора параметров $\hat{\theta}$, доставляющий минимум критерию (10), т.е.

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} J(\theta). \quad (11)$$

Задача получения оценки вектора параметров (11) нелинейной модели (7) относится к классу задач нелинейной безусловной оптимизации, решение которой аналитическими методами может вызвать значительные затруднения на практике. Поэтому восстановление параметров модели (11) будем осуществлять численными методами.

От этих недостатков свободны методы оптимизации, основанные на использовании функций включения и специальных стратегий дробления. Несмотря на то, что подобная техника глобальной оптимизации появилась уже давно, широкому распространению ее на практике способствовало развитие интервального анализа, позволяющего быстро и легко строить функции включения. Более того, выполнение ряда других требований, предъявляемых классическими методами оптимизации к целевой функции, таких как непрерывность, липшицевость целевой функции и т.д., не обязательно для приводимого ниже метода глобальной оптимизации. Данный алгоритм использует интервальное расширение в качестве функции включения и представляет собой модификацию алгоритма Мура и Скелбоу, который подробно исследован в [8].

Пусть $\mathbf{Z} \in \mathbf{IR}^m$ – некоторый интервальный вектор такой, что

$$\mathbf{Z} = (\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_m)^T \subseteq D_{\theta},$$

где $\mathbf{IR} = \{z \in \mathbf{R} \mid \underline{z} \leq z \leq \bar{z}, \underline{z}, \bar{z} \in \mathbf{R}\}$, \mathbf{IR}^m – множество

интервальных векторов с m компонентами. Определим ширину интервального вектора как максимальную из ширин его компонент, т.е.

$$w(\mathbf{Z}) = \max \{w(\mathbf{z}_i), i = 1, \dots, m\},$$

где $w(\mathbf{z}_i)$ – ширина i -ой компоненты вектора \mathbf{Z} , $i = 1, \dots, m$, которая вычисляется как разность верхней и нижней границ интервала \mathbf{z}_i :

$$w(\mathbf{z}_i) = \bar{\mathbf{z}}_i - \underline{\mathbf{z}}_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

где $\overline{\mathbf{z}}_i$ и $\underline{\mathbf{z}}_i$ – верхняя и нижняя границы интервала \mathbf{z}_i .

Рассмотрим сужение функции (10) на \mathbf{Z}

$$J(\theta): \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{R}, \quad (12)$$

и пусть функция (12) достигает своего глобального минимума J^* . Далее, пусть $\mathbf{J}: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$ – некоторое интервальное расширение функции (12). Приведем алгоритм оптимизации, входными параметрами которого являются интервальный вектор $\mathbf{U} \in \mathbf{R}^m$ и заданная точность ε , а выходными – оценка снизу глобального минимума J^* , верхняя оценка абсолютной ошибки δ и интервальный вектор, содержащий значение аргумента, минимизирующего целевую функцию.

Алгоритм.

1. Положим $\mathbf{U} = \mathbf{Z}$.
2. Вычисляем $\mathbf{J}(\mathbf{U})$.
3. Присваиваем $u = \mathbf{J}(\mathbf{U})$.
4. Инициализируем список $L = ((\mathbf{U}, u))$.
5. Выбираем компоненту интервального вектора \mathbf{U} , имеющую наибольшую ширину, т.е. $k \in \{i: w(\mathbf{U}) = w(\mathbf{u}_i)\}$.
6. Делим пополам интервал \mathbf{u}_k и формируем два интервальных вектора \mathbf{V}_1 и \mathbf{V}_2 такие, что $\mathbf{U} = \mathbf{V}_1 \cup \mathbf{V}_2$.
7. Вычисляем $\mathbf{J}(\mathbf{V}_1)$ и $\mathbf{J}(\mathbf{V}_2)$.
8. Присваиваем $v_i = \mathbf{J}(\mathbf{V}_i)$ для $i = 1, 2$.
9. Удаляем пару (\mathbf{U}, u) из списка L .
10. Добавляем пары (\mathbf{V}_1, v_1) и (\mathbf{V}_2, v_2) в список L в порядке возрастания второго члена пары.
11. Обозначаем первый элемент списка L через (\mathbf{U}, u) , остальные – через (\mathbf{U}_j, u_j) в порядке их вхождения в список, $j = 1, \dots, \text{card}(L) - 1$.
12. Вычисляем $\mathbf{J}(\mathbf{U})$.
13. Удаляем из списка L все пары, удовлетворяющие условию $u_j > u$.

14. Если $w(\mathbf{J}(\mathbf{U})) < \varepsilon$, или $w(\mathbf{J}(\mathbf{U})) / (\overline{\mathbf{J}(\mathbf{U})} + \mathbf{J}(\mathbf{U})) < \varepsilon$, тогда переход на шаг 16.
15. Переход на шаг 5.
16. Присваиваем $\mathbf{J}^* := \mathbf{u}$ и $\delta := w(\mathbf{J}(\mathbf{U}))$.

На n -ой итерации список L , приведенного алгоритма содержит не более n пар, первую пару списка обозначим как (\mathbf{U}_n, u_n) . Будем называть эти пары парами, порожденные алгоритмом, соответственно интервальные векторы \mathbf{U}_n и интервалы $\mathbf{J}(\mathbf{U}_n)$ будем называть интервальными векторами и интервалами, порожденными алгоритмом. Пары, порожденные алгоритмом, образуют последовательность, которая при $\varepsilon \rightarrow 0$ является бесконечной. Введем для этой последовательности обозначение $((\mathbf{U}_n, u_n))_{n=1}^{\infty}$, аналогично введем последовательности $(\mathbf{J}(\mathbf{U}_n))_{n=1}^{\infty}$ и $(u_n)_{n=1}^{\infty}$.

Определение 1. Будем говорить, что последовательность алгоритмов $(\mathbf{J}(\mathbf{U}_n))_{n=1}^{\infty}$ сходится к \mathbf{J}^* , если обе числовые последовательности $(\overline{\mathbf{J}(\mathbf{U}_n)})_{n=1}^{\infty}$ и $(\underline{\mathbf{J}(\mathbf{U}_n)})_{n=1}^{\infty}$ сходятся к \mathbf{J}^* одновременно.

Следующая теорема дает условия сходимости приведенного алгоритма.

Теорема 1. Пусть $\mathbf{Z} \in \mathbf{IR}^m$ – некоторый интервальный вектор, тогда для любой функции $J(\theta): \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{R}$, имеющей интервальное расширение $\mathbf{J}: \mathbf{IR}^m \rightarrow \mathbf{IR}$, которое удовлетворяет условию

$$w(\mathbf{J}(\mathbf{U})) \rightarrow 0 \text{ при } w(\mathbf{V}) \rightarrow 0, \quad (13)$$

где $\mathbf{V} \in \mathbf{IR}^m$, глобальный минимум \mathbf{J}^* функции $J(\theta)$ существует и последовательность интервалов $(\mathbf{J}(\mathbf{U}_n))_{n=1}^{\infty}$, порожденная алгоритмом, сходится к \mathbf{J}^* , т.е. последовательность $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ сходится к \mathbf{J}^* снизу.

Доказательство. Из условия (13) теоремы вытекает, что функция $J(\theta)$ является непрерывной. Интервальный вектор $\mathbf{Z} \in \mathbf{IR}^m$ есть

односвязный компакт в \mathbf{R}^m , тогда на основании утверждения хорошо известной теоремы из анализа следует, что функция $J(\theta)$ достигает своего наименьшего значения на \mathbf{Z} .

Условия сходимости [8] выполняются, поэтому $w(\mathbf{U}_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Выполнение условия (13) теоремы, обеспечивает $w(\mathbf{J}(\mathbf{U}_n)) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Поскольку для любого n интервал $\mathbf{J}(\mathbf{U}_n)$ содержит J^* , т.е. $J^* \in \mathbf{J}(\mathbf{U}_n)$, так как $\underline{\mathbf{J}(\mathbf{U}_n)} \leq J^* \leq \overline{\mathbf{J}(\mathbf{U}_n)}$ для любого n , то $\mathbf{J}(\mathbf{U}_n) \rightarrow J^*$ и $n \rightarrow \infty$. Теорема доказана.

Заметим, что, несмотря на то, что условия сходимости алгоритма получены для непрерывной функции $J(\theta)$, приведенный алгоритм не теряет свойства сходимости и для функций, не являющихся непрерывными.

Как указывалось ранее, выходными данными алгоритма являются оценка снизу глобального минимума J^* , верхняя оценка абсолютной ошибки δ и интервальный вектор, содержащий значение аргумента, минимизирующего целевую функцию. Иными словами, точное значение глобального минимума находится в интервале $[J^*; J^* + \delta]$, а оценка вектора параметров (11) математической модели (7) удовлетворяет условию

$$\hat{\theta} \in \mathbf{U}_n. \quad (14)$$

Соотношение (14) означает, что в построенной модели (7) присутствует параметрическая неопределенность интервального типа. Таким образом, параметры $k, \beta, \gamma, q, r, c_1, c_2$ модели будут интервальными, а причиной появления параметрической неопределенности являются погрешности численного метода глобальной оптимизации и процедуры идентификации.

3. Результаты численных расчетов и моделирования. Далее представлены результаты решения задачи параметрической идентификации для нелинейной математической модели (7) на основе реальных временных рядов, полученных для ландшафтно-экологического района – равнины Акдала. В качестве возмущений ξ_1 и ξ_2 была выбрана суммарная величина осадков [3].

Применим предложенный вычислительный алгоритм решения задачи параметрической идентификации для следующих исходных данных:

$$\mathbf{Z} = ([1; 20] \quad [0.001; 15] \quad [1; 20] \quad [-0.15; 1] \quad [0.001; 3])^T$$

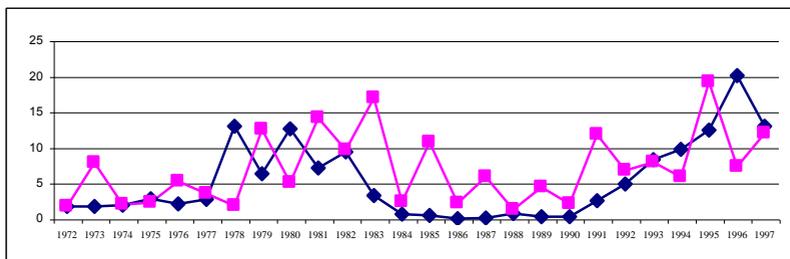
и $\varepsilon = 0.5$. После достижения относительной точности вычисления, равной 0.4101, имеем следующие значения интервальных параметров математической модели:

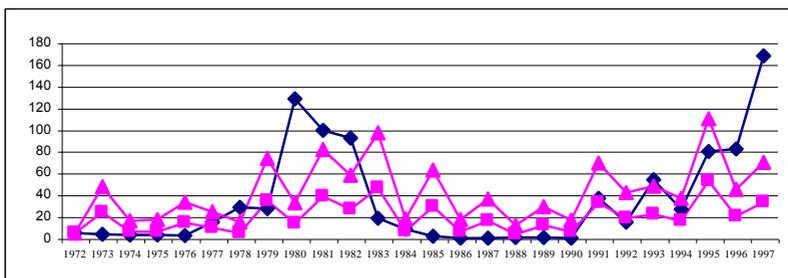
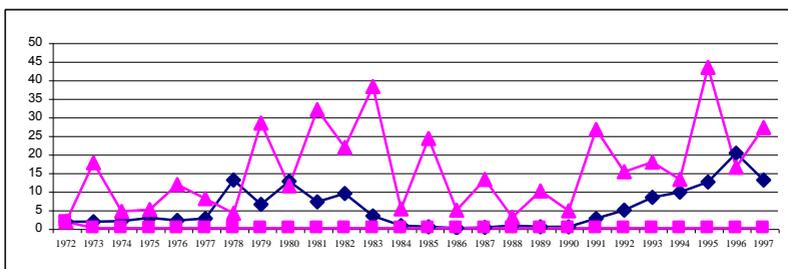
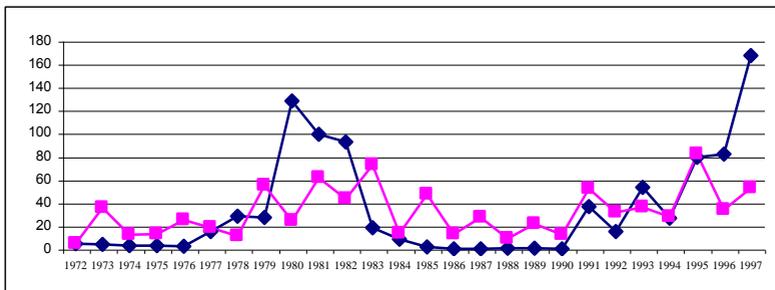
$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= [19.703125; 20.000000], \quad \boldsymbol{\beta} = [4.688187; 5.156906], \\ \boldsymbol{\gamma} &= [19.406250; 20.000000], \quad \mathbf{q} = [-0.150000; 0.425000], \\ \mathbf{r} &= [0.375875; 0.750750]. \end{aligned} \quad (15)$$

Результаты моделирования динамики изменения популяций носителя и переносчика для средних значений параметров нелинейной математической модели (7) вида:

$$\begin{aligned} \tilde{k} &= 19.8515625, \quad \tilde{\beta} = 4.9225465, \quad \tilde{\gamma} = 19.703125, \\ \tilde{q} &= 0.1375, \quad \tilde{r} = 0.5633125 \end{aligned}$$

и для интервальных значений (15), представлены на рисунках 1 – 4 соответственно:





4. Заключение. Анализируя кривые, представленные на четырех рисунках, можно сделать вывод, что предложенная математическая модель (7) со значениями параметров (15) наиболее точно соответствует реальным численным данным [3]. Это дает основание использовать данную модель для исследования динамики развития компонентов чумной триады при распространении чумы.

Литература

1. *Aikimbayev A.M., Litvak Ya.J., Shvarts A.V., Pole S.B., et al.* Instruction on Epidemiological surveillance in Mountain Plague Foci of Tien Shan and Alai, Alm-Ata, 1991, 125 pp.
2. *Aikimbayev A.M., Musagaliev Zh.S., Khamzin S.Kh.* Epidemiological Plague surveillance in the Ural-Emba and Ustuart Autonomous Foci, Almaty “Gylym”, 1994.
3. *Aikimbayev M.A., Aubakirov S.A. et al.* Central Asian desert plague focus. Alma-Ata, 1987, 206 pp.
4. *Marshall E.Clare, Frigessi Arnoldo, Stenseth Nils-Christian, Holden Marit, Ageyev Vladimir S. and Klassovskiy Nikolay L.* Plague in Kazakhstan: a Bayesian Model for the Temporal Dynamics of a Vector-Transmitted Infectious Disease. Journal of Biological Society, 2001.
5. *Rodionov A.M.* Attraction for Discrete Equations, Application to Population Dynamics //Automation and Telemechanics. 2000. №2. p.76 - 85.
6. Шарый С.П. Конечномерный интервальный анализ. Новосибирск: ИВТ СО РАН, 2010. 601 с.
7. *Sokolova S.P., Ivlev R.S.* Asymptotic stability of interval time-delay systems // Reliable Computing. 2003. Vol. 9. No. 4. P. 303–313.
8. *Ratscher H.* Inclusion Fuactions and Global Optimization. Mathematical Programming 33 (1985) pp. 300 - 317.

Соколова Светлана Павловна — д-р. техн. наук, проф.; ведущий научный сотрудник лаборатории прикладной информатики Учреждения Российской академии наук, Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН (СПИИРАН). Область научных интересов: адаптивные системы управления; интеллектуальные информационные технологии. Число научных публикаций — 142. sokolova_sv@mail.ru; 14-я линия В.О., д.39, Санкт-Петербург, 199178, РФ; р.т. +7(812)328-1919, факс +7(812)328-4450.

Sokolova Svetlana Pavlovna — Dr.Sc. (Tech.), PhD, professor; leading researcher, Applied Informatics Department, St. Petersburg Institute for Informatics and Automation of the Russian Academy of Sciences (SPIIRAS). Research interests: adaptive control systems, intelligent information technologies. The number of publications — 142. sokolova_sv@mail.ru; SPIIRAS, 39, 14th Line V.O., St. Petersburg, 199178, Russia; office phone +7(812)328-1919; fax +7(812)328-4450.

Ивлев Руслан Сергеевич — канд. техн. наук, доцент кафедры автоматизации и управления Казахского национального технического университета им. К.Сатпаева (КазНТУ). Область научных интересов: интервальные и робастные системы управления. Число научных публикаций — 58. ivlevruslan@yahoo.com; КазНТУ, д.22, ул.Сатпаева, Алматы, 050013, Казахстан; р.т. +7(727)292-57-03.

Ivlev Ruslan Sergeevich — Ph.D., associate professor Automation and Control Department, Faculty of Automation and Control of Kazakh National Technical University (KazNTU). Research interests: interval and robust control systems. The number of publications — 58. ivlevruslan@yahoo.com; KazNTU, 22, Satpaev st., Almaty, Kazakhstan; office phone +7(727)292-57-03.

РЕФЕРАТ

Соколова С.П., Ивлев Р.С. **Модифицированная математическая модель в классе «хищник – жертва» для чумной триады.**

Представлены модифицированная математическая модель в классе «хищник – жертва» для чумной триады, результаты решения задачи параметрической идентификации и моделирования процессов на популяционном уровне с использованием реальных данных, собранных в ландшафтно-экологическом районе (равнина Акдала) Прибалхашского природного очага чумы (Республика Казахстан).

Ключевые слова: чумная триада (носитель – переносчик – чумный микроб), паразито-хозяйинные отношения на популяционном уровне, интервальное расширение, оценка снизу глобального минимума.

SUMMARY

Sokolova S.P., Ivlev R.S. **Modified mathematical model in the class “predator – victim” for Plague triad.**

Modified mathematical model in the class “predator – victim” for Plague triad, the results of parametric identification solution and modeling the processes on the population level on the base real data collecting in the landscape region (Akdala Plain) Pribalkhach nature Plague hearth (Kazakhstan Republic) are offered.