

А.А. Фильченков, А.Л. Тулупьев, А.В. Сироткин  
**МОЩНОСТЬ МНОЖЕСТВА МИНИМАЛЬНЫХ ГРАФОВ  
СМЕЖНОСТИ**

---

*Фильченков А.А., Тулупьев А.Л., Сироткин А.В. Мощность множества минимальных графов смежности.*

**Аннотация.** Алгебраические байесовские сети (АБС), представляющие собой логико-вероятностную графическую модель систем знаний с неопределенностью и позволяют работать в том числе с интервальными оценками вероятности. Работа алгоритмов АБС во многом опирается на вторичную структуру, представляемую графов смежности. Особую роль играет множество минимальных графов смежности, которое содержат наиболее «эффективные» вторичные структуры. Цель данной статьи — оценить мощность указанного множества. Введено понятие *объема*, характеризующее число вершин, входящих в компоненты связности строго сужения. Использование понятия объема позволила выразить *коэффициент раздробленности клик* — ее численную характеристику, через которую была выражена мощность множества минимальных графов смежности.

**Ключевые слова:** алгебраические байесовские сети, вторичная структура, машинное обучение, вероятностно-графические модели систем знаний, глобальная структура.

---

*Filchenkov A.A., Tulupyev A.L., Sirotkin A.V. The cardinal number of a minimal join graph set.*

**Annotation.** Algebraic Bayesian networks (ABN) are probabilistic-logic graphic models of knowledge systems with uncertainty and gives an advantage to deal with interval probability estimates. ABN work dramatically depend on its secondary structure, that is usually represented as join graph. There is a special interest to minimal join graph set that contains the most “effective” secondary structures. The goal of the work is to estimate the cardinal number of the set. A new term *volume* that characterizes number of vertices that belong to a strong narrowing connection component. Exploitation of this term let us to express clique division factor that is its numerical property, minimal join graph set cardinal number is evaluated in terms of which.

**Keywords:** algebraic Bayesian networks, secondary structure, machine learning, probabilistic graphical knowledge models, global structure.

---

**1. Введение.** Алгебраические байесовские сети (АБС), представляющие собой логико-вероятностную графическую модель систем знаний с неопределенностью [1–2, 14], были предложены профессором Городецким [27] в начале 80–х годов, и с тех пор продолжают развиваться. От прочих вероятностно-графических моделей, в первую очередь — от байесовских сетей доверия (БСД), которые также позволяют осуществлять пропаганду свидетельств (т.е. апостериорный вывод), алгебраические байесовские сети выгодно отличает возможность работы с интервальными оценками вероятности, заданной на пропозициональных формулах [5, 12].

Выделяют первичную и вторичную структуру АБС [7, 14, 19]. Так, первичная структура представляет собой собственно фрагменты

знаний с заданными оценками вероятностей, тогда как вторичная структура характеризует связи между ними и представляется в виде графа смежности. Работа основных алгоритмов АБС зависит от выбора конкретной структуры, и в худшем случае не сможет осуществляться при выборе конкретной «плохой» структуры [10–13, 15, 17]. Так, «лучшей» вторичной структурой с точки зрения работы алгоритмов являются деревья смежности (ациклическая вторичная структура) [9], однако она возможна далеко не для каждого набора фрагментов знаний. Поэтому интерес представляет изучение множества минимальных графов смежности, которые содержат все «лучшие» вторичные структуры в общем случае.

В теории АБС минимальные графы смежности были исследованы недостаточно. Можно указать на работу [22], которая является основополагающей для данного раздела, в ней были сформулирована система терминов, описывающая минимальные графы смежности и связанные с ними объекты, в том числе теорема о множестве минимальных графов смежности, которая утверждает, что множество минимальных графов смежности представимо в виде декартового произведения множеств особых подграфов максимального графа смежности (и которая будет приведена в настоящей работе), а также базовая схема по синтезу этого множества. Полученные результаты были развиты в работах [3, 23–26], ряд которых легло в основу улучшенных алгоритмов построения множества минимальных графов смежности, представленных в серии статей [18–21]. Особо отметим, что во всех алгоритмах построения множества минимальных графов смежности используется алгоритм Прюфера [28] для перечисления деревьев над заданным набором вершин, который также будет приведен в данной работе в том числе и для обоснования некоторых теоретических результатов.

*Цель данной работы* — оценить мощность множества минимальных графов смежности, сформировав для этого требуемый понятийный аппарат.

**2. Основные определения.** *Граф* — пара  $\langle V, E \rangle$ , где  $V$  — множество вершин графа, а  $E$  — множество ребер, каждое из которых является неупорядоченной парой  $(v_i, v_j)$ ,  $i \neq j$ ,  $v_i, v_j \in V$ . Для удобства будем через  $V$  и  $E$  обозначать функции от графа, возвращающие множество его вершин и множество его ребер соответственно:

$$V(G') = V'; E(G') = E', \quad \text{где } G' = \langle V', E' \rangle.$$

Для внесения ясности определим:  $\subseteq$  — (нестрогое) включение:

$$(A \subseteq B) \Leftrightarrow (\forall a \in A) a \in B).$$

В противоположность этому  $\subset$  — строгое включение:

$$(A \subset B) \Leftrightarrow ((\forall a \in A, a \in B) \exists b \in B: b \notin A).$$

Алфавитом будем называть множество атомарных пропозициональных формул

$$A = \{x_1, \dots, x_n\}.$$

Словом тогда будет называться некое подмножество алфавита.

Первичная структура или множество главных конъюнктов максимальных ФЗ, вошедших в байесовскую сеть, — такое множество слов  $V^* = \{V_i \subseteq A\}_{i=1}^m$ , что

- оно не содержит несобственное подмножество алфавита:  
 $V_i \neq A, V_i \neq \emptyset$ ;
- никакое слово полностью не содержит никакого другого слова:  
 $\forall i \neq j (V_i \not\subset V_j) \text{ и } (V_j \not\subset V_i).$

Вторичная структура или граф максимальных фрагментов знаний — ненаправленный граф, вершины которого соответствуют элементам множества главных конъюнктов максимальных ФЗ, вошедших в алгебраическую байесовскую сеть, а ребра возможны только между теми вершинами, что пересечение соответствующих МФЗ не пусто.

С этого момента под словом «граф» мы будем понимать именно граф максимальных фрагментов знаний, если не оговорено обратное.

Введем понятия веса для вершины, для ребра и для подграфа. Вес  $W(V_i)$  вершины  $V_i \in V(G)$  — множество атомов алфавита, вошедших в  $V_i$ :

$$W(V_i) = \{x_i | x_i \in V\}.$$

Вес  $W(\{V_i, V_j\})$  ребра  $\{V_i, V_j\} \in E(G)$ , графа  $G$  определяется как пересечение весов тех вершин, которые соединены этим ребром:

$$W(\{V_i, V_j\}) = W(V_i) \cap W(V_j).$$

Вес  $W(H)$ , подграфа  $H \subseteq G$  — наибольшее по включению слово, которое входит в веса всех его вершин:

$$W(H) = \bigcap_{V \in H} W(V).$$

Под магистральным путем  $B: V_b \rightsquigarrow V_e$  от вершины  $V_b$  до вершины  $V_e$ , пересечение весов которых не пусто, будем понимать такой путь от вершины  $V_b$  до вершины  $V_e$ , что вес любой принадлежащей ему вершины содержит пересечение весов начальной и конечной вершин.  $B: V_b \rightsquigarrow V_e = P: V_b \rightsquigarrow V_e$ , такой, что

$$\forall V_i \in BW(V_b) \cap W(V_e) \subset W(V_i).$$

Граф магистрално связан, если между каждой парой несовпадающих вершин, веса которых содержат общие элементы, существует магистральный путь. Будем обозначать множество магистрално связанных графов как **BCG**.

Благодаря введенным понятиям *граф смежности* определяется как магистрально связный граф МФЗ. При этом магистрально связный граф не обязательно связан (например, граф из двух вершин  $ab$  и  $cd$ , в котором нет ребер, тем не менее, является магистрально связным).

*Дерево смежности* — это граф смежности, являющийся деревом.

*Минимальный граф смежности* — граф смежности, число ребер в котором минимально (рис. 1).

*Максимальный граф смежности*  $G_{\max}$  — наибольший по числу ребер граф смежности (рис. 1). Так как в графе МФЗ возможны не все ребра, а только те, которые соединяют вершины, пересечение весов которых непусто, то максимальный граф смежности вовсе необязательно совпадает с полным подграфом. В [22] было доказано, что для заданного множества вершин существует и при этом единственный максимальный граф смежности.

**3. Клики и теорема о множестве минимальных графов смежности.** *Сужение*  $G \downarrow U$  ненаправленного графа  $G$  на слово  $U$  — это ненаправленный граф, в который входят только те вершины и ребра исходного графа  $G$ , веса которых содержат или равны  $U$ :

$$G \downarrow U = \{\{V_i | V_i \in V(G), U \subseteq W(V_i)\}, \{E_i | E_i \in E(G), U \subseteq W(E_i)\}\}.$$

*Значимое слово графа*  $G$  — слово, являющееся весом какого-либо ребра графа  $G$ .

*Значимое сужение*  $G \downarrow U$  — сужение графа  $G$  на значимое для графа  $G$  слово  $U$ .

*Клика веса*  $U$  — значимое сужение  $G_{\max} \downarrow U$  (рис. 2).

В [22] было доказано, что если сужение  $G$  на произвольное непустое слово непусто, то оно является полным подграфом. Таким образом, введенная нами клика является кликой в общепринятом смысле слова, то есть полным подграфом. Будем обозначать множество всех клик графа  $G_{\max}$  через  $\text{Clique}$ .

*Граф клик* — направленный граф, вершинами которого являются клики из множества  $\text{Clique}$  (рис. 3). Ребро из вершины  $P$  в вершину  $Q$  проведено, если клика  $P$  содержит клику  $Q$ , и не существует клики  $R$ , такой, что клика  $P$  содержит клику  $R$  и клика  $R$  содержит клику  $Q$ .

$$G_{\text{Clique}} = \langle \text{Clique}, E_{\text{Clique}} \rangle, \text{ где } P, Q \in \text{Clique}, (P, Q) \in E \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow Q \subset P \text{ и } \nexists R \in \text{Clique}: Q \subset R \subset P.$$

В [22] было доказано, что граф клик не содержит направленных циклов.

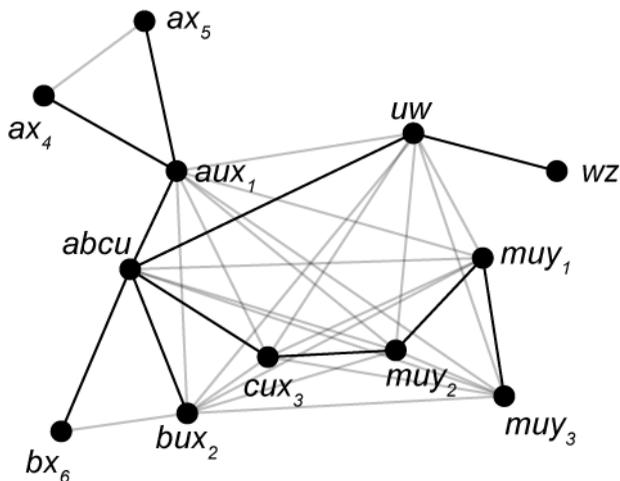


Рис. 1. Максимальный граф смежности и минимальный граф смежности. Графы смежности, построенные на вершинах  $abcu$ ,  $ax_4$ ,  $ax_5$ ,  $aux_1$ ,  $bux_2$ ,  $cux_3$ ,  $mu_1$ ,  $mu_2$ ,  $mu_3$ ,  $uw$ ,  $wz$ . Минимальный граф смежности состоит из черных ребер, максимальных граф смежности — из черных и серых.

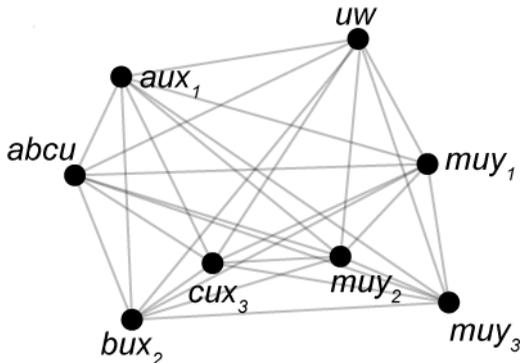


Рис. 2. Клика  $a$ .

Клика, образованная сужением максимального графа с рис. 1 на вес  $u$ .

Будем называть клики, в которые входят ребра из клики  $C$  в графе клик, *сыновьями клики  $C$* .

Сильное сужение  $G \downarrow U$  — значимое сужение  $G \downarrow U$ , из которого удалили все ребра веса  $U$  (рис. 4):

$$G \downarrow U = \{\{V_i | V_i \in V(G), U \subseteq W(V_i)\}, \{E_i | E_i \in E(G), U \subset W(E_i)\}\}.$$

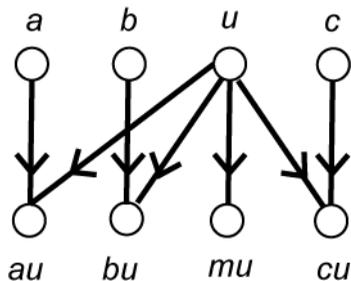


Рис. 3. Граф клик.  
Граф клик для графа на рис. 1.

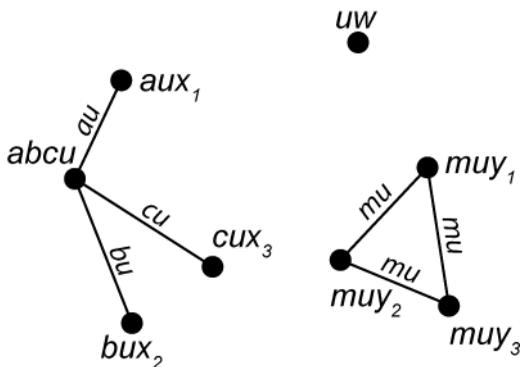


Рис. 4. Сильное сужение.  
Сильное сужение графа с рис. 1 на вес  $u$ . Оно состоит из 3-х владений.

Сильное сужение графа  $G_{\max} \downarrow U$  представляет собой компоненты связности, на которые разбивается сужение  $G_{\max} \downarrow U$  удалением ребер веса  $U$ . Такие компоненты будем называть *владениями* (рис. 5).

В [24] приводятся три определения *сжатия*, задающие эту операцию на различных множествах:

Сжатие  $\sigma_U$  компоненты связности  $P_U^i \subseteq G \downarrow U$  в вершину  $f_i$  — отображение на множестве подмножеств вершин, сопоставляющее множеству вершин  $P_U^i$  вершину  $f_i$  (рис. 5);

Сжатие  $\sigma_U$  множества ребер

$$E_{i,j} \subset (G \downarrow U) \setminus (G \downarrow U),$$

соединяющих владения  $P_U^i$  и  $P_U^j$  в ребро  $e_{i,j}$  — отображение на множестве подмножеств ребер, сопоставляющее множеству ребер  $E_{i,j}$  ребро  $e_{i,j}$ , соединяющее вершины  $f_i = \sigma_U(P_U^i)$  и  $f_j = \sigma_U(P_U^j)$  и имеющее кратность, равную  $|E_{i,j}|$  (рис. 6);

Сжатие  $\sigma_U$  графа смежности  $G$  в граф  $K_U$  — отображение на множестве графов, сопоставляющий графу  $G$ , являющему графом смежности, граф  $K_U$ , вершинами которого являются владения сильного сужения  $G \downarrow U$ , а ребро между двумя вершинами  $f_1$  и  $f_2$  графа  $K_U$  существует, если существует ребро в графе  $G$  между вершинами, принадлежащими соответствующим  $f_1$  и  $f_2$  владениям  $P_U^1$  и  $P_U^2$ . Кратность такого ребра  $(f_1, f_2)$  равна числу всех ребер, соединяющих вершины из  $P_U^1$  и  $P_U^2$  (рис. 7).

Феод —  $f_i$  из определения сжатия — вершина, получившаяся сжатием какого-то владения (рис. 5).

Курия веса  $U$  — граф  $K_U$  из определения сжатия — ненаправленный граф с кратными ребрами, полученный сжатием значимого сужения  $G \downarrow U$  (рис. 7).

Оммаж  $H_U$  — курия  $K_U$ , являющаяся деревом, все ребра которой имеют кратность, равную единице. В [24] было доказано, что любой минимальный граф смежности сжимается до оммажа (рис. 8).

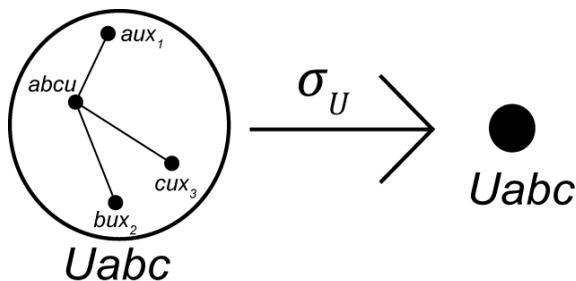


Рис. 5. Сжатие владения.  
Сжатие братства  $Uabc$  в вершину.

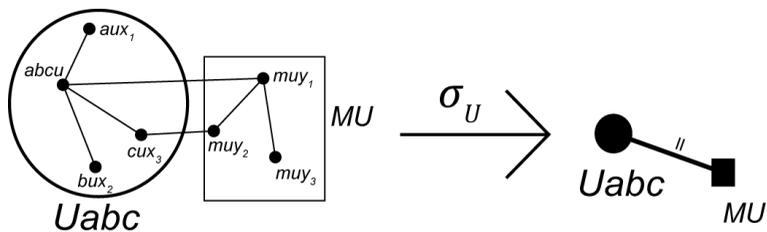


Рис. 6. Сжатие множества ребер.

Сжатие множества ребер, соединяющих владения  $Uabc$  и  $MU$  в ребро кратности 2, соединяющее соответствующие вершины.

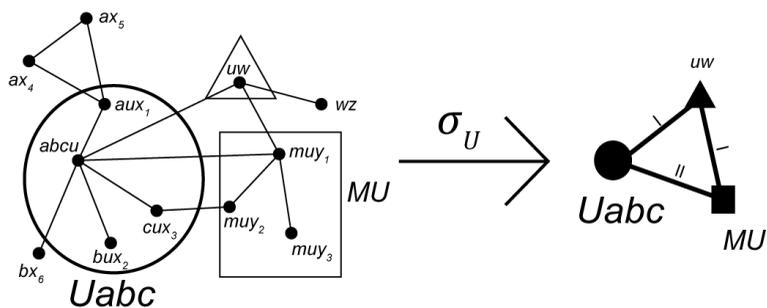


Рис. 7. Сжатие графа.

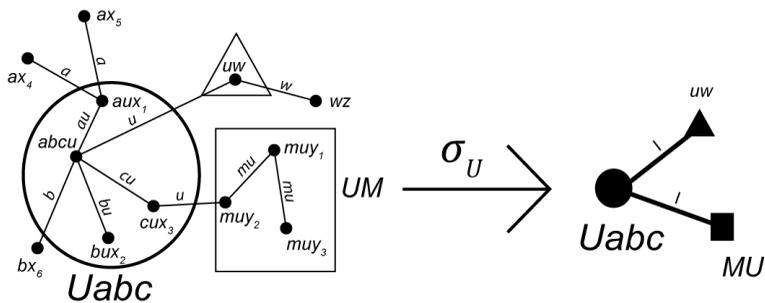


Рис. 8. Оммаж.

Сжатие минимального графа, построенного над теми же вершинами, что и на рис. 8, до оммажа.

Жила  $S_U$  — множество ребер графа смежности  $G$ , такое, что  $E_u = \{\sigma_U(e) | e \in S_U\}$  является множеством ребер оммажа сжатия  $\sigma_U$  (рис. 9). В [24] было доказано, что в жилу  $S_U$  входят те и только те ребра минимального графа смежности  $M$ , вес которых равен  $U$ .

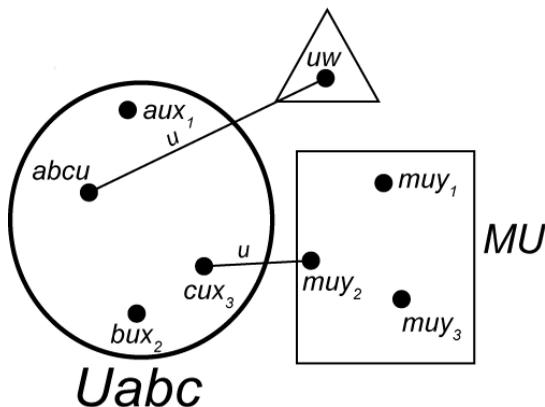


Рис. 9. Жила.

Жила веса  $U$ , соответствующая оммажу на рис. 8.

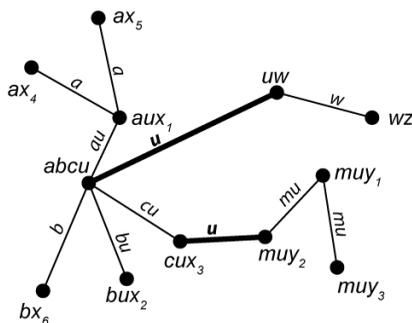


Рис. 10. Пучок.

Пучок, в котором выделена жила из рис. 9.

*Пучок* — граф, построенный на исходном наборе вершин, множество ребер которого равно объединению жил, выбранных по одной для

каждого значимого слова (рис. 10). В [24] было доказано, что каждый пучок задается однозначно набором жил, выбранных по одной для каждой клики.

**Теорема 1 (о множестве минимальных графов смежности) [20, 24].** Множество минимальных графов смежности совпадает с множеством пучков.

**Следствие 1 [20].** Множество минимальных графов смежности совпадает с множеством пучков, которое равно декартовому произведению множеств жил каждой клики.

**Следствие 2 [20].** Мощность множества графов смежности равна произведению мощностей множеств жил каждой клики.

**4. Классификация клик.** *Собственное ребро клики* — ребро, принадлежащее клике, вес которого совпадает с весом клики.

По числу собственных ребер множество клик можно поделить на (табл. 1):

- *безреберные клики* —  $C_0$  — клики (сужения), у которых нет собственных ребер;
- *однореберные клики* —  $C_1$  — клики, у которых ровно одно собственное ребро;
- *многореберные клики* —  $C_n$  — клики, у которых более одного собственного ребра.

По наличию детей множество клик можно поделить на:

- *бездетные* —  $C^-$  — клики, у которых нет детей;
- *родительские* —  $C^+$  — клики, у которых есть дети.

Таблица 1. **Классификация клик**

По ребрам \ По детям	Бездетные	Родительские
Безреберные	$C_0^-$	$C_0^+$
Однореберные	$C_1^-$	$C_1^+$
Многореберные	$C_n^-$	$C_n^+$

По числу феодалов, в которые сжимаются клики, они делятся на:

- *моноклики* — клики, сжимающиеся до одного феодала;
- *стереоклики* — клики, сжимающиеся до более чем одного феодала.

*Псевдоклика* —  $C_0^-$  — сужение, не имеющее собственных ребер и не имеющее детей.

*Моноклика-0* —  $C_0^+$  — сужение, не имеющее собственных ребер, но имеющее детей.

*Биклика* —  $C_1^-$  — клика, имеющее ровно одно собственное ребро и не имеющее детей.

*Моноклика-1* —  $C_1^+$  — клика, имеющая ровно одно собственное ребро и имеющая детей.

*Бездетная поликлика* (возможно также название *бездетная стереоклика*) —  $C_n^-$  — клика, имеющая более одного собственного ребра, но не имеющая детей.

*Родительская поликлика* —  $C_n^+$  — клика, имеющая более одного собственного ребра и имеющая детей.

*Моноклика-n* —  $mC_n^+$  — клика, имеющая более одного собственного ребра и имеющая детей, но состоящая ровно из одного феода.

*Родительская стереоклика* —  $pC_n^+$  — клика, имеющая более одного собственного ребра, имеющая детей, и состоящая более чем из одного феода.

Полученные в [23] результаты удобно расположить в таблице (табл. 2).

Таблица 2. Характеристики различных клик

Сужение	Обозначение	Является ли кликой	Есть ли дети	Число собственных ребер	Число вершин	Число феонов	Число жив
Псевдоклика	$C_0^-$	Нет	Нет	0	1	0	0
Моноклика-0	$C_0^+$	Нет	Да	0	$> 2$	1	1
Биклика	$C_1^-$	Да	Нет	1	2	2	1
Моноклика-1	$C_1^+$	Да	Да	1	$> 2$	1	1
Бездетная стереоклика	$C_n^-$	Да	Нет	$> 1$	$> 2$	$> 2$	$> 1$
Родительская поликлика	$C_n^+$	Да	Да	$> 1$	$> 2$	$\forall$	$\forall$
Моноклика-n	$mC_n^+$	Да	Да	$> 1$	$> 2$	1	1
Родительская стереоклика	$pC_n^+$	Да	Да	$> 1$	$> 2$	$> 1$	$> 1$

*Основное множество вершин клики* — множество вершин, являющихся концами ее собственных ребер.

**Утверждение 1 [25].** Основное множество вершин стереоклики совпадает с множеством ее вершин.

**Следствие 3 [25].** Мощность множества минимальных графов смежности равна произведению мощностей множеств жил каждой по-кликлики.

**Следствие 4 [25].** Мощность множества минимальных графов смежности равна произведению мощностей множеств жил каждой стереоклики.

**5. Алгоритм Прюфера.** Впервые алгоритм Прюфера был предложен в работе [28]. В данной статье мы несколько расширим систему терминов и приведем собственное изложение алгоритма, для того, чтобы максимально удобно вписать его в контекст данного исследования.

Рассмотрим обыкновенный ненаправленный граф из  $n$  вершин, которым произвольным образом присвоены номера с 0 по  $(n - 1)$ .

**Определение 1.** Бирка диаметра  $n$  —  $(n - 2)$ -местный кортеж из чисел от 0 до  $n - 1$ , встречающихся в нем не более одного раза.

**Определение 2.** Код Прюфера для дерева из  $n$  пронумерованных вершин — это бирка диаметра  $n$ , которая строится последовательным выполнением  $n - 2$  этапов, каждый из которых состоит из следующих шагов:

- находится висячая вершина с наименьшим номером;
- номер вершины, с которой найденная соединена единственным ребром, записывается в самую левую свободную ячейку бирки;
- найденная вершина удаляется из дерева.

**Определение 3.** Алгоритм Прюфера строит по коду Прюфера дерево. Он состоит из  $n - 2$  этапов. Каждый этап состоит из следующих шагов:

- рассматривается крайнее слева число кода Прюфера;
- вершина с данным номером соединяется с вершиной с наименьшим номером, которая не встречается ни в коде Прюфера, ни во множестве уже рассмотренных вершин  $L_T$ ;
- упомянутая вершина с наименьшим номером добавляется к множеству  $L_T$ ;
- из кода Прюфера удаляется крайнее слева число.

После завершения этих  $n - 2$  этапов проводится ребро между двумя вершинами, не содержащимися в  $L_T$ .

**Замечание 1.** Так как алгоритм Прюфера восстанавливает по коду Прюфера соответствующее коду дерево, а кодом может быть любая бирка, то перебирая каждую бирку и восстанавливая по ней дерево, мы переберем все деревья на данном множестве вершин.

**Пример 1.** Построим код Прюфера для простейшего дерева — цепи (рис. 11а).

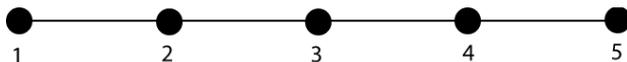


Рис. 11а. Пронумерованная цепь из 5 вершин.

До начала работы алгоритма множество неиспользованных вершин —  $L_T = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , а бирка кода Прюфера  $L_P$  пуста.

Шаг 1. Найдемисячую вершину с наименьшим номером. Очевидно, это 1. Она соединена с вершиной 2. Добавим 2 к  $L_P$ , а 1 удалим из графа вместе с единственным ребром (рис. 11б). В результате  $L_P = (2)$ ;  $L_T = \{2, 3, 4, 5\}$ .

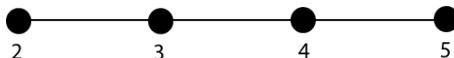


Рис. 11б. Получается удалением вершины 1 из графа на рис. 11а.

Шаг 2. В оставшемся графе найдемисячую вершину с наименьшим номером. Это 2. Она соединена с вершиной 3. Добавим 3 к  $L_P$ , а 2 удалим из графа вместе с единственным ребром (рис. 11с). В результате  $L_P = (2, 3)$ ;  $L_T = \{3, 4, 5\}$ .

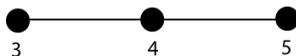


Рис. 11с. Получается удалением вершины 2 из графа на рис. 11б.

Шаг 3. В оставшемся графе найдемисячую вершину с наименьшим номером. Это 3. Она соединена с вершиной 4. Добавим 4 к  $L_P$ , а 3 удалим из графа вместе с единственным ребром (рис. 11д). В результате  $L_P = (2, 3, 4)$ ;  $L_T = \{4, 5\}$ .

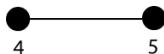


Рис. 11д. Получается удалением вершины 3 из графа на рис. 11с.

Алгоритм завершился, когда было сделано 3 шага и в графе осталось только одно ребро. На выходе был получен код Прюфера:  $L_P = (2, 3, 4)$ .

Теперь построим по данному коду дерево.

До начала работы алгоритма бирка кода Прюфера  $L_P = (2, 3, 4)$ , множество уже рассмотренных вершин  $L_T$  пусто.

Шаг 1. Берем самое левое число бирки, это 2, и находим вершину с наименьшим номером, которой нет ни в  $L_P$ , ни в  $L_T$ . Это, очевидно, 1. Строим ребро (1, 2) (рис. 11е), вершину 1 добавляем к  $L_T$ , а 2 удаляем из  $L_P$ . В результате  $L_P = (3, 4)$ ;  $L_T = \{1\}$ .

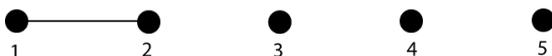


Рис. 11е. Ребро (1, 2).

Шаг 2. Берем самое левое число бирки, это 3, и находим вершину с наименьшим номером, которой нет ни в  $L_P$ , ни в  $L_T$ . Это, 2. Строим ребро (2, 3) (рис. 11f), вершину 2 добавляем к  $L_T$ , а 3 удаляем из  $L_P$ . В результате  $L_P = (4)$ ;  $L_T = \{1, 2\}$ .

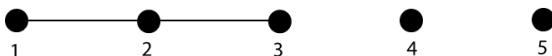


Рис. 11f. Получается добавлением ребра (2, 3) к графу на рис. 11е.

Шаг 3. Берем оставшееся число бирки, это 4, и находим вершину с наименьшим номером, которой нет ни в  $L_P$ , ни в  $L_T$ . Это, 3. Строим ребро (3, 4) (рис. 11g), вершину 3 добавляем к  $L_T$ , а 4 удаляем из  $L_P$ . В результате;  $L_T = \{1, 2, 3\}$ .



Рисунок 11g. Получается добавлением ребра (3, 4) к графу на рис. 11f.

Шаг 4. Соединяем ребро две вершины, которых нет в  $L_T$ . Это 4 и 5 (рис. 11h).



Рис. 11h. Получается добавлением ребра (4, 5) к графу на рис. 11g.

Нетрудно заметить, что графы на рисунках 11а и 11б совпадают.

**Пример 2.** Построим код Прюфера для более сложного дерева, состоящего, как и в предыдущем примере, из 5 вершин (рис. 12а).

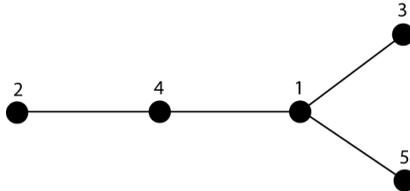


Рис. 12а. Дерево из пяти вершин.

До начала работы алгоритма множество неиспользованных вершин —  $L_T = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , а бирка кода Прюфера  $L_P$  пуста.

Шаг 1. Найдем висячую вершину с наименьшим номером. Это 2. Она соединена с вершиной 4. Добавим 4 к  $L_P$ , а 2 удалим из графа вместе с единственным ребром (рис. 12б). В результате  $L_P = (4)$ ;  $L_T = \{1, 3, 4, 5\}$ .

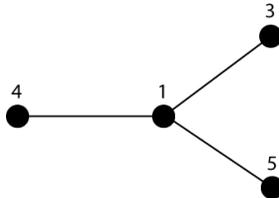


Рис. 12б. Получается удалением вершины 2 из графа на рис. 12а.

Шаг 2. В оставшемся графе найдем висячую вершину с наименьшим номером. Это 3. Она соединена с вершиной 1. Добавим 1 к  $L_P$ , а 3 удалим из графа вместе с единственным ребром (рис. 12с). В результате  $L_P = (4, 1)$ ;  $L_T = \{1, 4, 5\}$ .

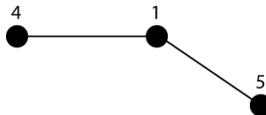


Рис. 12с. Получается удалением вершины 3 из графа на рис. 12б.

Шаг 3. В оставшемся графе найдем висячую вершину с наименьшим номером. Это 4. Она соединена с вершиной 1. Добавим 1 к  $L_P$ , а 4 удалим из графа вместе с единственным ребром (рис. 12d). В результате  $L_P = (4, 1, 1)$ ;  $L_T = \{1, 5\}$ .

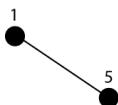


Рис. 12d. Получается удалением вершины 4 из графа на рис. 12с.

Алгоритм завершился, когда было сделано 3 шага и в графе осталось только одно ребро. На выходе был получен код Прюфера:  $L_P = (4, 1, 1)$ .

Теперь построим по данному коду дерево.

До начала работы алгоритма бирка кода Прюфера  $L_P = (4, 1, 1)$ , множество уже рассмотренных вершин  $L_T$  пусто.

Шаг 1. Берем самое левое число бирки, это 4, и находим вершину с наименьшим номером, которой нет ни в  $L_P$ , ни в  $L_T$ . Это, очевидно, 2. Строим ребро (4, 2) (рис. 12e), вершину 2 добавляем к  $L_T$ , а 4 удаляем из  $L_P$ . В результате  $L_P = (4, 1)$ ;  $L_T = \{2\}$ .

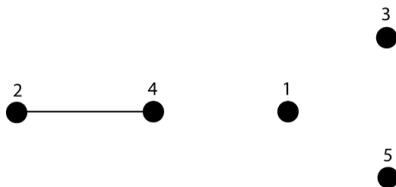


Рис. 12e. Ребро (4, 1).

Шаг 2. Берем самое левое число бирки, это 1, и находим вершину с наименьшим номером, которой нет ни в  $L_P$ , ни в  $L_T$ . Это, 3. Строим ребро (1, 3) (рис. 12f), вершину 3 добавляем к  $L_T$ , а 1 удаляем из  $L_P$ . В результате  $L_P = (1)$ ;  $L_T = \{2, 3\}$ .

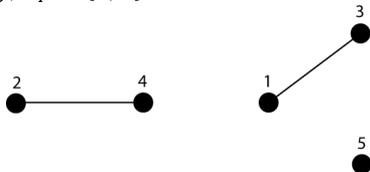


Рис. 12f. Получается добавлением ребра (1, 3) к графу на рис. 12e.

Шаг 3. Берем оставшееся число бирки, это 1, и находим вершину с наименьшим номером, которой нет ни в  $L_P$ , ни в  $L_T$ . Это, 4. Строим ребро (1, 4) (рис. 12g), вершину 4 добавляем к  $L_T$ , а 1 удаляем из  $L_P$ . В результате;  $L_T = \{2, 3, 4\}$ .

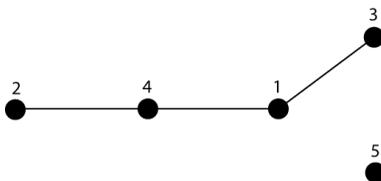


Рис. 12g. Получается добавлением ребра (1, 4) к графу на рис. 12f.

Шаг 4. Соединяем ребро две вершины, которых нет в  $L_T$ . Это 1 и 5 (рис. 12h).

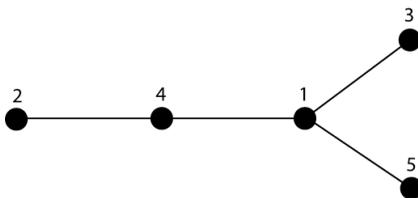


Рис. 12h. Получается добавлением ребра (1, 5) к графу на рис. 12g.

Графы на рисунках 12a и 12h снова совпадают.

## 6. Мощность множества минимальных графов смежности.

**Определение 4.** Объем феода  $F$  —  $v(F)$  — равен числу вершин, входящих во владение, которые сжимается до этого феода.

То же самое, более формально:

**Определение 4'.** Объем феода  $F$ :

$$v(F) = |V(P_U)|, \text{ где } P_U: F = \sigma_U(P_U).$$

Соответственно, можно говорить и об *объеме владения*, который определяется точно так же.

**Определение 5.** Объем ребра оммажа  $H$  —  $v((F, G))$  — равен числу ребер, которые можно провести между вершинами соответствующих концам-феодам этого ребра владений.

То же самое, более формально:

**Определение 5'.** Объем ребра оммажа  $H$ :

$v((F, G)) = |E_{FG}|$ , где  $E_{FG} = \{(f, g) | f \in P_U, g \in Q_U, W(f) \cap W(g) \neq \emptyset\}$ , где  $F = \sigma_U(P_U)$  и  $G = \sigma_U(Q_U)$ .

**Пояснение.** Объем ребра равен числу собственных ребер клики, проведенных между вершинами двух соответствующих владений в максимальном графе смежности.

**Утверждение 2.** Объем ребра оммажа равен произведению объемов феонов, являющихся его концами:

$$v((F, G)) = v(F) \cdot v(G),$$

где  $F, G \in V(H)$ ,  $(F, G) \in E(H)$ ,  $H$  — оммаж.

**Доказательство.** Так как между любыми двумя вершинами владений, которые сжали до феонов  $F$  и  $G$ , можно провести ребро, то общее возможное число таких ребер равно произведению числа вершин в каждом владении.

**Утверждение 3.** Каждому оммажу  $H$  соответствует число жил, равное произведению объемов всех ребер оммажа:

$$\prod_{\substack{F, G \in V(H) \\ (F, G) \in E(H)}} v(F, G).$$

**Доказательство.** Так как любому ребру  $(F, G)$  оммажа может соответствовать любое из  $v(F, G)$  ребер, соединяющих вершины двух владений, причем для каждого ребра оммажа такие ребра выбираются независимо, всего оммажу соответствует  $\prod_{\substack{F, G \in V(H) \\ (F, G) \in E(H)}} v(F, G)$  жил.

**Определение 6.** Степень феода  $F$  —  $d(F)$  — равна числу ребер, из него выходящих.

**Утверждение 4.** Каждому оммажу  $H$  соответствует число жил, равное произведению объемов всех феонов в степени, равной степени феода:

$$\prod_{F \in V(H)} (v(F))^{d(F)}.$$

**Доказательство.** Из утверждения 2 следует, что объем ребра равен произведению объемов феонов, являющихся его концами. Если мы каждый объем ребра заменим таким произведением, то объем любого феода встретится в формуле столько раз, сколько из этого феода выходит ребер, то есть равное его степени.

**Утверждение 5 (о бирках Прюфера).** Любая бирка Прюфера  $(a_1, a_2, \dots, a_{n-2})$  задает дерево, степени вершин которого равны числу вхождений номера вершины в кортеж  $(a_1, a_2, \dots, a_{n-2})$ , увеличенному на один.

**Доказательство.** Посмотрим, как строится бирка Прюфера по дереву. Каждый раз, выкидывая ребро, номер одного из концов этого ребра мы добавляем в кортеж, а номер второго — нет. Таким образом,

в кортеже учитывается только степень добавляемой вершины, а степень выкидываемой — нет. После  $n - 2$  шагов мы выкинем  $n - 2$  вершины, степень которых на один больше, чем число вхождений их номеров в кортеж, кроме того, останутся две невыкинутые вершины, степень которых также на один больше, чем число вхождений их номеров в кортеж, так как мы не учли в кортеже соединяющее их ребро. Таким образом, число вхождений в кортеж номера вершины на единицу меньше ее степени в соответствующем бирке дереве.

**Определение 7.** Коэффициент раздробленности клики  $C$  —  $D(C)$  — произведение объемов всех феодалов клики, умноженных на число вершин клики, возведенное в степень числа ее владений, уменьшенному на 2.

То же самое, более формально:

**Определение 7'.** Коэффициент раздробленности клики  $C$ :

$$D(C) = \left( \prod_{i=1}^n v(F_i) \right) (|C|)^{n-2},$$

где  $C$  сжимается до  $n$  феодалов  $F_1, \dots, F_n$ .

**Теорема 2 (о мощности множества минимальных графов смежности).** Мощность множества минимальных графов смежности равна произведению коэффициентов раздробленности всех клик.

**Доказательство.** Следствие 2 (из теоремы 1) говорит о том, что мощность множества графов смежности равна произведению мощностей множеств жил каждой клики. Таким образом, нам достаточно доказать, что коэффициент раздробленности клики равен мощности множества ее жил.

Так как каждая вершина клики входит ровно в одно из ее владений, то число вершин в клике равно сумме объемов всех ее феодалов, поэтому коэффициент раздробленности можно переписать в таком виде:

$$D(C) = \left( \prod_{i=1}^n v(F_i) \right) \left( \sum_{i=1}^n v(F_i) \right)^{n-2},$$

где  $F_i$  — феодалы клики  $C$ .

Теперь если мы раскроем скобки, то получим  $n^{n-2}$  слагаемых вида  $(\prod_{i=1}^n v(F_i)) \cdot v(F_{a_1}) \cdot \dots \cdot v(F_{a_{n-2}})$ , где индексы  $a_1, \dots, a_{n-2}$  пробегают все значения от 1 до  $n$ . Каждое такое слагаемое мы можем сопоставить соответствующей бирке Прюфера. Согласно утверждению 5 (о бирках Прюфера), каждая такая бирка задает дерево, степень каждой вершины которого на один больше, чем число вхождений индекса вершины в бирку. Уточним, каждая бирка задает омаж, степень каж-

дой вершины которого на единицу больше, чем число вхождений этой вершины в бирку. Согласно утверждению 4, каждому оммажу соответствует число деревьев, равное произведению объемов всех феонов в степени, равной степени феонов.

Таким образом, каждое слагаемое  $(\prod_{i=1}^n v(F_i)) \cdot v(F_{a_1}) \cdot \dots \cdot v(F_{a_{n-2}})$  соответствует какому-либо оммажу, причем оно в точности равно числу жил, этому оммажу соответствующих. Значит, сумма всех таких слагаемых равна числу всех жил для данной клики. Мы доказали, что коэффициент раздробленности равен мощности множества жил, а, значит, что мощность множества минимальных графов смежности равна произведению коэффициентов раздробленности для каждой клики.

**Следствие 5.** Мощность множества жил для каждой клики равна коэффициенту раздробленности клики.

**Следствие 6.** Мощность множества минимальных графов смежности равна произведению коэффициентов раздробленности поликлик.

**Следствие 7.** Мощность множества минимальных графов смежности равна произведению коэффициентов раздробленности стереоклик.

**7. Заключение.** В работе исследовано множество минимальных графов смежности, с целью предложить способ вычисления такой важной его характеристика, как мощность.

Теоретической основой исследований являются результаты анализа глобальной структуры, в особенности теорема о множестве минимальных графов смежности [22], которые были приведены в данной работе. Кроме того, как и в алгоритмах построения множества минимальных графов смежности [18–21], в оценке его мощности особую роль играет алгоритм Прюфера [28], который также был изложен в работе в терминах и последовательности, которые представляются наиболее удобными для достижения поставленной цели.

Было введено понятие *объема* для феонов (которое также может быть применено к владению) клики, которое характеризует число вершин, в этот феонов (владение) входящих. Далее понятие *объема* расширено на ребра оммажа, в этом контексте оно выражает число ребер, которые можно провести между вершинами соответствующих владений (т.е., по сути, собственных ребер данной клики, соединяющих соответствующие владения в максимальном графе смежности).

Вводится понятие *коэффициента раздробленности клики*, который определяется как произведение объемов всех феонов клики, помноженных на число вершин клики, возведенное в степень числа ее

владений, уменьшенному на 2. Доказывается *теорема о мощности множества минимальных графов смежности*, которая утверждает, что эта мощность равна произведению коэффициентов раздробленности всех клик.

Благодаря привлечению результатов компаративного анализа клик минимальных графов смежности, этот результат уточняется: мощность указанного множества равно произведению коэффициентов раздробленности *поликлик* (т.е. клик, имеющих более одного собственного ребра), и еще уточняется: мощность указанного множества равна произведению коэффициентов раздробленности *стереоклик* (т.е. клик, имеющих более одного владения).

Полученные результаты развивают теорию алгебраических байесовских сетей и представляют особый интерес в контексте построения множества минимальных графов смежности: вычисление мощности множества минимальных графов смежности может быть осуществлено до его построения, поэтому пользователь может быть заранее извещен об объемах предстоящей работы. Это ставит задачу формулирования алгоритма вычисления мощности множества минимальных графов смежности как вообще, так и в контексте существующих алгоритмов [18–21].

### Литература

1. *Городецкий В.И.* Алгебраические байесовские сети — новая парадигма экспертно-вычислительных систем // Юбилейный сборник трудов институтов Отделения информатики, вычислительной техники и автоматизации РАН. Т. 2. М.: РАН, 1993, С. 120–141.
2. *Городецкий В.И., Тулупьев А.Л.* Формирование непротиворечивых баз знаний с неопределенностью // Известия РАН. Сер. Теория и системы управления. 1997. №5. С. 33–42.
3. *Опарин В.В., Фильченков А.А., Тулупьев А.Л., Сироткин А.В.* Матроидное представление семейства графов смежности над набором фрагментов знаний // Научно-технический вестник Санкт-Петербургского государственного университета информационных технологий, механики и оптики. 2010. Вып. 4. С. 73–76.
4. *Павельчук А.В., Тулупьев А.Л., Тотмянина С.А.* Подход к объектно-ориентированному представлению данных алгебраических байесовских сетей в java-коде и реляционных СУБД // Региональная информатика-2008 (РИ-2008). XI Санкт-Петербургская международная конференция. Санкт-Петербург, 22–24 октября, 2008 г.: Материалы конференции / СПОИСУ. СПб.: 2009. С. 68–76.
5. *Сироткин А.В.* Модели, алгоритмы и вычислительная сложность синтеза согласованных оценок истинности в алгебраических байесовских сетях // Информационно-измерительные и управляющие системы. 2009. №11. С. 32–37.
6. *Тотмянина С.А., Павельчук А.В., Тулупьев А.Л.* Алгебраические байесовские сети: структуры данных в СУБД и Java-коде // Интегрированные модели, мягкие вычисления, вероятностные системы и комплексы программ в искусственном интеллекте. Научно-практическая конференция студентов, аспирантов, молодых ученых

- и специалистов (Коломна, 26–27 мая 2009 г.). Научные доклады. В 2-х т. Т. 2. М.: Физматлит, 2009, С. 123–131.
7. *Тулупьев А.Л.* Алгебраические байесовские сети: глобальный логико-вероятностный вывод в деревьях смежности: Учеб. пособие. СПб.: СПбГУ; ООО Издательство «Анатолия», 2007. 40 с. (Сер. Элементы мягких вычислений).
  8. *Тулупьев А.Л.* Алгебраические байесовские сети: реализация логико-вероятностного вывода в комплексе java-программ // Труды СПИИРАН. СПб.: Наука, 2009. Вып. 8. С. 191–232.
  9. *Тулупьев А.Л.* Ациклические алгебраические байесовские сети: логико-вероятностный вывод // Нечеткие системы и мягкие вычисления: Научный журнал Российской ассоциации нечетких систем и мягких вычислений. 2006. Том 1, № 1. С. 57–93.
  10. *Тулупьев А.Л.* Байесовские сети: логико-вероятностный вывод в циклах. СПб.: Изд-во С.-Петербургского ун-та, 2008. 140 с. (Элементы мягких вычислений.)
  11. *Тулупьев А.Л.* Непротиворечивость оценок вероятностей в алгебраических байесовских сетях. Вестник СПбГУ. Сер. 10. 2009. Вып. 3. С. 144–151.
  12. *Тулупьев А.Л.* Преобразование ациклических байесовских сетей доверия в алгебраические байесовские сети // Известия высших учебных заведений: Приборостроение. 2009. № 3. С. 21–23.
  13. *Тулупьев А.Л.* Согласованность данных и оценка вероятности альтернатив в цикле стохастических предпочтений // Известия высших учебных заведений: Приборостроение. 2009. № 7. С. 3–8.
  14. *Тулупьев А.Л., Николенко С.И., Сироткин А.В.* Байесовские сети: логико-вероятностный подход. СПб.: Наука, 2006. 607 с.
  15. *Тулупьев А.Л., Сироткин А.В.* Алгебраические байесовские сети: принцип декомпозиции и логико-вероятностный вывод в условиях неопределенности // Информационно-измерительные и управляющие системы. 2008. № 10. т. 6. С. 85–87.
  16. *Тулупьев А.Л., Сироткин А.В., Николенко С.И.* Байесовские сети доверия: логико-вероятностный вывод в ациклических направленных графах. СПб.: Изд-во С.-Петербург. ун-та, 2009, 400 с.
  17. *Тулупьев А.Л., Столяров Д.М., Ментюков М.В.* Представление локальной и глобальной структуры алгебраической байесовской сети в Java-приложениях. // Труды СПИИРАН. 2007. Вып. 5. СПб.: Наука, 2007. С. 71–99.
  18. *Фильченков А.А.* Алгоритм построения множества минимальных графов смежности при помощи клик владений // Труды СПИИРАН. 2010. Вып. 2 (13). [в печати]
  19. *Фильченков А.А.* Алгоритм построения множества минимальных графов смежности при помощи клик-собственников владений // Труды СПИИРАН. 2010. Вып. 4 (15). [в печати]
  20. *Фильченков А.А.* Алгоритм построения множества минимальных графов смежности при помощи самоуправляемых клик // Труды СПИИРАН. 2010. Вып. 1 (12). С. 119–133.
  21. *Фильченков А.А.* Алгоритм построения множества минимальных графов смежности при помощи самоуправляемых клик-владений // Труды СПИИРАН. 2010. Вып. 3 (14). [в печати]
  22. *Фильченков А.А., Тулупьев А.Л.* Структурный анализ систем минимальных графов смежности Труды СПИИРАН. 2009. Вып. 11. С. 104–127.
  23. *Фильченков А.А., Тулупьев А.Л., Сироткин А.В.* Компаративный анализа клик минимальных графов смежности // Труды СПИИРАН. 2010. Вып. 2 (13). [в печати]

24. *Фильченков А.А., Тулупьев А.Л., Сироткин А.В.* Особенности анализа вторичной структуры алгебраической байесовской сети // Труды СПИИРАН. 2010. Вып. 1 (12). С. 97–118.
25. *Фильченков А.А., Тулупьев А.Л., Сироткин А.В.* Ребра графов смежности в контексте компаративного анализа клик минимальных графов смежности // Труды СПИИРАН. 2010. Вып. 3 (14). [в печати]
26. *Фильченков А.А., Тулупьев А.Л., Сироткин А.В.* Структурный анализ клик минимальных графов смежности // Вестник Тверского государственного университета. Сер. Прикладная математика. 2010. [в печати].
27. *Gorodetsky V.I., Drozdgin V.V., Jusupov R.M.* Application of Attributed Grammar and Algorithmic Sensitivity Model for Knowledge Representation and Estimation // Artificial Intelligence and Information, Control Systems of ROBOTSА. Amsterdam: Elsevier Science Publishers B. V., 1984, P. 232–237.
28. *Prüfer H.* Neuer Beweis eines Satzes über Permutationen. // Arch. Math. Phys. 27, S. 742–744, 1918.

**Фильченков Андрей Александрович** — аспирант кафедры информатики математико-механического факультета С.-Петербургского государственного университета (СПбГУ), младший научный сотрудник лаборатории теоретических и междисциплинарных проблем информатики СПИИРАН. Область научных интересов: автоматическое обучение вероятностных графических моделей. Число научных публикаций — 12. [aaafil@mail.ru](mailto:aaafil@mail.ru), СПИИРАН, 14-я линия В.О., д. 39, г. Санкт-Петербург, 199178, РФ; p.t. +7(812)328-3337, факс +7(812)328-4450. Научный руководитель — А.Л. Тулупьев.

**Filchenkov Andrey Alexandrovich** — PhD student of Computer Science Department, SPbGU, junior researcher, Theoretical and Interdisciplinary Computer Science Laboratory, SPIIRAS. Research area: machine learning of probabilistic graphical models. The number of publications — 12. [aaafil@mail.ru](mailto:aaafil@mail.ru), SPIIRAS, 14-th line V.O., 39, St. Petersburg, 199178, Russia; office phone +7(812)328-3337, fax +7(812)328-4450. Scientific advisor — A.L. Tulupuev.

**Тулупьев Александр Львович** — д.ф.-м.н., доцент; заведующего лабораторией теоретических и междисциплинарных проблем информатики СПИИРАН, доцент кафедры информатики математико-механического факультета С.-Петербургского государственного университета (СПбГУ). Область научных интересов: представление и обработка данных и знаний с неопределенностью, применение методов математики и информатики в социокультурных исследованиях, применение методов биостатистики и математического моделирования в эпидемиологии, технология разработки программных комплексов с СУБД. Число научных публикаций — 220. [ALT@ias.spb.su](mailto:ALT@ias.spb.su), [www.tulupuev.spb.ru](http://www.tulupuev.spb.ru); СПИИРАН, 14-я линия В.О., д. 39, г. Санкт-Петербург, 199178, РФ; p.t. +7(812)328-3337, факс +7(812)328-4450.

**Tulupuev Alexander Lvovich** — PhD in Computer Science, Dr. of Sc., Associate Professor; Head of Theoretical and Interdisciplinary Computer Science Laboratory, SPIIRAS, Associate Professor of Computer Science Department, SPbSU. Research area: uncertain data and knowledge representation and processing, mathematics and computer science applications in socio-cultural studies, biostatistics, simulation, and mathematical modeling applications in epidemiology, data intensive software systems development technology. Number of publications — 220. [ALT@ias.spb.su](mailto:ALT@ias.spb.su), [www.tulupuev.spb.ru](http://www.tulupuev.spb.ru); SPIIRAS, 14-th line V.O., 39, St. Petersburg, 199178, Russia; office phone +7(812)328-3337, fax +7(812)328-4450.

**Сироткин Александр Владимирович** — младший научный сотрудник лаборатории теоретических и междисциплинарных проблем информатики СПИИРАН. Область научных интересов: алгебраические байесовские сети: вычислительные аспекты логико-вероятностного вывода в условиях неопределенности. Число научных публикаций — 50. avs@iias.spb.su, www.tulupyev.spb.ru; СПИИРАН, 14-я линия В.О., д. 39, г. Санкт-Петербург, 199178, РФ; р.т. +7(812)328-3337, факс +7(812)328-4450.

**Sirotkin Alexander Vladimirovich** — junior researcher, Theoretical and Interdisciplinary Computer Science Laboratory, SPIIRAS. Research interests: algebraic Bayesian networks, algorithms of probabilistic-logic inference under uncertainty. The number of publications — 50. avs@iias.spb.su, www.tulupyev.spb.ru; SPIIRAS, 39, 14-th Line V.O., St. Petersburg, 199178, Russia; office phone +7(812)328-3337, fax +7(812)328-4450.

Рекомендовано ТиМПИ СПИИРАН, зав. лаб. А.Л. Тулупьев, д.ф.-м.н., доцент.

Поступила в редакцию 27.11.2010.

**Поддержка исследования.** Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № **09-01-00861-а** «Методология построения интеллектуальных систем поддержки принятия решений на основе баз фрагментов знаний с вероятностной неопределенностью», а также грантом правительства Санкт-Петербурга для победителей конкурса грантов Санкт-Петербурга для студентов, аспирантов, молодых ученых, молодых кандидатов наук 2010 г., диплом ПСП№10697.

## РЕФЕРАТ

### *Фильченков А.А., Тулупьев А.Л., Сироткин А.В.* **Мощность множества минимальных графов смежности.**

В статье приводятся основы теории глобальной структуры алгебраической байесовской сети, в том числе определения таких основных понятий как *сужения, клики, владения, сжатия*. Приводится формулировка фундаментальной теоремы о множестве минимальных графов смежности. Приводится известная классификация клик (по числу *собственных ребер* — ребер того же веса, что и клика, и по наличию детей). Описывается известный алгоритм Прюфера, перечисляющий деревья над заданным набором вершин, в несколько отличной от оригинала терминологии. Так, *бирка Прюфера диаметра  $n$*  определяется как  $(n - 2)$ -местный кортеж из чисел от 0 до  $n - 1$ , встречающихся в нем не более одного раза. К алгоритму приводятся два обильно иллюстрированных примера.

Цель работы — оценить мощность множества минимальных графов смежности, сформировав для этого требуемый понятийный аппарат.

*Объем феода* определяется как число вершин, входящих во владение, соответствующее феоде, а *объем ребра оммажа* — как число ребер, проведенных между вершинами соответствующих концам-феодам этого ребра владений в максимальном графе смежности. Доказывается, что объем ребра равен произведению объемов его концов.

Определяется *степень феода* как число ребер, из него выходящих, и доказывается, что каждому оммажу соответствует число жил, равное произведению объемов всех феонов в степени, равной степени феода.

*Коэффициент раздробленности* определяется как произведение объемов всех феонов клики, помноженных на число вершин клики, возведенное в степень числа ее владений, уменьшенному на 2.

Формулируется и доказывается теорема (о мощности множества минимальных графов смежности), утверждающая, что мощность множества минимальных графов смежности равна произведению коэффициентов раздробленности всех клик, доказательство которой опирается на также доказанное утверждение о том, что любая бирка Прюфера задает дерево, степени вершин которого равны числу вхождений номера вершины в эту бирку, увеличенному на один.

Следствия из теоремы утверждают, что мощность множества жил для каждой клики равна коэффициенту раздробленности клики, а мощность множества минимальных графов смежности равна произведению коэффициентов раздробленности поликлик и, одновременно, стереоклик.

Полученные результаты развивают теорию алгебраических байесовских сетей и представляют особый интерес в контексте построения множества минимальных графов смежности: вычисление мощности множества минимальных графов смежности может быть осуществлено до его построения, поэтому пользователь может быть заранее извещен об объемах предстоящей работы.

## SUMMARY

### *Filchenkov A.A., Tulupyev A.L., Sirotkin A.V.* **The cardinal number of a minimal join graph set.**

In the article basics of algebraic Bayesian network global structure and, in particular, definitions of such terms as *narrowings*, *cliques*, *possessions*, *compressions* are presented. The formulation of the fundamental theorem of minimal join graph set is cited. The known clique classification (on number of *proper edges* — edges the weight of those equals the clique weight and on if they are parents) is cited. The known Pruefer algorithm that enumerates trees over a given vertex set is described in a way that differs from the original one. Thus, *Pruefer label with diameter* equals to  $n$  is defined as  $(n - 2)$ -place tuple consisting of integer from 0 to  $n - 1$  that take not more than one place. Two plentifully illustrated examples are represented.

The goal of this work is to estimate the cardinal number of a minimal join graph set and to design concept system required.

*Feud volume* is defined as number of vertices that belong to the possession corresponding to the feud, and *volume of an homage edge* — as number of edges that contains two vertices of the two possessions that correspond to the two feuds in maximal join graph. It is proven that an edge volume is a product of volumes of its end.

*Feud degree* is defined as a number of edges that begins in the feud and it is proven that number of sinews, that corresponds to each homage, equals to a product of all the feud volumes in power that equals to the feud degree.

*Division factor* is defined as product of the volumes of all the clique feuds multiplied by number of clique vertices in power of half of the number of its possessions.

Theorem of minimal join graph set cardinal number that claims the cardinal of a minimal join graph set to equal a product of all the cliques division factors is formulated and proven with the help of the also proven statement that every Pruefer label specifies a tree, vertices degrees of that equals to number of this vertex affiliation into this label increased by one.

The theorem consequence says that the cardinal number of each clique sinew set equals to the clique division factor, and the cardinal number of a minimal join graph set equals to product of polycliques division factors and at the same time product of stereocliques division factors.

The obtained results develops the theory of algebraic Bayesian network and are of interest in the context of minimal join graph synthesis: the cardinal number of a minimal join graph set computation can be implemented before the set is synthesized, so that the user can be informed about the value of evaluation beforehand.