

Б.Г. МАЙОРОВ  
**СВОЙСТВА ГАРМОНИЧЕСКИХ И СОСТАВНЫХ ПОЛУВОЛН,  
ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИНТЕРВАЛА РАВНОМЕРНОЙ  
ДИСКРЕТИЗАЦИИ ВРЕМЕНИ ЦИФРОВЫХ СИГНАЛЬНЫХ  
ПРОЦЕССОРОВ**

*Майоров Б.Г. Свойства гармонических и составных полуволи, определение интервала равномерной дискретизации времени цифровых сигнальных процессоров.*

**Аннотация.** При построении автономных систем реального времени (СРВ) необходимо решать задачу оптимальной многозадачной загрузки ряда параллельно функционирующих цифровых сигнальных процессоров. Одним из резервов достижения необходимого результата выступает реализация выборок из сигналов датчиков информации о величине сигнала наиболее редко во времени. При этом необходимо обеспечивать линейную или ступенчатую аппроксимацию сигнала по выборкам с допустимой погрешностью восстановления. Одной из системных задач этих процессоров является фильтрация сигналов или ограничение спектра до частоты среза. Отличительной особенностью предлагаемого в статье подхода является выполнение условия: если измерение этой частоты затруднено (например, в электромеханических средствах СРВ), то для таких сигналов предложено согласовывать максимальные величины параметров гармонической полуволи: погрешность аппроксимации, скорость и ускорение. Исследование открывает перспективу применения новых подходов по дискретизации времени сигналов в амплитудно-временной области и определение для таких сигналов эквивалентной частоты среза спектра сигнала. В настоящей статье получены зависимости величины единицы системного времени ввода-вывода данных от степени согласования между собой максимальных величин параметров сигнала. Математическая модель экстремального поведения сигнала между двумя соседними выборками задана в виде гармонической полуволи. Исследование распространено также на выпуклые составные гармонические функции, по которым сигнал может отклоняться от результатов линейной или ступенчатой аппроксимации сигнала по этим выборкам. Проведено сравнение моделей по величине относительных интервалов дискретизации времени, зависящих от степени согласования максимальных параметров гармонической полуволи. При сравнении, кроме этих максимальных параметров, учтена связь максимальной скорости сигнала с погрешностью аппроксимации выборок ступеньками и связь максимального ускорения сигнала с максимальной погрешностью линейной аппроксимации. Результаты позволяют определять длительности интервалов равномерной дискретизации времени сигнала по результатам обследования объекта управления, обосновывают существенное увеличение интервала дискретизации времени или аналогичное увеличение числа решаемых задач в единицу системного времени.

**Ключевые слова:** системы управления реального времени, цифровые сигнальные процессоры, фильтрация сигнала, модель сигнала – гармоническая полуволна, составные полуволи, равномерные выборки, равномерная дискретизация времени, ступенчатая и линейная аппроксимация сигнала, допустимая погрешность.

**1. Введение.** Дискретизация времени и восстановление сигналов по выборкам является традиционной задачей обработки сигналов в

информационной технике, которая решается при проектировании или выборе каналов сбора и обработки информации в системах управления. Эта задача актуальна при проектировании аппаратуры обратной связи и каналов ввода данных для цифровых автоматических и автоматизированных систем управления реального времени (СРВ). Существенным свойством СРВ является тот факт, что они работают в «структуре времени, определяемой ходом внешних процессов» [1, 2] и в них применяют современные цифровые сигнальные процессоры (ЦСП) для решения задач первичной обработки сигналов [3–7].

Есть мнение, что полученные результаты позволяют упростить распределение задач и встраивание ЦСП в робастные СРВ при оптимизации их загрузки для первичной обработки сигналов.

**1.1. Особенности первичной обработки сигнала цифровыми сигнальными процессорами.** Физические параметры объекта управления снимаются датчиками в реальном времени, преобразуются в электрические сигналы, спектры которых характеризуются избыточными высокочастотными составляющими и эффектом алиасинга. Поэтому сигналы в СРВ подвергают предварительной обработке и ЦФНЧ - фильтрации при помощи цифровых сигнальных процессоров (ЦСП) в амплитудно-частотной области.

На рисунке 1 показан условно ЦСП и его основные функции при первичной обработке аналоговых сигналов в СРВ.

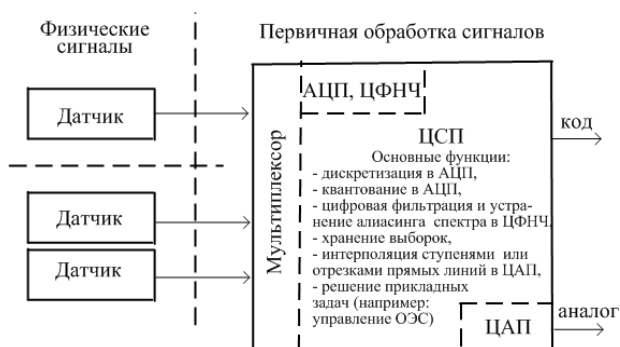


Рис. 1. Общая схема первичной обработки сигнала

Эти операции определяют требования к процедурам дискретизации времени и восстановления сигнала по выборкам [3–7], которые следуют из особенностей проектирования, применения и эксплуатации автономных СРВ с ЦСП:

– величина равномерного интервала дискретизации сигнала (функции) по времени находится по детерминированным выражениям, зависит от типа аппроксимации сигнала по выборкам и необходимой точности его восстановления. При этом адаптирующая аппроксимация с переменным шагом дискретизации и стохастические формулы, как правило, не применяются;

– аппроксимацию сигнала по выборкам из него осуществляют ступеньками или отрезками прямых линий и редко используют функцию  $\text{sinc}(t)$  [5] по причине больших временных задержек;

– обработку информации с датчиков и выдачу сигналов управления на исполнительные органы и в контур отрицательной обратной связи СРВ выполняют максимум за один или два шага дискретизации времени на ЦСП;

– сохраняют значения сигнала без искажений в точках осуществления выборок из сигнала при его восстановлении.

Одним из основных физических параметров сигналов является частота среза  $f$  спектра [6, 7] или частота гармонической полуволны  $f_c = 2f$ , где индекс «с» означает признак «согласовано». Для предотвращения потери информации о сигнале при фильтрации сигнала в ЦФНЧ эту частоту принимают с превышением  $f_c = 2Kf$ . Коэффициент превышения  $K \approx 8\div 10$  определяют опытным путём. Для восстановления сигнала по равномерным выборкам в ЦСП СРВ применяют аппроксимацию ступенями или отрезками прямых линий.

К особым случаям можно отнести обработку сигналов (процесов), измерение частоты среза которых затруднено или отсутствует информация об их спектре. Это является неопределённостью объекта управления и его информационного описания. Такие средства и СРВ относят к робастным системам [3, 4] и применяют в разнообразных областях:

– геоакустическая эмиссия: одним из способов предсказания извержения вулканов является описание и систематизация геоимпульсов в амплитудно-временных координатах, выявление аномальных паттернов и их анализ для привязки к сейсмическим событиям [8];

– робототехника: для управления приводами манипулятора при копирующем типе управления [9], обеспечения перемещения схвата манипулятора из начального положения покоя в заданное конечное положение покоя за минимальное время [10];

– оптико-электронное наблюдение: для перехвата движущейся по предписанной траектории цели машиной Дубинса [11–14];

– нейронные сети: для обобщения модели химических взаимодействий между нейронами [15];

- ядерная медицина: для моделирования и дозиметрического планирования радиойодтерапии щитовидной железы [16];
- биотехнология, металлургия: для обеспечения качества продукта в условиях априорной неопределённости технологических параметров [6] процесса изготовления продукта и многое другое.

Модели процессов и сигналов, характеризующихся трудностями в определении спектра (СТОС), традиционно описывают в амплитудно-временной области: в автоматических системах график оптимального процесса управления задают в виде сопрягаемых парабол [17, 18]; моделируют равноускоренное движение манипулятора руки квадратичным трёхчленом [9, 10]; представляют сейсмические события в виде линейных степенных функций [8]. В качестве коэффициентов трёхчлена используют максимальные значения ускорения и скорости сигнала. Для сигналов СТОС определяют интервал дискретизации времени, используя два известных подхода: критерий наибольшего отклонения и, с существенным допущением, теорему НКШ. В настоящей статье предлагается новая компромиссная и точная модель.

**1.2. Критерий наибольшего отклонения.** Подход в виде критерия наибольшего отклонения (КНО) для определения величины интервала дискретизации времени  $T_p$ . [3, 6, 19] теоретически обосновал В.Н. Хлистунов, который применил для этой цели наибольшее значение остаточного члена формулы Лагранжа. КНО используют в измерительной технике и в других применениях ЦСП [3–7]. Достоинства применения критерия КНО для сигналов СТОС следующие:

Получены и обоснованы выражения КНО для определения интервалов дискретизации времени  $T_{p1} = \Delta/V$  и  $T_{p2} = (8\Delta/a)^{0.5}$ , в которых индекс « $p$ » означает параболическую (parabola) зависимость,  $\max^{(0)}(t) = \Delta$  - максимально допустимая погрешность аппроксимации сигнала ступенькой или отрезком линии по двум соседним выборкам,  $\max^{(1)}(t) = V$  - наибольшая скорость сигнала,  $\max^{(2)}(t) = a$  - наибольшее ускорение сигнала.

Для восстановления сигнала  $p(t)$  по выборкам из него через интервал времени  $T_{p1} = \Delta/V$  используется ступенчатая аппроксимация. Для интервала дискретизации  $T_{p2} = (8\Delta/a)^{0.5}$  используется линейная аппроксимация. Эти условия аппроксимации диктует формула Лагранжа.

Недостатки критерия наибольшего отклонения, которые не определены в [3, 6, 19]:

- Отсутствует связь величины граничной частоты  $f$  в спектре сигнала  $p(t)$  с максимальными значениями параметров  $\{V, a\}$  сигнала.
- Совместное рассмотрение выражений КНО  $T_{p1}$  и  $T_{p2}$  показывает, что  $T_{p1}$  зависит только от максимальной скорости  $V$  и погрешно-

сти  $\Delta$  ступенчатой аппроксимации сигнала по выборкам, а  $T_{p2}$  зависит только от максимального ускорения ( $a$ ) и погрешности  $\Delta$  линейной аппроксимации сигнала по выборкам. Зависимость  $T_{p2}$  одновременно от скорости и ускорения сигнала В.Н. Хлистуновым не получена. Это обусловлено тем, что его подход к получению КНО, заключается в использовании остаточного члена формулы Лагранжа и не позволяет (принципиально) получить необходимый результат.

в) Отсутствует возможность определения величины  $T_{pn}$  (если  $n \geq 3$ ) при условии восстановления сигнала при помощи ступенчатой или линейной аппроксимации, так как остаточный член формулы Лагранжа при  $n = 3$  содержит максимальную величину третьей  $\max p^{(3)}(t) = R$  производной от сигнала. При этом аппроксимация осуществляется квадратичными парабололами по трём точкам, а не отрезками прямых линий или ступеньками. Подобный недостаток препятствует определению величины шага  $T_{pn}$  дискретизации сигнала  $p(t)$  по времени, если  $n \geq 3$ .

Недостаток б) КНО устранен автором в статье [20], где получено выражение (математическая модель) в виде обобщенного критерия наибольшего отклонения (ОКНО) для линейной аппроксимации сигнала  $p(t)$  отрезком прямой линии по двум точкам

$$T_{p2} = \frac{2\Delta}{V} + \frac{V}{a},$$

где при  $V = (2\Delta a)^{0.5}$  это выражение преобразуется в КНО  $T_{p2} = (8\Delta/a)^{0.5}$ , для ступенчатой аппроксимации берём  $T_{p1} = 0.5T_{p2}$ ,  $a \rightarrow \infty$ , получаем КНО  $T_{p1} = \Delta/V$ . Выражение  $V = (2\Delta a)^{0.5}$  названо условием согласования максимальных значений параметров  $\{\Delta, V, a\}$  сигнала  $p(t)$ .

Общим недостатком применения степенных приближений и модели ОКНО является отсутствие математической связи с частотными характеристиками сигналов и процессов типа СТОС или с математическими моделями, использующими эти частотные характеристики.

**1.3. Теорема Найквиста, Котельникова, Шеннона.** Второй подход к определению интервалов дискретизации времени традиционно определен теоремой НКШ (Найквиста, Котельникова, Шеннона) [21-23]. Он основан на частотных свойствах сигналов и процессов, свободен от общего недостатка критериев КНО и ОКНО.

Теорема НКШ (теорема отсчетов) [21] доказана К. Шенноном на основе теоремы В.А. Котельникова [22, 6] и работы Г. Найквиста [23, 3] и используется в теории и технике связи:

**Теорема НКШ:** Если функция не содержит частот выше  $f_{\Gamma}$ , она полностью определяется своими мгновенными значениями в моменты, отстоящие друг от друга на  $1/(2f)$  сек.

Интервал времени  $1/(2f)$  назван К. Шенноном [21] интервалом Г. Найквиста [23]. Недостатки теоремы НКШ при решении задач в управляющих системах СРВ следуют из процедур её практического использования для дискретизации и восстановления сигналов [21]:

а) Восстановление сигнала происходит в течение большого времени  $T_{\Phi}$  существования этого звукового сигнала с последовательным преобразованием  $\sin c(t)$  и суммированием всех мгновенных значений (выборки), которые были сделаны из этой функции через интервалы времени кратные  $T_s$ . При этом заранее известно, что справедливо неравенство  $T_{\Phi} \gg T_s$ . В СРВ большие задержки при обработке сигналов во времени не допустимы.

Подробнее: в устройстве восстановления функции по ее отсчетам в каждой точке отсчета  $nT_s$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ ) на интервале времени  $T_{\Phi}$  помещают импульс с амплитудой, равной величине каждого отсчета, на место этого отсчета, осуществляют последовательное преобразование этого импульса по передаточной характеристике фильтра нижних частот, результаты преобразований накапливают в течение интервала времени  $T_{\Phi}$  и получают исходную функцию.

Математически процесс преобразования и восстановления сигнала  $p(t)$  (звукового сигнала) описывается рядом В.А. Котельникова [22, 6], который подобен гармоническому ряду Фурье и является сложным с точки зрения количества необходимых вычислительных операций для его реализации. Выражения для ступенчатой и линейной аппроксимации (для восстановления сигнала по выборкам из него) существенно проще в математическом описании и реализации.

б) Применяемые в практике разработки и реализации СРВ методы ступенчатой и линейной аппроксимации не используются и не упоминаются при доказательстве теоремы НКШ [21, 22].

в) В теореме НКШ для определения  $T_s$  используется только граничная частота  $f$  в спектре частот сигнала, а остальные параметры  $\max\{\Delta, V, a\}$  сигнала  $p(t)$  не используются.

г) На практике [5] и в теории [3, 6] при использовании теоремы НКШ и ступенчатой или линейной аппроксимации сигнала по выборкам обычно используют эмпирическое соотношение  $f_s = (8 \div 10)2f$ , которое является приблизительным и не имеет строгого теоретического обоснования. Это обусловлено большой популярностью и известностью теоремы НКШ и делает погрешность расчётов неопределённой величиной.

В связи с этими и прочими недостатками нерационально определять интервал дискретизации сигнала  $T_s$  по теореме НКШ при осуществлении точных инженерных расчетов, при использовании ступенчатой и линейной аппроксимации для восстановления сигнала  $p(t)$ . В.Н. Хлистуновым [24] сделан справедливый вывод о необходимости использования теоремы НКШ только в теории связи (радиотехнике) для восстановления речевого сигнала, но не в системах измерения сигналов и управления в реальном времени.

**1.4. Постановка задачи исследования.** В настоящей статье предложена и рассмотрена модель сигнала в амплитудно-временной области в виде гармонической полуволны (и её новых модификаций). Описаны основные свойства модели, которые позволяют установить связь её параметров с амплитудно-частотными параметрами сигнала. Для этого получены выражения, связывающие математически два типа описания сигналов. Гармоническая полуволна является половиной волны частоты среза  $f$  спектра (повторяется с частотой  $f_c = 2f$ ). Кроме наибольшего параметра  $f_c$  она характеризуется наибольшей скоростью сигнала  $\max p^{(1)}(t) = V$ , наибольшим ускорением сигнала  $\max p^{(2)}(t) = a$ . Амплитуда гармонической полуволны  $\max p^{(0)}(t) = \Delta$  является максимально допустимой погрешностью аппроксимации сигнала ступенькой или отрезком линии по двум соседним выборкам. Далее покажем, что гармоническая полуволна является универсальной моделью для описания в амплитудно-частотной области и в амплитудно-временной области процессов и сигналов и связывает две группы максимальных величин параметров сигнала  $\max\{\Delta, f_c\}$  и  $\max\{\Delta, V, a, T_c\}$ , где  $T_c = 1/f_c$  – временной интервал полуволны. Первая версия подобной модели предложена и применена автором при разработке периферийных и сетевых устройств ЭВМ «Эльбрус-90микро» [25]. Развитием этой модели являются составные полуволны, которые являются общим случаем гармонических полуволн. При обработке сигналов, характеризующихся трудностями в определении спектра (СТОС) предлагается по замеренным (известным) параметрам такого сигнала  $\max\{\Delta, V, a\}$  определить временной интервал полуволны  $T_c = 1/f_c$ . Для получения новых выражений (моделей) применим величины  $T_c$  или  $f_c$  и сформулированные ранее свойства и выражения для двух классов полуволн.

В качестве основного инструмента сравнения различных моделей полуволн используем условие согласования параметров сигнала (УСП). Максимальные параметры сигнала могут быть согласованными между собой или входить в УСП в виде равенства. Параметры сигнала могут входить в неравенство, тогда УСП будет отражать процент согласования. Покажем существование и исследуем взаимозависимость

коэффициента УСП и величины интервала дискретизации времени сигнала. Сравним величины интервалов дискретизации времени  $T_c$  согласованных гармонических полувольт [26] и предложенных новых моделей для согласуемых составных полувольт.

Модели и выражения будут полезны разработчикам СРВ для определения обоснованной величины интервала дискретизации времени сигнала (процесса) и, в связи с этим, для обеспечения оптимальной загрузки ЦСП при разработке СРВ с ЦСП.

## **2. Согласованная модель гармонической полувольты, её свойства и постановка задачи исследования**

**2.1. Два простейших частных случая нахождения шага дискретизации времени сигнала.** Уравнение простейшей гармонической полувольты [26]:

$$p(t) = \Delta \sin \omega t, \quad (1)$$

где  $0 \leq t \leq T_c$ ,  $T_c = T/2 = 1/2f$  – интервал Найквиста,  $f$  – частота среза в спектре сигнала  $p(t)$  после фильтрации в ЦФНЧ,  $T$  – период частоты среза,  $\omega = 2\pi f$  – круговая частота,  $\Delta$  – амплитуда гармонической полувольты или максимальная погрешность линейной аппроксимации двух выборок из полувольты в моменты времени  $t = 0$  и  $t = T_c$ .

Первая производная ( $i = 1$ ) от гармонической полувольты:

$$p^{(i=1)}(t) = \omega \Delta \cos \omega t, \quad (2)$$

где ( $i$ ) – порядок производной,  $1 \leq i \leq n$ . Вторая ( $i = 2$ ) и третья ( $i = 3$ ) производные от гармонической полувольты:

$$p^{(i=2)}(t) = -\omega^2 \Delta \sin \omega t, \quad p^{(i=3)}(t) = -\omega^3 \Delta \cos \omega t. \quad (3)$$

Гармоническая полуволна и две производные от неё изображены на рисунке 2.

Выражение (1) (гармоническая полуволна) описывает математически половину  $T_c = T/2 = 1/2f$  периода  $T$  частоты среза  $f$  в спектре сигнала  $p(t)$ . Частота  $2f$  широко используется в теории связи, управления и в информатике [4–6].



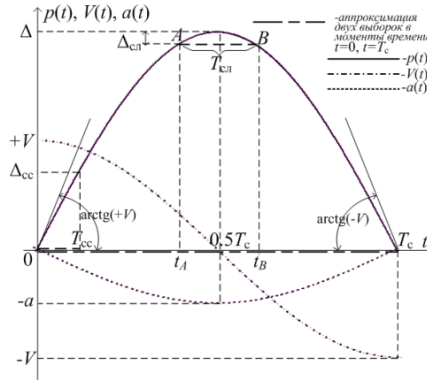


Рис. 2. Согласованная, гармоническая полуволна

Первая выборка из сигнала  $p(t)$  осуществлена в момент времени  $t = 0$ , вторая – в момент времени  $t = T_c = T/2$ . Линейная интерполяция между двумя выборками изображена двух штриховой линией. Погрешность такой интерполяции  $\Delta$  достигает максимального значения в точке  $(0.5T_c, \Delta)$ , которая является вершиной гармонической полуволны. Проходящая через вершину вертикальная линия  $t = 0.5T_c = 0.25T$  служит её осью симметрии. Связь круговой частоты  $\omega$  и интервала гармонической полуволны  $T_c$  запишем в виде выражения

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{T_c}. \quad (4)$$

Определим интервал гармонической полуволны  $T_c$  через максимальные параметры сигнала, которые должны быть измерены при исследовании спектра сигнала  $p(t)$  или получены при обработке результатов обследования объекта управления, если сигнал является СТОС.

В выражение первой производной (2) подставим моменты времени выборок из сигнала  $p(t)$ :  $p(t = 0) = 0$  и  $p(t = T_c) = 0$  и приравняем двум её максимальным значениям:  $\max p^{(1)}(t = 0, t = T_c) = |\pm V|$ , учтём (4), получим:

$$T_{c1} = \pi \frac{\Delta}{V}, \quad (5)$$

где индекс  $(i = 1)$  из (2) переходит в индекс  $T_{c1}$  при получении (5).

В выражение второй производной (3) подставим момент времени  $(t = 0.5T_c)$ , при котором наступает максимум ускорения сигнала

$p(t)$  и приравняем её максимальному значению:  $\max p^{(2)}(t = 0.5T_c) = |-a|$ . Используем (4), получим цепочку равенств:

$$T_{c1} = \pi \frac{\Delta}{V} = T_{c2} = \pi \frac{V}{a} = T_{c2} = \pi \sqrt{\frac{\Delta}{a}}. \quad (6)$$

Аналогично (6), при измеренном значении  $\max p^{(3)}(t = 0, t = T_c) = |\pm R|$ , можно записать более длинную цепочку равенств:

$$T_{c1} = \pi \frac{\Delta}{V} = T_{c2} = \pi \frac{V}{a} = T_{c2} = \pi \sqrt{\frac{\Delta}{a}} = T_{c3} = \pi \frac{a}{R} = T_{c3} = \pi \sqrt[3]{\frac{\Delta}{R}}. \quad (7)$$

**2.2. Общие выражения для нахождения интервала гармонической полуволны.** Применим математическую индукцию к выражениям (5), (6), (7) и запишем цепочку равенств в общем виде:

$$T_{ci} = \pi \frac{\max p^{(i-1)}(t)}{\max p^{(i)}(t)} = \pi \left[ \frac{\Delta}{\max p^{(i)}(t)} \right]^{1/i}, \quad (8)$$

где  $1 \leq i \leq n$ ,  $\max p^{(0)}(0.5T_c) = \Delta$ ,  $\max p^{(1)}(0) = V$ ,  $\max p^{(2)}(0.5T_c) = -a, \dots$  Преобразование первых пар звеньев цепочек равенств (6) и (7) даёт условие согласования максимальных параметров (УСП) сигнала:  $V^2 = \Delta a$ , или условие справедливости равенств звеньев цепочек между собой. Можно записать общее выражение для определения УСП:

$$\max p^{(i)}(t) = \sqrt{\max p^{(i-1)}(t) \times \max p^{(i+1)}(t)}, \quad (9)$$

где  $1 \leq i \leq (n-1)$ ,  $n \geq 2$ . Из второй части выражения (8) и выражения (4) запишем выражение для определения максимальных временных параметров гармонической полуволны:

$$\max p^{(i)}(t) = \Delta (2\pi f)^i \quad \text{или} \quad \omega = 2\pi f = \left( \frac{\max p^{(i)}(t)}{\Delta} \right)^{1/i}, \quad (10)$$

где при  $(i = 1) \omega = V/\Delta$ , при  $(i = 2) \omega = (a/\Delta)^{1/2}$ , при  $(i = 3) \omega = (R/\Delta)^{1/3}$ .

**2.3. Свойства согласованных гармонических полувольт.** Записанные выражения и рисунок 2 позволяют сформулировать основные свойства моделей, которые используем далее:

**Свойство 1.** (Аксиома математического подобия) Гармоническая полуволна (1) сигнала  $p(t)$  имеет полный комплекс частотно-временных и амплитудных параметров  $\{f_c, \Delta, \max p^{(i)}(t), \text{ где } 0 \leq i \leq n\}$ , которые имеет сигнал  $p(t)$ , поэтому может быть использована как математическая модель для исследования зависимостей максимальных величин параметров сигнала  $p(t)$  между собой.

**Свойство 2.** (Аксиома линейной аппроксимации). Любой сигнал  $p(t)$ , состоящий из гармоник частот от 0 до  $f$ , можно восстановить при помощи линейной аппроксимации с максимальной погрешностью  $\Delta$  равной амплитуде гармоники частоты  $f$  при помощи выборок, следующих друг за другом через  $1/(2f)$  секунд, это следует из описания модели гармонической полуволны (1) и рисунка 2.

**Свойство 3.** В области максимального ускорения гармонической полуволны  $[\max p^{(2)}(t = 0.5T_c) = a]$  относительная погрешность линейной аппроксимации соседних выборок из этой полуволны максимальна, относительная погрешность ступенчатой аппроксимации соседних выборок из этой полуволны минимальна (1), (2), (3), [6].

**Свойство 4.** В областях максимальной скорости гармонической полуволны  $[\max p^{(1)}(t=0, t=T_c)=\pm V]$  относительная погрешность линейной аппроксимации соседних выборок из этой полуволны минимальна, относительная погрешность ступенчатой аппроксимации соседних выборок из этой полуволны максимальна (1), (2), (3), [6].

**Свойство 5.** Условие согласования параметров (9) является равенством, это указывает на факт: любая измерительная погрешность в замерах параметров амплитуды  $\Delta$  и частоты  $f$ , приводит к искажению величины интервала гармонической полуволны (8).

**Свойство 6.** Ступенчатая и линейная аппроксимации соседних выборок в области максимального ускорения  $[\max p^{(2)}(t = 0.5T_c) = a]$  имеют равные значения погрешности аппроксимации, если частота повторения выборки, аппроксимируемой ступенью в два раза выше частоты выборки, аппроксимируемой отрезком прямой линии.

**Свойство 7.** Максимальная производная порядка  $(i)$  от сигнала  $p(t)$  или гармонической полуволны является средним геометрическим максимальных производных порядков  $(i - 1)$  и  $(i + 1)$  (9).

**Свойство 8.** Если замерить параметры гармоники частоты среза спектра сигнала: амплитуду  $\Delta$  и частоту  $f$  и подставить их значения в первый вариант (10), то можно рассчитать  $(1 \leq i \leq n)$  величин параметров  $\max p^{(i)}(t)$  сигнала  $p(t)$  или гармонической полуволны.

**Свойство 9.** (обратное Свойству 8). Если амплитуду  $\Delta$  и частоту  $f$  гармонической полуволны замерить затруднительно из-за отсутствия информации о спектре (СТОС), то можно измерить максимально допустимое отклонение  $\Delta$  объекта от двух соседних выборок, максимальную скорость  $V$  отклонения и по второму варианту (10) определить эквивалентную граничную круговую частоту  $\omega$ .

#### 2.4. Основные недостатки модели гармонической полуволны, направления их устранения или задачи исследования.

**Недостаток 1.** Например, поверхность УСП  $V = (\Delta a)^{0.5}$ , изображённая на рисунке 3 иллюстрирует Свойство 5.

Для устойчивого согласования параметров сигнала необходимо, чтобы эта поверхность делила пространство  $\Delta, V, a$  на две части по признаку согласования и рассогласования параметров сигнала. Тогда разрешенная комбинация в виде  $0 \leq V \leq (\Delta a)^{0.5}$  будет находиться в полупространстве ниже поверхности  $V = (\Delta a)^{0.5}$ .

Покажем далее, что такой результат даёт исследование зависимости величин интервалов двух вариантов составных полуволн от величины коэффициента согласования параметров (УСП) этих моделей.

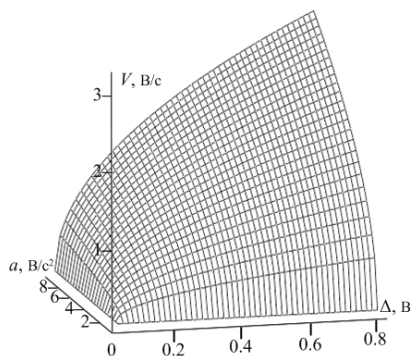


Рис. 3. Место точек согласованных параметров сигнала (процесса) в виде параболической поверхности

**Недостаток 2.** Из аксиомы по Свойству 2 и выражения (10) следует: величина максимальной погрешности  $\Delta$  (после восстановления сигнала  $p(t)$  по выборкам при помощи ступенчатой и линейной аппроксимации) равна амплитуде  $\Delta$  гармоники частоты среза  $f$  в спектре частот сигнала  $p(t)$ , которая осталась в составе сигнала после низкочастотной фильтрации и может быть достаточно большой.

Этот недостаток не позволяет обосновать или уточнить эмпирическое соотношение  $T_c \leq (1/2f)/(8 \div 10)$  для линейной интерполяции, которое явно приводит к уменьшению интервала дискретизации по сравнению с интервалом гармонической полуволны  $(1/2f)$  в  $(8 \div 10)$  раз.

Используем Свойство 1 и процедуру равномерной дискретизации времени интервалов гармонической полуволны и интервалов предлагаемых, составных полуволн для получения математических выражений, заменяющих и уточняющих это соотношение.

### 3. Представление моделей составных полуволн, согласуемых по величине максимальной скорости сигнала.

**3.1. Модель составной полуволны при постоянной скорости на начальном и конечном её участках.** Для устранения Недостатка 1 используем составную полуволну, графическая модель которой изображена на рисунке 4. Предположим, что для сигнала или процесса  $p(t)$  при обследовании объекта управления измерены три параметра  $\Delta$ ,  $V_C$ ,  $a$ , при этом величина максимальной скорости  $V_C = \text{const} \leq V = (\Delta a)^{0.5}$ , а частота  $f$  неизвестна из-за свойства сигнала СТОС. Другими словами УСП сигнала не выполняется, а параметры гармонической полуволны являются рассогласованными. Для согласования траектории используем коэффициент  $k$  и согласуем наибольшую скорость изменения  $V_C$  с параметрами  $\Delta$ ,  $a$  сигнала:

$$V_C = kV = k(\Delta a)^{0.5}, \quad (11)$$

где  $0 \leq k \leq 1$ . Из выражения (11)  $V_C = \text{const} \leq V = (\Delta a)^{0.5}$  следует:

**Свойство 10.** *Трёхмерная область  $0 \leq V(t) \leq (\Delta a)^{0.5}$  располагается ниже поверхности  $V = (\Delta a)^{0.5}$  (см. рисунок 3), включает в себя эту поверхность и является областью существования модели траектории составной полуволны.*

Графическая модель траектории составной полуволны характеризуется максимальной скоростью  $V_C$ , которая постоянна в начале и конце траектории  $\pm V_C = \pm \text{const}$ . Поэтому эту полуволну назовём «полуволной, согласуемой двумя отрезками прямых линий» и введём индекс «л» в обозначение величины интервала составной полуволны  $T_{л}$ .

Первая выборка из составной полуволны осуществлена в момент времени  $(-t_{к0})$ , вторая – в момент времени  $(T_c + t_{к0})$  (см. рисунок 4).

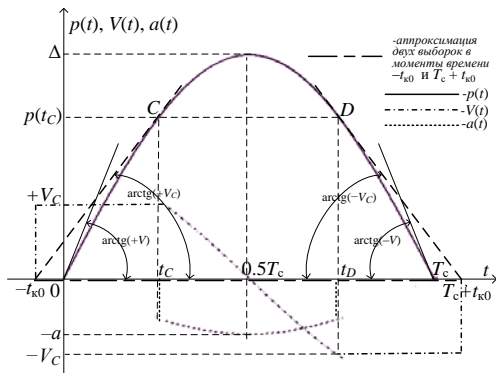


Рис. 4. Составная полуволна, согласуемая двумя отрезками прямых линий,  $\pm V_C = \pm \text{const}$

Таким образом, интервал составной полуволны:

$$T_{\text{л}} = T_c + 2|t_{\text{к0}}|. \quad (12)$$

Между двумя выборками сигнал отклоняется по составной полуволне, состоящей из трёх частей:

- на интервале времени  $(-t_{\text{к0}} \leq t \leq t_c)$  с постоянной скоростью  $V_C \leq (\Delta a)^{0.5}$ , по прямой линии касательной к гармонической полуволне синусоиды (1) в точке C;
- между точками касания C и D линий касательных к синусоиде (1) по гармонической полуволне (1);
- на интервале времени  $(t_D \leq t \leq T_c + t_{\text{к0}})$  с постоянной скоростью  $-V_C \geq -(\Delta a)^{0.5}$ , по прямой линии касательной к (1) в точке D.

Для нахождения интервала полуволны  $T_{\text{л}}$  по выражению (12) определим момент времени  $t_{\text{к0}}$  и найдём касательную к полуволне синусоиды (1) в точке C. Первую производную от (1) в точке C приравняем скорости  $V_C$ , учтём (11)  $V_C = kV$ , получим:

$$t_c = \frac{1}{\omega} \arccos k \quad \text{и} \quad p(t_c) = \Delta \sqrt{1 - k^2}.$$

Пересечение касательной с осью координат  $(0, t)$  на рисунке 4 даёт:

$$t_{\text{к0}} = \frac{1}{\omega} \left[ \sqrt{\frac{1}{k^2} - 1} - \arccos k \right].$$

Преобразуем это выражение – используем (4)  $\omega = \pi/T_c$  и (11)  $V_C = kV$ . Подставим преобразованное  $t_{к0}$  в (12) и получим:

$$T_{л} = T_c \left[ 1 + \frac{2}{\pi} \left( \sqrt{\frac{1}{k^2} - 1} - \arccos k \right) \right], \quad (13)$$

где  $0 \leq k \leq 1$ . Для сравнения величин интервалов для согласованной гармонической полуволны  $T_c$  и согласуемой линией составной полуволны  $T_{л}$  (13) введем относительные величины интервалов рассматриваемых полуволн  $\tau_{л} = T_{л} / T_c$  и  $\tau_c = T_c / T_c = 1$ . Преобразуем (13), получим графики  $\tau_{л}$  и  $\tau_c$  (см. рисунок 5).

Графики показывают, что при уменьшении коэффициента согласования  $k$  или уменьшении максимальной скорости изменения сигнала  $V_C = kV$  происходит существенное увеличение интервала времени составной полуволны  $T_{л}$ . Этот результат позволяет сформулировать новое информационное свойство:

**Свойство 11.** Уменьшение величины коэффициента  $k$  или увеличение степени рассогласования величин временных максимальных значений параметров  $\max\{\Delta, V, a\}$  сигнала или процесса  $p(t)$  приводит к увеличению интервала времени  $T_{л}$  составной полуволны. При этом максимальная абсолютная погрешность измерения равна амплитуде гармонической полуволны  $\Delta$  или неизменна.

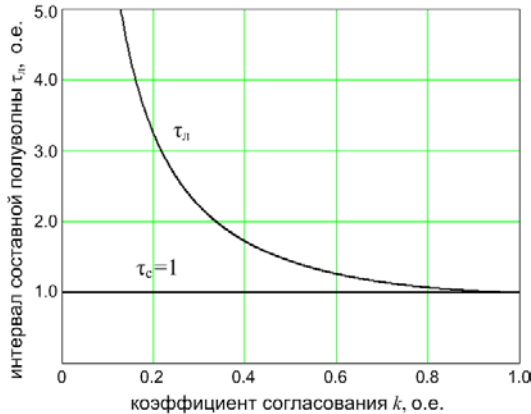


Рис. 5. Зависимость относительного интервала составной полуволны от коэффициента  $k$  согласования параметров сигнала

Для проверки общности моделей (13) и (6) зададим  $k = 1$  в (13) или выполним условие согласования. Получим  $T_{\Delta}(k = 1) = T_C$ , что позволяет сформулировать свойство:

**Свойство 12.** Математическая модель гармонической полуволны с согласованными временными параметрами сигналов (процессов) является частным случаем модели составной полуволны, согласуемой двумя симметричными отрезками касательных прямых.

**3.2 Модель составной полуволны при переменной скорости на начальном и конечном участках.** Графическая модель составной полуволны с переменной скоростью изображена на рисунке 6.

Согласующие участки этой полуволны описываются двумя симметричными частями гармонической функции, где нижний индекс «к» обозначает касание левой части гармонической функции в точке С к гармонической полуволне (1):

$$p(t) = \Delta_k \sin(\omega_k t + \varphi_0), \tag{14}$$

где  $\Delta_k$ ,  $\varphi_0$ ,  $\omega_k$  – соответственно, амплитуда, фаза и круговая частота составной полуволны,  $(-t_{k0}) \leq t \leq 0.5T_C$ ,  $\varphi_0/\omega_k = t_{k0}$ ,  $\omega_k = 2\pi/T_k$ ,  $\omega_k = V_k/\Delta_k$ .

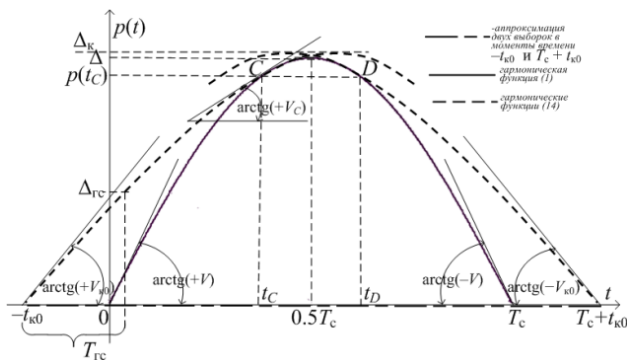


Рис. 6. Составная полуволна, согласуемая двумя гармоническими линиями,  $\pm V(t) = \pm var$

Такая полуволна согласована гармоникой, поэтому введём индекс «г» в обозначение интервала времени полуволны  $T_{\Gamma}$ .

Предположим, что для сигнала или процесса  $p(t)$  получены три параметра  $\Delta$ ,  $V_C$ ,  $a$ . Причём величина максимальной скорости в точке С равна  $V_C = kV = k(\Delta a)^{0.5}$ , где  $0 \leq k \leq 1$ . Процесс отклонения полувол-



ны от прямой, аппроксимирующей две соседние выборки в моменты времени  $(-t_{к0})$  и  $(T_c + t_{к0})$ , происходит по трём участкам:

- в интервале времени  $(-t_{к0} \leq t \leq t_c)$ , по левой части гармоники (14) от точки  $(-t_{к0})$  до точки  $C$ , при этом скорость  $V_C \leq V_{к0} \leq V = (\Delta a)^{0.5}$ ;
- между точкой касания  $C$  гармонической функции (14) к синусоиде (1) в момент времени  $t = t_c$  до точки её пересечения с осью симметрии в момент времени  $t = 0.5T_c$ ;
- в интервале времени  $(0.5T_c \leq t \leq T_c + t_{к0})$  симметрично второму и первому участкам относительно оси симметрии  $t = 0.5T_c$ .

Интервал времени составной полуволны  $T_r$  можно определить по выражению (12) с учётом величины фазы (14) гармонической траектории наибольшего отклонения  $|t_{к0}| = \varphi_0/\omega_k$  и  $\omega_k = 2\pi/T_k$ :

$$T_r = T_c + \frac{1}{\pi} T_k \varphi_0 = T_c \left( 1 + \frac{2}{\pi} \varphi_0 r \right), \quad (15)$$

где  $r = T_k/2T_c$ ,  $T_k \geq T = 2T_c$ ,  $r \geq 1$ . Для определения  $\varphi_0$  воспользуемся равенством скоростей  $V_C$  в точке взаимного касания  $C(t_c, p(t_c))$  гармонических функций (1) и (14). От этих выражений возьмём производные по времени, используем выражения подобные (11)  $V_C = kV$ ,  $V_C = mV_{к0}$ . Применим выражение (4)  $\omega = \pi/T_c$  и ему подобное выражение  $\omega_k = 2\pi/T_k$ , получим:

$$\varphi_0 = \arccos m - \frac{1}{r} \arccos k. \quad (16)$$

Найдём связь между величинами коэффициентов согласования параметров сигнала  $k$ ,  $m$  и коэффициентом  $r$ .

Выражение (1) при  $t = t_c$  запишем в виде  $\Delta \sin \omega t_c = p(t_c)$  и последовательно преобразуем его по известной тригонометрической формуле  $\arcsin x = \arccos[(1 - x^2)^{0.5}]$ , получим:

$$\omega t_c = \arcsin \left[ p(t_c)/\Delta \right] = \arccos \left[ 1 - (p(t_c)/\Delta)^2 \right]^{0.5}. \quad (17)$$

Первая производная от (1) при  $t = t_c$  равна скорости  $V(t_c) = V_C$ , из (2) запишем:  $\Delta \omega \cos \omega t_c = V_C$ . В это выражение подставим вторую часть выражения (17) и применим тригонометрическую формулу  $\cos \arccos x = x$ . Получим выражение  $p^2(t_c) = \Delta^2 - (V_C/\omega)^2$ , в которое последовательно подставим  $\omega = V/\Delta$  из (10) и  $V_C = kV$  из (11), в итоге получим:  $p^2(t_c) = \Delta^2(1 - k^2)$ .

Аналогично преобразуем выражение (14), при этом используем  $\omega_k = V_{k0}/\Delta_k$  из (10), и  $V_C = mV_{k0}$  из (11). Получим выражение:  $p^2(t_C) = \Delta_k^2(1 - m^2)$ . Два выражения для нахождения  $p^2(t_C)$  преобразуем совместно и получим:

$$\frac{\Delta^2}{\Delta_k^2} = \frac{1 - m^2}{1 - k^2} = M^2. \quad (18)$$

Определим отношение амплитуд составной траектории отклонения  $\Delta$  и  $\Delta_k$  через коэффициенты согласования параметров сигнала  $m$ ,  $k$  и коэффициент  $r$ . Для этого последовательно применим выражения (10)  $\Delta = V/\omega$ ,  $\Delta_k = V_{k0}/\omega_k$ , выражения (4)  $\omega = \pi/T_C$ ,  $\omega_k = 2\pi/T_k$ , выражения  $V_C = kV$ ,  $V_C = mV_{k0}$ , получим частное  $\Delta/\Delta_k = m/kr$ . Подставим это выражение в (18) и выделим коэффициент согласования  $r$ , который в соответствии с (15)  $r \geq 1$ :

$$r = \frac{m}{k} \sqrt{\frac{1 - k^2}{1 - m^2}} = \frac{m}{kM} \geq 1. \quad (19)$$

Из (19) следует:  $m \geq k$ . Выражение (19) умножим на (16) ( $\varphi_0 \times r$ ) и результат подставим в (15). Введем относительную величину интервала гармонической составной полуволны  $\tau_r = T_r/T_C$ . В результате преобразований получим окончательное выражение:

$$\tau_r = \frac{T_r}{T_C} = 1 + \frac{2}{\pi} \left( \frac{m}{k} \sqrt{\frac{1 - k^2}{1 - m^2}} \arccos m - \arccos k \right), \quad (20)$$

где  $0 \leq m \leq 1$ ,  $m \geq k$ . Построим графики  $\tau_r$  для  $m = 0.2$ ,  $m = 0.5$ ,  $m = 0.8$  и для наглядности совместим их с графиками  $\tau_l$  и  $\tau_c$  (см. рисунок 7).

Каждый график  $\tau_r$  определён в своей верхней части ( $\tau_r \geq \tau_c = 1$ ), при коэффициенте согласования из замкнутого интервала  $0 \leq k \leq m$ , что следует из (19) и (15). Правые границы определения лежат в точках пересечения графика  $\tau_c = 1$  с каждым из трёх графиков зависимостей  $\tau_r = F(k, m = \text{const})$ .

Найдём предел выражения (20)  $\lim_{\tau_r(m \rightarrow 1)} = 1$ , по правилу Лопиталя, при этом раскроем неопределённость  $0/0$ , получим выражение (13). Из этого следует свойство:

**Свойство 13.** Математическая модель составной полуволны с согласованными временными параметрами сигналов (процессов) при

помощи двух отрезков прямых линий является частным случаем модели составной полуволны, согласуемой двумя симметричными частями гармонической функции.

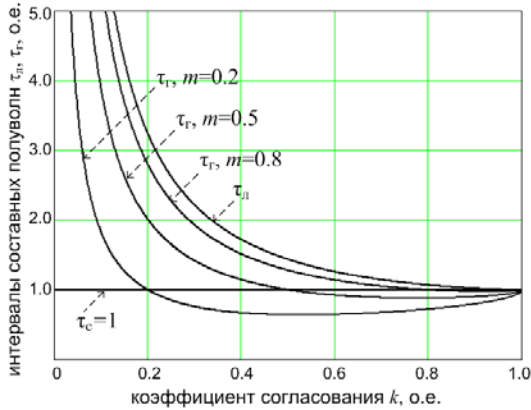


Рис. 7. Зависимости относительных интервалов составных полуволн от коэффициента  $k$  согласования параметров сигнала

**4. Модели дискретизации полуволн по времени.** Для избыточной фильтрации сигнала применяют эмпирическое соотношение  $T_c \leq (1/2f)/(8 \div 10)$ , которое явно приводит к уменьшению интервала дискретизации по сравнению с интервалом Найквиста (см. Недостаток 2, пункт 2.4). Кроме этого по Свойствам 3, 4 относительная максимальная погрешность аппроксимации соседних выборок из описанных полуволн зависит от типа аппроксимации. Учтём в дальнейшем эти обстоятельства при описании моделей.

**4.1. Модель дискретизации гармонической полуволны и восстановление её ступеньками.** Гармоническая полуволна согласована, имеет УСП ( $V = (\Delta a)^{0.5}$ ), изображена на рисунке 2. Первая выборка из полуволны произведена в момент времени  $t = 0$ . Предположим, что вторая выборка произведена не в  $t = T_c$ , а ранее: в момент времени  $t = T_{cc}$ , где первый индекс «с» означает согласованность параметров полуволны, второй индекс «с» означает аппроксимацию сигнала по выборкам ступеньками. При этом абсолютная погрешность ступенчатой аппроксимации сигнала или процесса  $p(t)$  составляет  $\Delta_{cc}$ . Используем Свойство 4. Связь времени и максимальной погрешности получим подстановкой в выражение (1) указанных величин:  $\Delta \sin \omega T_{cc} = \Delta_{cc}$ . Обозначим  $\delta_{cc} = \Delta_{cc}/\Delta$ , используем (4)  $\omega = \pi/T_c$ , получим

интервал дискретизации полуволны  $T_{cc} = (T_c/\pi)\arcsin\delta_{cc}$ . Погрешность аппроксимации  $\delta_{cc}$  выразим через коэффициент  $Q_{cc} = T_c/T_{cc}$  превышения частоты гармонической полуволны частотой равномерной дискретизации этой полуволны или сигнала при восстановлении сигнала ступеньками:

$$\delta_{cc} = \sin \frac{\pi}{Q_{cc}}. \tag{21}$$

На рисунке 8 изображён график  $\delta_{cc}$  для модели по выражению (21).

**4.2. Модель дискретизации составной полуволны, согласованной отрезками прямых линий.** Траектория изображена на рисунке 4. При обследовании объекта управления измерены три параметра  $(\Delta, V_C, a)$ , при этом  $(V_C \leq (\Delta a)^{0.5})$  или УСП сигнала не выполняется. Первая выборка из полуволны произведена в момент времени  $t = -t_{к0}$ , вторая выборка произведена не в момент времени  $t = (T_c + t_{к0})$ , а ранее: через интервал времени  $T_{лс}$  от первой выборки.

Из рисунка 4 следует  $T_{лс} = \Delta_{лс}/V_C$ . Зададимся необходимой относительной погрешностью аппроксимации  $\delta_{лс}$ :  $\Delta_{лс} = \delta_{лс}\Delta$ . Используем Свойство 4. Используем (11)  $V_C = kV$ , (10)  $\Delta/V = \omega$ , (4)  $\omega = \pi/T_c$ . В итоге получим:  $T_{лс} = \delta_{лс}/k\omega$ .

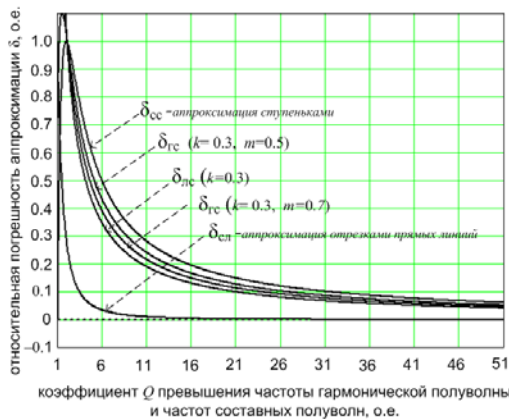


Рис. 8. Зависимость погрешности  $\delta$  ступенчатой и линейной аппроксимации от коэффициента  $Q$  превышения частоты гармонической полуволны и частот составных полуволн частотой дискретизации сигнала

Для записи коэффициента  $Q_{\text{лс}} = T_{\text{л}}/T_{\text{лс}}$  превышения частоты гармонической полуволны частотой равномерной дискретизации сигнала при восстановлении сигнала ступеньками воспользуемся (13), (4)  $\omega = \pi/T_{\text{с}}$ . Погрешность аппроксимации  $\delta_{\text{лс}}$  выразим через коэффициент  $Q_{\text{лс}}$ :

$$\delta_{\text{лс}} = \frac{k}{Q_{\text{лс}}} \left( \pi + 2 \sqrt{\frac{1}{k^2} - 1} - 2 \arccos k \right). \quad (22)$$

На рисунке 8 изображён график  $\delta_{\text{лс}}$  при  $k = 0.3$  для модели по выражению (22).

**4.3. Модель дискретизации составной полуволны, согласованной частями гармонической функции.** Траектория изображена на рисунке 6. При обследовании объекта управления измерены три параметра ( $\Delta$ ,  $V_{\text{с}}$ ,  $a$ ), при этом ( $V_{\text{с}} \leq (\Delta a)^{0.5}$ ) или УСП сигнала не выполняется. Первая выборка из полуволны произведена в момент времени  $t = -t_{\text{к0}}$ , вторая выборка из полуволны произведена не в момент времени  $t = (T_{\text{с}} + t_{\text{к0}})$ , а через интервал времени  $T_{\text{гс}}$  от первой выборки. Из рисунка 6:  $\delta_{\text{гс}} = \Delta_{\text{гс}}/\Delta$ , из (18)  $M = \Delta/\Delta_{\text{к}}$ . В выражении (14) примем  $\varphi_0 = 0$  или сдвинем начало гармонической функции в начало координат. Это упростит получаемые выражения и не повлияет на величину погрешности аппроксимации ступенькой. Определим из (14):  $\sin(\omega_{\text{к}} T_{\text{гс}}) = \delta_{\text{гс}} M$ , учтём из (14) и (15):  $\omega_{\text{к}} = 2\pi/T_{\text{к}} = \pi/rT_{\text{с}}$ . Запишем  $T_{\text{гс}} = (rT_{\text{с}}/\pi) \arcsin(\delta_{\text{гс}} M)$ .

Введём коэффициент  $Q_{\text{гс}} = T_{\text{г}}/T_{\text{гс}}$  превышения частоты составной полуволны, согласованной двумя гармоническими функциями, частотой её равномерной дискретизации, используем (20), получим:

$$\delta_{\text{гс}} = \sqrt{\frac{1-k^2}{1-m^2}} \sin \left( \frac{k}{mQ_{\text{гс}}} \sqrt{\frac{1-m^2}{1-k^2}} \left( \pi + 2 \frac{m}{k} \sqrt{\frac{1-k^2}{1-m^2}} \arccos m - 2 \arccos k \right) \right), \quad (23)$$

где  $0 \leq k \leq 1$ ,  $0 \leq m \leq 1$ ,  $m \geq k$ . На рисунке 8 изображены два графика  $\delta_{\text{гс}}$  при  $k = 0.3$ ,  $m = 0.7$  и при  $k = 0.3$ ,  $m = 0.5$  для модели (23).

**4.4. Модель дискретизации гармонической полуволны при восстановлении сигнала отрезками прямых линий.** Воспользуемся рисунком 2 и рассмотрим отрезок прямой  $[A, B]$ , который аппроксимирует полуволну Котельникова по двум соседним выборкам из нее в моменты времени  $t_A$  и  $t_B$ . Из рисунков 2, 4 и 6 следует:

**Свойство 14.** Все рассмотренные в этой статье варианты полувольты с согласованными и согласуемыми параметрами имеют одинаковую относительную погрешность линейной аппроксимации, так как для них справедливы Свойства 3 и 10 или все они имеют одинаковую геометрию вершины полувольты.

В соответствии со Свойством 14 на рисунке 8 приведён только один график с погрешностью от линейной аппроксимации  $\delta_{\text{сл}} = \Delta_{\text{сл}}/\Delta$ , где индекс «с» означает согласованность параметров гармонической полувольты, второй индекс «л» означает аппроксимацию гармонической полувольты или сигнала по выборкам отрезками прямых линий.

Отрезок  $[A, B]$  является горизонтальным участком аппроксимации и делится осью симметрии  $t = 0.5T_c$  на две равные части. Определим момент времени  $t_A$  начала отрезка. Воспользуемся коэффициентом  $Q_{\text{сл}} = T_c/T_{\text{сл}}$  превышения частоты гармонической полувольты:

$$t_A = 0,5T_c - 0,5T_{\text{сл}} = 0,5T_c(1 - 1/Q_{\text{сл}}). \quad (24)$$

В выражение (1) подставим  $t_A$  (24), учтем  $\omega = \pi/T_c$  из (4), получим  $p(t_A) = \Delta \sin[0.5\pi(1 - 1/Q_{\text{сл}})] = \Delta \cos(\pi/2Q_{\text{сл}})$  – выражение горизонтального отрезка прямой, проходящей через точки  $A, B$  (см. рисунок 2). Зависимость погрешности аппроксимации  $\Delta_{\text{сл}}(t)$  от времени  $t$  определим как разность выражения (1) и  $p(t_A)$ :

$$\Delta_{\text{сл}}(t) = \Delta \sin \omega t - \Delta \cos(\pi / 2Q_{\text{сл}}). \quad (25)$$

Выражение для максимального значения относительной погрешности восстановления  $\delta_{\text{сл}} = \Delta_{\text{сл}}/\Delta$  получим подстановкой  $t = 0.5T_c$  и (4)  $\omega = \pi/T_c$  в (25):

$$\delta_{\text{сл}} = 1 - \cos(\pi / 2Q_{\text{сл}}). \quad (26)$$

На рисунке 8 изображен график  $\delta_{\text{сл}}$  для модели по выражению (26), которая соответствует аппроксимации отрезками прямой линии равномерных выборок из сигнала или гармонической полувольты.

**5. Обработка результатов моделирования.** Для сравнения вариантов рассмотренных моделей приведена таблица 1 значений зависимости погрешности  $\delta_{\text{сс}}$  и  $\delta_{\text{сл}}$  аппроксимации от коэффициентов  $Q_{\text{сс}}$  и  $Q_{\text{сл}}$  для гармонической полувольты и также для составных полувольт.

Таблица 1. Связь коэффициента превышения частоты четырёх типов полувольт с величиной погрешности аппроксимации

		$Q_{cc} = Q_{lc} = Q_{rc} = Q_{cl}$ , о.е.						
		6	11	16	21	26	31	36
$\delta$ , о.е.	«сс»	0.5000	0.2620	0.1960	0.1210	0.1210	0.1010	0.0870
	«лс»	0.3480	0.1900	0.1310	0.1000	0.0800	0.0670	0.0580
	«рс»	0.4330	0.2410	0.1660	0.1270	0.1030	0.0860	0.0740
	«сл»	0.0340	0.0100	0.0048	0.0028	0.0018	0.0013	0.0010

Из таблицы 1 (см. строку 4) следует, что эмпирическое соотношение  $T_{cl} \leq (1/2f)/(8 \div 10)$  для линейной аппроксимации дает погрешность восстановления более 1%. Выражение  $T_{cl} \leq (1/2f)/(Q_{cl}=11)$  соответствует погрешности в 1%. Для обеспечения погрешности в 0.1% необходимо использовать выражение  $T_{cl} \leq (1/2f)/(Q_{cl}=36)$ .

Из выражения (21) и таблицы 1 (см. строку 1) следует, что эмпирическое соотношение  $T_{cc} \leq (1/2f)/(8 \div 10)$  для аппроксимации ступеньками дает погрешность восстановления более 30.9 %.

При использовании ступенчатой аппроксимации обнаруживается существенное превышение  $Q_{cc}$  частоты гармонической полувольты для всех типов наибольших отклонений над  $Q_{cl}$  (см. таблицу 2):

Таблица 2. Превышение частоты дискретизации четырёх типов полувольт для трёх типовых значений погрешности аппроксимации

$\min \delta$ , %	$Q_{cc}$ , о.е.	$Q_{lc}$ , о.е.	$Q_{rc}$ , $m=0.7$	$Q_{cl}$ , о.е.
10.0	31.363	20.907	23.839	3.483
1.00	314.154	209.069	238.610	11.095
0.10	3142.000	2091.000	2386.000	35.121

Результаты, приведённые в таблицах 1 и 2, определяют:

**Свойство 14.** Для выполнения точных преобразований сигналов с датчиков СВВ с ЦСС при минимальном количестве выборок выгодно применять только линейную аппроксимацию для восстановления сигналов, для чего расчёт величин интервалов равномерной дискретизации времени нужно проводить по выражениям (26) и (6):  $T_{cl} = T_{c2}/Q_{cl}$ .

**6. Пример использования моделей.** Рассмотрим две авиационные оптико-электронные системы (ОЭС) производителей России и Англии [27] с заведомо различными по величине паспортными параметрами для проверки достоверности моделей. Найдём частоту опроса датчика азимута ОЭС для обеспечения заданной погрешности аппроксимации равномерных выборок. По полученным выражениям оценим возможность применения моделей по назначению и сравним их между собой. Особенностью ОЭС является отсутствие спектра сигнала ази-

мута, поэтому используем максимальные паспортные параметры: скорость  $V$  и ускорение вращения  $a$  (см. столбцы 2 и 3 таблицы 3) [27]. Согласованная модель гармонической полуволны возникает в режиме реверса ОЭС, который выполняется до реализации алгоритмов машины Дубинса [11]. Основными этапами реверса являются:

- ОЭС на максимальной угловой скорости ( $+V$ , рад/с) следит за воздушным объектом ВО1;
- ОЭС переключают на режим слежения за ВО2, направление вектора скорости которого противоположно вектору движения ВО1;
- включается максимальное отрицательное угловое ускорение ( $-a$ , рад/с<sup>2</sup>) и через интервал времени (6)  $0.5T_c = 0.5\pi V/a$  (с) мгновенная скорость будет равна нулю  $V(0.5T_c) = 0$  (см. рисунок 1), угол «мгновенная» останова ОЭС (из (9) при  $i = 1$ ) будет равен  $\Delta = V^2/a$  (см. столбцы 6 и 7 таблицы 3);
- далее скорость вращения возрастает до величины  $V(T_c) = -V$ . Процесс подобен гармонической полуволне (см. рисунок 2, Свойство 9), поэтому полуволна (1) применена для моделирования ОЭС.

Таблица 3. Паспортные параметры, исходные данные и результаты моделирования для двух типов ОЭС

Марка ОЭС	Максимальные, паспортные параметры ОЭС [27]		Пример исходных данных моделей (заданы)		Расчётные характеристики ОЭС (6), (9) при $i = 1$		Результаты расчётов параметров гармонической полуволны и параметров составной полуволны с восстановлением сигнала по выборкам ступенями и отрезками прямых линий					
	Угловая скорость $V$ , рад/с	Угловое ускорение $a$ , рад/с <sup>2</sup>			Интервал реверса $T_{с2} = \pi V/a$ , с	Угол останова $\Delta = V^2/a$ , рад	сс (21)		лс (22)		сл (26)	
			$Q_{сст}$ о.е.	$T_{сст}$ ме			$Q_{лст}$ о.е.	$T_{лст}$ ме	$Q_{слст}$ о.е.	$T_{слст}$ ме		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
ГОЭС-4	1.047	1.745	0.01	0.3	1.885	0.628	314	6.0	209	20.0	11	170
Туре239	2.094	17.453	0.01	0.3	0.377	0.251	314	1.2	209	4.0	11	34

В таблице 3 (см. столбцы 4 и 5) заданы исходные данные моделей: погрешность восстановления  $\delta = 0.01$  для трёх моделей, рассогласование параметров  $k = 0.3$  для составной полуволны. В столбцах 8÷13 расположены результаты моделирования по выражениям (21), (22), (26), из которых следует, что ОЭС Туре239 по величине интервала реверса быстрее ОЭС ГОЭС-4 в пять раз и имеет угол останова меньше в 2.5 раза. Это обеспечивает большую оперативность при переключении в режиме сопровождения с одной цели на другую и определяет:

**Свойство 15.** Модели гармонических полуволн и составных полуволн определяются двумя интегральными характеристиками ОЭС интервалом реверса и углом «мгновенная» останова, которые можно определять через паспортные параметры угловую скорость и ускорение для оценки оперативности реакции ОЭС на смену цели.



**Свойство 16.** Коэффициент  $Q$  превышения величины частоты гармонической полуволны и составных полуволн величинами частот равномерной дискретизации зависит от типа полуволны (гармоническая полуволна или составная полуволна), типа равномерной аппроксимации (ступенька или отрезок прямой), величин максимальной, относительной погрешности аппроксимации.

В процессе эксплуатации ОЭС может произойти разряд аккумулятора, питающего ОЭС, что приведёт к снижению величины максимальной скорости в соответствии с (11). Примем  $k = 0.3$  в таблице 3 (см. столбцы 5, 10 и 11). В этом случае траектория ОЭС в режиме реверса соответствует выражению (22) или (23). Это, в обоих случаях (см. рисунок 7), приводит к увеличению интервала дискретизации времени  $T_{лс}$  или  $T_{гс}$  по сравнению с интервалом  $T_{сс}$ . Данной ситуации соответствует свойство подобное Свойству 11, но с возможностью задания необходимой погрешности восстановления сигнала по выборкам:

**Свойство 17.** Уменьшение величины коэффициента  $k$  согласования параметров сигнала (управляемого технологического процесса) приводит к увеличению интервала дискретизации времени  $T_{лс} = T_{л}/Q_{лс}$  или  $T_{гс} = T_{г}/Q_{гс}$  по сравнению с  $T_{сс} = T_{с}/Q_{сс}$  при задании одинаковой величины погрешности аппроксимации  $\delta_{лс} = \delta_{гс}$  или приводит к обособленному увеличению единицы измерения системного времени.

Свойство 14 подтверждается количественно результатами в таблице 3 (см. столбцы 8, 9 и 12, 13). Применение в ЦСП линейной аппроксимации выборок из сигналов с датчика азимута ОЭС в подсистеме сбора информации СРВ вместо ступенчатой аппроксимации сокращает количество выборок в  $Q_{сс}/Q_{сл} = 28.54$  раза (при одинаковой точности восстановления сигнала  $\delta_{сс} = \delta_{сл} = 0.01$ ) и, соответственно, увеличивает интервал дискретизации в  $T_{сл}/T_{сс} = 28.33$  раза.

**7. Заключение.** В технических системах существуют сигналы и процессы, характеризующиеся трудностями определения спектра (СТОС), например, от объектов управления робастных автоматизированных систем управления реального времени (СРВ):

- процесс вывода пароварочной камеры на режим варки колбас связан с сигналами температуры и влажности пара, которые необходимо наиболее быстро привести к показателям, оговоренным в соответствующих технических условиях, и в процессе варки регулировать;
- в оптико-электронных системах (ОЭС) необходимо управлять углом азимута и углом места вращения оптических и лазерных датчиков и считывать их значения с необходимой точностью;

– на высокоскоростных магистралях (ВСМ) необходимо регулировать скорость состава и предсказывать его положение при экстренном торможении, если необходимо обеспечить безопасность движения составов с интервалом в три минуты со скоростью 350-400 км/ч...

Примеры имеют общие свойства физических параметров сигналов или процессов: максимальную скорость и максимальное ускорение изменения, максимальное отклонение от установившегося значения. Замерим максимальные значения этих параметров для пароварочной камеры, ОЭС, локомотива и участка пути или другими словами проведем обследование объекта управления на стадии проектирования системы управления реального времени.

Используем максимальные значения параметров: определим условие их согласования в соответствии с предложенными новыми моделями полуволн и их свойствами. Выберем гармоническую полуволну, если максимальные параметры согласованы или составную полуволну, если они рассогласованные. Новые модели этих полуволн позволяют по математическим выражениям статьи определить эквивалентную, согласованную частоту выборок  $f_c$  из сигнала или процесса СТОС. Эта частота  $f_c$  гарантированно обеспечит заданную в техническом задании на СРВ погрешность восстановления сигнала или процесса по выборкам из него, если аппроксимацию проводить ступеньками или отрезками прямых линий. В новых моделях полуволн частота выборок  $f_c$  обоснованно ( $f_c = 2Qf$ ) связана с частотой среза  $f$  цифрового ФНЧ и необходима для проектирования процесса цифровой предварительной обработки сигналов в цифровом процессоре сигналов (ЦПС). После восстановления в ЦПС множество сигналов поступает и совместно обрабатывается в центральном процессоре системы реального времени.

Аналогично, если аппарат вейвлетов (wavelet) позволяет исследовать и интерпретировать представления сигналов в спектральной области, то предложенный в статье аппарат составных полуволн позволяет интерпретировать сигналы и процессы СТОС во времени.

Исследование моделей составных полуволн показывает, что уменьшение величины коэффициента согласования параметров сигнала (управляемого технологического процесса) приводит к увеличению интервала дискретизации времени (более чем на порядок) или приводит к обоснованному увеличению единицы измерения системного времени и тем самым к снижению загрузки ЦПС.

**Литература**

1. Никифоров В.В., Баранов С.Н. Статическая проверка корректности разделения ресурсов в системах реального времени // Труды СПИИРАН. 2017. №3(52). С.137-156.
2. Ровелли К. Срок времени / Пер. с итал. Д. Баюка // М.: Издательство АСТ: CORPUS. 2020. 224 с.
3. Arpe S.D. Signals and systems: Principles and applications // Cambridge: Cambridge University Press. 2016. 768 p.
4. Лазарев В.Л. Робастное управление в биотехнологической промышленности // СПб.: Университет ИТМО; ИХиБТ. 2015. 196 с.
5. Контрольно-измерительное оборудование R&S 2019.– Каталоги Rohde&Schwarz, 2019. 256 с. [https://www.Rohdeschwarz.com/ru/top\\_topics\\_russia/catalogs/catalogs\\_231625.html](https://www.Rohdeschwarz.com/ru/top_topics_russia/catalogs/catalogs_231625.html) (дата обращения: 12.03.2019).
6. Якимов Е.В. Цифровая обработка сигналов: учебное пособие // Томск: Издательство ТПУ. 2011. 168 с.
7. Кестер У., Брайэнт Д. Проектирование систем цифровой и смешанной обработок сигналов. / Пер. под ред. А.А. Власенко // М.: Техносфера. 2010. 384с.
8. Сенкевич Ю.И., Марапулец Ю.В., Луковенкова О.О., Солодчук А.А. Методика выделения информативных признаков в сигналах геоакустической эмиссии // Тр. СПИИРАН. 2019. №5(18). С.1066–1092.
9. Петренко В.И. и др. Прогнозная оценка траектории руки оператора для решения обратной задачи динамики при копирующем управлении // Труды СПИИРАН. 2019. №1(18). С. 123–147.
10. Demydyuk M.V., Hoshovs'ka N. Parametric optimization of the transport operations of a two-link manipulator // J. Math. Sci. 2019. vol. 238. no. 2. pp.174–188.
11. Manyam S.G. Optimal dubins paths to intercept a moving target on a circle. // Proc. Am. Control Conf. 2019. (July 2019). pp.828–834.
12. Poulsen D.R., Davis J.M., Gravagne I.A. Optimal Control on Stochastic Time Scales. IFAC-PapersOnLine. 2017. Vol. 50. no. 1. pp. 14861–14866.
13. Майоров Б.Г. Способ непрерывной оптической связи с низколетающей целью // Патент RU №2 715 499 С1. 28.02.2020.
14. Vavilov S.A., Lytaev M.S. Calibration and verification of models defining radar visibility zones in marine geoinformation systems // Proceedings of the 8th international Symposium on Information Fusion and Intelligent Geographic Information Systems (IF&IGIS'17). 2018. pp. 115–125.
15. Кузнецов О.П., Базенков Н.И., Болдышев Б.А. Асинхронная дискретная модель химических взаимодействий в простых нейронных системах // Искусственный интеллект и принятие решений. 2018. № 2. С. 3–20.
16. Kar N.R. Production and Applications of Radiopharmaceuticals: A Review // Int. J. Pharm. Investigation. 2019. vol. 9. no. 2. pp. 36–42.
17. Фельдбаум А.А. Оптимальные процессы в системах автоматического регулирования // Автоматика и телемеханика. 1953. № 6(14). С. 712–728.
18. Uneyama T., Miyaguchi T., Akimoto T. Relaxation Functions of the Ornstein Uhlenbeck Process with Fluctuating Diffusivity. Physical Review. 2019. vol. 99. no. 3. pp. 21–27.
19. Хлистунов В.Н. О погрешности аппроксимации дискретных методов измерения // Приборостроение. 1960. №5. С. 3–5.
20. Майоров Б.Г. Обобщенный критерий наибольшего отклонения входных сигналов систем управления // Автоматика и Телемеханика. 2005. №10. С. 148–155; англ. пер.: B.G. Maigorov. The generalized maximum deviation criterion for input signals of control systems. //Autom. Remote Control. 66:10 (2005). pp. 1666–1672.

21. Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике / Пер. с англ. // М.: Издательство иностранной литературы. 1963. 830 с.
22. Котельников В.А. О пропускной способности «эфира» и проволоки в электросвязи // Материалы к I Всесоюзному съезду по вопросам технической реконструкции дела связи и развития слаботочной промышленности. М.: Редакция управления связи РККА. 1933. С. 4–5.
23. Nyquist H. Certain topics in telegraph transmission theory // Trans. AIEE. 1928. vol. 47. iss. 2. pp. 617–644.
24. Хлистунов В.Н. О применении теоремы Котельникова к дискретной измерительной технике // Измерительная техника. 1961. № 3. С. 15–28
25. Майоров Б.Г. Исследование теоремы Котельникова и применение результатов для определения величины дискретизации по времени входных сигналов систем управления // Высокопроизводительные вычислительные системы и микропроцессоры // Сб. научных трудов ИМВС РАН. 2004. №7. С. 76–82.
26. Майоров Б.Г. Восстановление сигнала в системах реального времени по равномерным выборкам с уменьшением интервала Найквиста // Системы и средства информатики. 2019. №2(29). С. 95–112.
27. Табачук И.С., Ташкеев Л.Л. Угрозы с предельно малых высот // Воздушно-космическая оборона. 2007. №1. С. 50–57.

**Майоров Борис Геннадьевич** — Ph.D., ведущий научный сотрудник, центр специальных систем, АО "Научно-производственное предприятие "Рубин". Область научных интересов: цифровая обработка сигналов, системы сбора и отображения информации в реальном времени. Число научных публикаций — 86. bgmayorov@yandex.ru; ул. Байдукова, 2, 440015, Пенза, Россия; р.т.: +7(8412)204777.

B. MAYOROV

**PROPERTIES OF HARMONIC AND COMPOSITE HALF-WAVES,  
DETERMINATION OF THE UNIFORM TIME SAMPLING  
INTERVAL OF DIGITAL SIGNAL PROCESSORS**

*Mayorov B. Properties of Harmonic and Composite Half-Waves, Determination of the Uniform Time Sampling Interval of Digital Signal Processors.*

**Abstract.** When building autonomous real-time systems (RTS), it is necessary to solve the problem of optimal multitasking loading of a number of parallel functioning digital signal processors. One of the reserves for achieving the desired result is the implementation of samples from the sensor signals of information about the magnitude of the signal most rarely in time. In this case, it is necessary to provide a linear or stepwise approximation of the signal by samples with an acceptable reconstruction error. One of the system tasks of these processors is filtering signals or limiting the spectrum to the cutoff frequency. A distinctive feature of the approach proposed in the article is the fulfillment of the condition: if the measurement of this frequency is difficult (for example, in the electromechanical means of the RTS), then for such signals it is proposed to match the maximum values of the harmonic half-wave parameters: approximation error, speed and acceleration. The study opens up the prospect of applying new approaches to sampling the time of signals in the amplitude-time domain and determining the equivalent cutoff frequency of the signal spectrum for such signals. In this article, the dependences of the value of the unit of system time for input-output of data on the degree of agreement between the maximum values of the signal parameters are obtained. A mathematical model of the extreme behavior of a signal between two adjacent samples is given in the form of a harmonic half-wave. The study is also extended to convex composite harmonic functions, according to which the signal can deviate from the results of a linear or stepwise approximation of the signal for these samples. The comparison of the models by the value of the relative time sampling intervals, depending on the degree of matching of the maximum parameters of the harmonic half-wave, is carried out. When comparing, in addition to these maximum parameters, the relationship of the maximum signal speed with the error of approximating the samples by steps and the relationship of the maximum acceleration of the signal with the maximum error of the linear approximation was taken into account. The results make it possible to determine the duration of the intervals of uniform sampling of the signal time based on the results of the inspection of the control object, substantiate a significant increase in the sampling interval of time or a similar increase in the number of tasks to be solved per unit of system time.

**Keywords:** real-time control systems, digital signal processors, signal filtering, signal model - harmonic half-wave, composite half-waves, uniform samples, uniform time sampling, stepwise and linear signal approximation, admissible error.

**Mayorov Boris** — Ph.D., Leading researcher, Center for special systems, Joint Stock Company Scientific and Production Enterprise Rubin. Research interests: digital signal processing, systems for collecting and displaying information in real-time. The number of publications — 86. bgmayorov@yandex.ru; 2, Baidukova St., 440015, Penza, Russia; office phone: +7(8412)204777.

**References**

1. Nikiforov V.V., Baranov S.N. [Static verification of the correctness of resource sharing in real-time systems]. *Trudy SPIIRAN – SPIIRAS Proceedings*. 2017. vol. 3(52). pp.137-156. (In Russ.).
2. Rovelli K. Srok vremeni [Time period]. Translation from italian D. Bajuka. Moscow: Publishing house ACT: CORPUS, 2020. 224 p. (In Russ.).
3. Apte S.D. Signals and systems: Principles and applications. Cambridge: Cambridge University Press. 2016. 768 p.
4. Lazarev V.L. Robastnoe upravlenie v biotehnologicheskoy promyshlennosti [Robust control in the biotechnological industry]. SPb.: ITMO University; IHiBT. 2015. 196 p. (In Russ.).
5. Kontrol'no-izmeritel'noe oborudovanie R&S 2019 – Katalogi Rohde&Schwarz. [Test and measurement equipment R&S 2019.– Catalogs Rohde& Schwarz]. 2019. 256 p. Available at: [www.rohdeschwarz.com/ru/top\\_topics\\_russia/catalogs/catalogs\\_231625.html](http://www.rohdeschwarz.com/ru/top_topics_russia/catalogs/catalogs_231625.html) (accessed: 12.03.2019). (In Russ.).
6. Yakimov E.V. Zifrovaya obrabotka signalov: uchebnoe posobie. [Digital signal processing: a tutorial]. Tomsk: TPU publishing house. 2011.168 p. (In Russ.).
7. Kester W., Bryant D. Proektirovanie system zifrovoy i smeshannoy obrabotki signalov. [Design of digital and mixed signal processing systems]. Translation edited by A.A. Vlasenko. Moscow: Technosphere. 2010. 384 p. (In Russ.).
8. Senkevich Yu.I., Marapulez Yu.V., Lukovenkova O.O., Solodchuk A.A. [Technique for identifying informative features in geoacoustic emission signals]. *Trudy SPIIRAN – SPIIRAS Proceedings*. 2019. vol. 5(18). pp. 1066–1092. (In Russ.).
9. Petrenko V.I. et. al. [Predictive estimate of the trajectory of the operator's hand for solving the problem of dynamics with copying control]. *Trudy SPIIRAN – SPIIRAS Proceedings*. 2019. vol. 1(18). pp. 123–147. (In Russ.).
10. Demydyuk M.V., Hoshovs'ka N. Parametric optimization of the transport operations of a two-link manipulator. *J. Math. Sci*. 2019. vol. 238. no. 2. pp. 174–188.
11. Manyam S.G. Optimal dubins paths to intercept a moving target on a circle. *Proc. Am. Control Conf*. 2019. (July 2019). pp. 828–834.
12. Poulsen D.R., Davis J.M., Gravagne I.A. Optimal Control on Stochastic Time Scales. *IFAC-PapersOnLine*. 2017. vol. 50. no. 1. pp. 14861–14866.
13. Mayorov B.G. [Method of continuous optical communication with low-flying target] Patent RU. no. 2 715 499 C1. 02.28.2020. (In Russ.).
14. Vavilov S.A., Lytaev M.S. Calibration and verification of models defining radar visibility zones in marine geoinformation systems. *Proceedings of the 8th international Symposium on Information Fusion and Intelligent Geographic Information Systems (IF&IGIS'17)*. 2018. pp. 115–125.
15. Kuznetsov O.P., Bazenkov N.I., Boldyshev B.A. [Asynchronous discrete model of chemical interactions in simple neural systems] *Iskusstvennyj intellekt i prinyatie reshenij – Artificial Intelligence and Decision Making*. 2018. no. 2. pp. 3–20.
16. Kar N.R. Production and Applications of Radiopharmaceuticals: A Review. *Int. J. Pharm. Investigation*. 2019. vol. 9. no. 2. pp. 36–42.
17. Feldbaum A.A. [Optimal processes in automatic control systems]. *Avtomatika i telemekhanika. [Automation and telemechanics]*. 1953. no. 6(14). pp. 712–728. (In Russ.).
18. Uneyama T., Miyaguchi T., Akimoto T. Relaxation Functions of the Ornstein Uhlenbeck Process with Fluctuating Diffusivity. *Physical Review*. 2019. vol. 99. no. 3. pp. 21–27.
19. Khlistunov V.N. [On the error of approximation of discrete measurement methods] *Priborostroenie – Instrumentation*. 1960. no. 5. pp. 3–5. (In Russ.).

20. Mayorov B.G. [Generalized criterion for the greatest deviation of input signals of control systems]. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and telemechanics*. 2005. no. 10. pp.148–155. (In Russ.). trans. eng.: B.G. Maiorov. The generalized maximum deviation criterion for input signals of control systems. //Autom. Remote Control. 66:10 (2005). pp. 1666–1672.
21. Shannon C. *Raboty po teorii informatsii i kibernetike. Raboty iz razlichnykh zhurnalov* [Works on the theory of information and cybernetics. Works from different magazines]. Transfer from English. Moscow. Publishing house of foreign literature, 1963. 830 p. (In Russ.).
22. Kotelnikov V.A. [About the flow capacity of "broadcast" and wire in telecommunication]. *Materialy k I Vsesoyuznomu siesdu po voprosam tekhnicheskoy rekonstruktsii dela svyazi i rasviniya slabotochnoy promyshlennosti*. [Materials for the 1st All-Union Congress on the issues of technical reconstruction of communications and the development of low-current industry.] Published by the editorial board of the communications department of the RKKA. 1933. Moscow. pp. 4–5. (In Russ.).
23. Nyquist H. Certain topics in telegraph transmission theory. *Trans. AIEE*. 1928. vol. 47. iss. 2. pp. 617–644.
24. Khlistunov V.N. [About application of the theorem of Kotelnikov to discrete measuring technique]. *Izmeritel'naya tekhnika – Measuring technique*. 1961. no. 3. pp. 15–28. (In Russ.).
25. Mayorov B.G. [Investigation of Kotelnikov's theorem and application of the results to determine the value of time sampling of input signals of control systems]. *Visokoproizvoditel'nye vychislitel'nye sistemy i mikroprozessory: Sbornik nauchnykh trudov IMVS RAN – High-performance computing systems and microprocessors: Collection of articles scientific works of IMVS RAS*. Moscow. 2004. no. 7. pp. 76–82. (In Russ.).
26. Mayorov B.G. [Reconstruction of a signal in real-time systems from uniform samples with a decrease in the Nyquist interval]. *Sistemy i sredstva informatiki – Systems and means of informatics*. 2019. no. 2 (29). pp. 95–112. (In Russ.).
27. Tabachuk I.S., Tashkeyev L.L. [Threats from extremely low altitudes]. *Vozdushno-kosmicheskaya oborona – Aerospace defense*. 2007. no. 1. pp. 50–57. (In Russ.).