УДК 004.8

А.А. Фильченков

АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ МНОЖЕСТВА МИНИМАЛЬНЫХ ГРАФОВ СМЕЖНОСТИ ПРИ ПОМОЩИ САМОУПРАВЛЯЕМЫХ КЛИК

Фильченков А.А. **Алгоритм построения множества минимальных графов смежности при помощи самоуправляемых клик.**
Аннотация. Известна схема алгоритма, которая позволяет строить множество минимальных графов смежности по заданному набору максимальных фрагментов знаний (МФЗ), однако алгоритм может быть улучшен путем привлечения разработанной теории глобальной структуры алгебраической байесовской сети. Цель исследования — улучшить работу это алгоритма. Были выдвинуты и обоснованы три улучшения известного алгоритма: 1) исключение незначимых сужений, 2) исключение клик с единственным владением и 3) априорный учет однореберных бездетных клик. Предложен алгоритм, реализующий предложенные улучшения и доказана его корректность.
Ключевые слова: алгебраические байесовские сети, вторичная структура, машинное обучение, вероятностно-графические модели.

Filchenkov A.A. **Minimal join graph set synthesis self-managing cliques algorithm. Annotation.** The scheme of an algorithm allowing to design minimal join graph set from a given maximal knowledge pattern set is known, but it can be improved by engaging the developed theory of algebraic Bayesian network global structure. The goal of the research is to improve the known minimal join graph set algorithm. Three improvements of the known algorithm are suggested and justified: 1) exclusion of not significant narrowing, 2) exclusion of cliques with the only possession and 3) a prior childless cliques with the only edge processing. A new algorithm implementing suggested improvements is designed.
Keywords: algebraic Bayesian networks, secondary structure, machine learning, probabilistic graphical models.

1. Введение. Алгебраические байесовские сети (АБС) представляют собой вероятностную графическую модель систем знаний с неопределенностью [1–2, 11, 18]. От прочих вероятностных графических моделей АБС отличаются возможностью работы с интервальными оценками вероятностей. АБС позволяют пропагировать поступившие свидетельства, осуществлять синтез согласованных оценок и поддерживать непротиворечивость во фрагментах знаний, на которых построена сеть [5, 12].

Вторичной структурой АБС называют связи между фрагментами знаний — первичной структурой АБС [4–6]. Вторичную структуру удобно представлять в виде графов — так называемых графов смежности, ребрами которых соединяются максимальные фрагменты знаний. Эффективность работы АБС, а также сама возможность выполнения некоторых алгоритмов (пропагации и синтеза согласованных оценок, а также поддержания глобальной непротиворечивости) определяются выбором вторичной структуры [7–10, 12], т. е. видом графа смежности, поэтому чрезвычайно важной задачей является поиск «удобных» вторичных структур. Так, интерес представляет множество минимальных графов смежности (минимальность здесь понимается как минимальность по числу ребер и нередуцируемость, эквивалентность чего была доказана в работе [3]), которое примечательно тем, что если первичная структура допускает существование деревьев смежности (ациклической вторичной структуры) — самой «эффективной» вторичной структуры, как было показано в [6], то они содержатся в этом множестве. Если же для данной первичной структуры вторичная структура принципиально циклична, то наиболее «эффективная» вторичная структура из возможных будет также содержаться в указанном множестве.

Несмотря на свою значимость, множество минимальных графов смежности изучено недостаточно. Основополагающей для их анализа работой является статья [14], в которой было начато исследование и сформирована система терминов для работы с множеством минимальных графов смежности, в ней же был предложен алгоритм синтеза множества минимальных графов смежности и одновременно с этим его улучшение. Работы [15–17] развивали полученную теорию, уточняя и обобщая полученные в работе [14] результаты, а также предлагая новые. В статье [15] предложена классификация клик графов смежности и доказан ряд их свойств, на основе чего может быть построен более эффективный по времени работы алгоритм, чем уже имеющийся.

Цель данной работы — предложить улучшения за счет эксплуатации внутренней структуры моно- и биклик [15] для существующего построения множества минимальных графов смежности и предложить новый алгоритм для синтеза указанного множества.

2. Основные определения и обозначения. В данном разделе приводятся определения так же, как они были введены в статье [16]. Статья [16] содержится в этом же выпуске «Трудов СПИИРАН», поэтому определения приведены максимально сжато, опущен формализм, иллюстрации и пояснения.

Граф — пара $\langle V, E \rangle$, где V — множество вершин графа, а E — множество ребер, каждое из которых является неупорядоченной парой (v_i, v_j), $i \neq j$, v_i, $v_j \in V$.

Алфавит — множество атомарных пропозициональных формул $A = \{x_1, \ldots, x_n\}$, над которым будут заданы максимальные фрагменты знаний. *Слово* V — подмножество алфавита.

Множество главных конъюнктов максимальных фрагментов знаний (МФЗ), вошедших в АБС, — это такое множество слов $V^* = \{V_i \subseteq A\}_{i=1}^{i=m}$, что:

1) оно не содержит несобственное подмножество алфавита.
2) никакое слово полностью не содержит никакое другое слово.

Граф максимальных фрагментов знаний — ненаправленный граф G, вершины которого соответствуют элементам множества главных конъюнктов МФЗ, вошедших в алгебраическую байесовскую сеть, а ребра удовлетворяют условию

$$\left(V_i, V_j\right) \in E(G) \Rightarrow V_i \cap V_j \neq \emptyset.$$

Вес $W(V_i)$ *вершины* $V_i \in V(G)$ — множество атомов алфавита, вошедших в V_i. *Вес* $W\left(\left\{V_i, V_j\right\}\right)$ *ребра* $\left\{V_i, V_j\right\} \in E(G)$ графа G определяется как пересечение весов тех вершин, которые соединены этим ребром. *Вес* $W(H)$ *подграфа* $H \subseteq G$ — наибольшее по включению слово, которое входит в веса всех его вершин.

Магистральный путь $B\colon V_b \dashrightarrow V_e$ от вершины V_b до вершины V_e, пересечение весов которых непусто, — это такой путь от вершины V_b до вершины V_e, что вес любой принадлежащей ему вершины содержит пересечение весов начальной и конечной вершин:

$B\colon V_b \dashrightarrow V_e = P\colon V_b \rightsquigarrow V_e$, такой, что

$$\forall V_i \in B W(V_b) \cap W(V_e) \subset W(V_i).$$

Граф *магистрально связен*, если между каждой парой несовпадающих вершин, веса которых содержат общие элементы, существует магистральный путь. Будем обозначать множество магистрально связных графов через $\mathbf{BCG}$.

Граф смежности — магистрально связный граф МФЗ. *Минимальный граф смежности* — граф смежности, число ребер в котором минимально. Будем обозначать множество минимальных графов смежности через $\mathbf{MJG}$. *Максимальный граф смежности* $G_{\max}$ — наибольший по числу ребер граф смежности.

Сужение $G \downarrow U$ ненаправленного графа G на слово U — это ненаправленный граф, в который входят только те вершины и ребра исходного графа G, веса которых содержат или равны U.

Любое слово, являющееся весом какого-либо ребра графа G, будем называть *значимым словом графа* G, а сужение графа G на такое слово — *значимым сужением*.

Клика U — значимое сужение максимального графа смежности на вес U. Любая клика является полным подграфом графа $G_{\max}$. Множество всехтаких клик будем обозначать как Clique.

Граф клик — направленный граф, вершинами которого являются клики из множества Clique. Ребро из вершины P в вершину Q проведено, если клика P содержит клику Q, и не существует клики R, такой, что клика P содержит клику R и клика R содержит клику Q.

Сжатие σ_U компоненты связности $P_U^i \subseteq G \downarrow U$ в вершину f_i — отображение на множестве подмножеств вершин, сопоставляющее множеству вершин P_U^i вершину f_i.

Сжатие σ_U множества ребер

$$E_{i,j} \subset (G \downarrow U) \backslash (G \downarrow U),$$

соединяющих владения P_U^i и P_U^j в ребро $e_{i,j}$ — отображение на множестве подмножеств ребер, сопоставляющее множеству ребер $E_{i,j}$ ребро $e_{i,j}$, соединяющее вершины $f_i = \sigma_U(P_U^i)$ и $f_j = \sigma_U(P_U^j)$ и имеющее кратность, равную $|E_{i,j}|$.

Сжатие σ_U графа смежности G в граф K_U — отображение на множестве графов, сопоставляющий графу G, являющему графом смежности, граф K_U, вершинами которого являются владения сильного сужения $G \downarrow U$, а ребро между двумя вершинами f_1 и f_2 графа K_U существует, если существует ребро в графе G между вершинами, принадлежащими соответствующим f_1 и f_2 владениям P_U^1 и P_U^2. Кратность такого ребра (f_1, f_2) равна числу всех ребер, соединяющих вершины из P_U^1 и P_U^2.

Феод f_i — вершина, получившаяся сжатием какого-то владения.

Курия веса U — K_U — ненаправленный граф с кратными ребрами, полученный сжатием значимого сужения $G \downarrow U$.

Оммаж H_U — курия K_U, являющаяся деревом, все ребра которой имеют кратность, равную единице. Любое сжатие минимального графа смежности является оммажем.

Жила S_U — множество ребер графа смежности G, такое, что $E_u = \{\sigma_U(e) | e \in S_U\}$ является множеством ребер оммажа сжатия σ_U. В жилу S_U входят те и только те ребра минимального графа смежности M, вес которых равен U.

Пучок — граф, построенный на исходном наборе вершин, множество ребер которого равно объединению жил, выбранных по одной для каждого значимого слова.

Теорема (о множестве минимальных графов смежности). Множество минимальных графов смежности совпадает с множеством пучков.

Следствие 1. Число ребер в минимальных графах смежности одинаково.

Следствие 2. Множество минимальных графов смежности совпадает с множеством пучков, которое равно декартовому произведению множеств жил каждой клики.

Следствие 3. Мощность множества графов смежности равна произведению мощностей множеств жил каждой клики.

Следствие 4. Согласно следствию 2, для того чтобы построить множество графов смежности, достаточно для каждой клики построить множество соответствующей ей жил.

3. Схема алгоритма построения минимальных графов смежности по заданному набору вершин. Данный алгоритм был впервые приведен в работе [14].

Над множеством вершин V строится максимальный граф смежности $G_{\max}$. По этому графу строится граф клик Clique. Каждой клике сопоставляется множество вершин, которые в нее попали. На графе клик задается порядок.

По заданному порядку перебираются все клики из упорядоченного дерева клик. Для каждой клики при помощи алгоритма Прюфера перебираются все оммажи, поскольку оммаж является деревом — и для каждого оммажа перебираются все соответствующие ему жилы. Таким образом, для каждой клики перебираются все жилы, соответствующие ее весу. Все такие жилы записываются в массив жил для данной клики.

Согласно теореме о множестве минимальных графов смежности, нам достаточно построить все возможные пучки, чтобы получить все минимальные графы. Это можно сделать, перебрав все возможные комбинации жил для каждой клики, объединяя такие жилы в единый граф.

4. Классификация клик. В данном разделе определения приведены так, так, как они были даны в работе [15].

Собственное ребро клики — ребро, принадлежащее клике, вес которого совпадает с весом клики.

В работе [15] было доказано, что если клика сжимается до одного феода, то имеет ровно одну, причем пустую жилу.

По числу собственных ребер множество клик можно поделить на следующие (табл. 1):

- *безреберные клики* — C_0 — клики (сужения), у которых нет собственных ребер;
- *однореберные клики* — C_1 — клики, у которых ровно одно собственное ребро;

- *многореберные клики* — C_n — клики, у которых более одного собственного ребра.

По наличию детей множество клик можно поделить на следующие:

- *бездетные* — C^- — клики, у которых нет детей;
- *родительские* — C^+ — клики, у которых есть дети.

Таблица 1. **Классификация клик**

По ребрам \ По детям	Бездетные	Родительские
Безреберные	C_0^-	C_0^+
Однореберные	C_1^-	C_1^+
Многореберные	C_n^-	C_n^+

По числу феодов, в которые сжимаются клики, они делятся на следующие:

- *моноклики* — клики, сжимающиеся до одного феода.
- *стереоклики* — клики, сжимающиеся до более чем одного феода.

Псевдоклика — C_0^- — сужение, не имеющее собственных ребер и не имеющее детей.

Моноклика-0 — C_0^+ — сужение, не имеющее собственных ребер, но имеющее детей.

Биклика — C_1^- — клика, имеющая ровно одно собственное ребро и не имеющая детей.

Моноклика-1 — C_1^+ — клика, имеющая ровно одно собственное ребро и имеющая детей.

Бездетная поликлика (возможно также название *бездетная стереоклика*) — C_n^- — клика, имеющая более одного собственного ребра, но не имеющая детей.

Родительская поликлика — C_n^+ —клика, имеющая более одного собственного ребра и имеющая детей.

Моноклика-n — mC_n^+ — клика, имеющая более одного собственного ребра и имеющая детей, но состоящая ровно из одного феода.

Родительская стереоклика — pC_n^+ — клика, имеющая более одного собственного ребра, имеющая детей, и состоящая более чем из одного феода.

Моноклика-0, моноклика-1 и моноклика-n и только они являются монокликами. Бездетная стереоклика и родительская стереоклика и только они являются стереокликами.

Полученные в работе [15] результаты приведены в табл. 2.

Таблица 2. **Характеристики различных клик**

Сужение	Обозначение	Является ли кликой	Есть ли дети	Число собственных ребер	Число вершин	Число феодов	Число жил
Псевдоклика	C_0^-	Нет	Нет	0	1	0	0
Моноклика-0	C_0^+	Нет	Да	0	> 2	1	1
Биклика	C_1^-	Да	Нет	1	2	2	1
Моноклика-1	C_1^+	Да	Да	1	> 2	1	1
Бездетная стереоклика	C_n^-	Да	Нет	> 1	> 2	> 2	> 1
Родительская поликлика	C_n^+	Да	Да	> 1	> 2	$\forall$	$\forall$
Моноклика-n	mC_n^+	Да	Да	> 1	> 2	1	1
Родительская стереоклика	pC_n^+	Да	Да	> 1	> 2	> 1	> 1

5. Алгоритм построения множества минимальных графов смежности при помощи самоуправляемых клик

Пояснение. Благодаря введению классификации клик можно улучшить алгоритм построения минимальных графов смежности в смысле скорости построения и скорости вывода результатов.

Улучшение 1 (исключение незначимых сужений). Вместо того чтобы рассматривать все возможные клики, мы можем исключить из рассмотрения моноклики-0, так как они не создают никаких жил и перебор оставшихся клик будет сведен к перебору весов ребер максимального графа смежности.

Пояснение. По сути, прежде нигде формально не оговаривался порядок перебора клик. Очевидно, что строить клики по ребрам — максимально эффективный способ их построения, поскольку мы переберем все клики и ничего, кроме них.

Улучшение 2 (исключение клик с единственным владением). Вместо того чтобы строить жилы для моноклик-1 и моноклик-n, мы можем исключить их из множества клик, для которых строятся жилы, что ускорит вывод минимальных графов смежности, так как нужно будет перебирать меньшее число клик.

Пояснение. Моноклика-1 и моноклика-n сжимаются ровно до одного феода, поэтому не образуют жил. Таким образом, нет смысла строить жилы для них, поскольку мы заведомо знаем, что таких жил не существует.

Улучшение 3 (априорный учет ребер однореберных бездетных клик). Вместо того чтобы строить жилы для биклик, мы можем исключить их из множества клик, для которых строятся жилы, добавив их ребра в граф обязательных ребер, что ускорит вывод минимальных графов смежности, так как нужно будет перебирать меньшее число клик

Пояснение. По сути, этим улучшением мы просто переформулирует то улучшение, которое легко в основу улученного алгоритма в работе [14]. Так, клики, у которых нет детей и есть всего одно ребро, могут иметь только одну жилу, состоящую из этого ребра, поэтому нет смысла строить эту единственную жилу каждый раз при переборе всех жил и объединять ее со всеми другими. Гораздо эффективнее будет заранее построить все такие ребра для графа обязательных ребер, и уже его объединять со всеми жилами тех клик, у которых их несколько.

Улучшения 1–3 являются бесспорными, так как после их применения жилы будут перебираться не для всех возможных клик, а только для стереоклик, таким образом, вместо Q_A выборок элементов будет сделано Q_S выборок элементов, где

$$Q_A = M \cdot q_A,$$
$$Q_S = M \cdot q_S,$$

где M — число минимальных графов смежности, q_A — число всех клик, а q_S — число стереоклик. Таким образом, улучшения 1–3 ускоряют вывод в $\frac{q_A}{q_S}$ раз.

Алгоритм построения минимальных графов смежности при помощи самоуправляемых клик (self-managing cliques algorithm) строит по заданному набору вершин V, соответствующих множеству главных конъюнктов максимальных ФЗ, все возможные минимальные графы смежности.

Require: V
Ensure: $MJG = \{\langle V, E_i \rangle\}$
$Weights = \emptyset$
for all $u, v \in V, (u \neq v) \& (W(u) \cap W(v) \neq \emptyset)$ **do**
  $Weighs \leftarrow W(u) \cap W(v)$
end for
$Cliques = \emptyset$

for all $v \in V$ **do**
for all $w \in Weights$
if $w \subset W(v)$ **do**
$Cliques \rightarrow C_w : W(C_w) = w$
$C_w \longleftarrow u$
$Cliques \longleftarrow C_w$
end if
end for
end for
$NecessaryEdges = \emptyset$
$StereoIndex = \emptyset$
for all $C_w \in \text{Cliques}$ **do**
if $|C_w| = 2$ **then**
$C_w \rightarrow v$
$C_w \rightarrow u : u \neq v$
$NecessaryEdges \longleftarrow (v, u)$
end if
else
$P =$ компоненты связности строго сужения клики C_w
if $|P| > 1$ **then**
$StereoIndex \longleftarrow w$
$S_w = \emptyset$
for all t **is_a** дерево на P **do**
for all s **is_a** жила для t **do**
$S_w \longleftarrow s$
end for
end for
end if
end else
end for
$MJG = \emptyset$
for all $\{s_w^i\}: \{s_w^i\}$ —индексирующая последовательность жил стереоклик $w \in StereoIndex, s_w^i \in S_w$ **do**
$E = NecessaryEdges$
for all $s \in \{s_w^i\}$ **do**
$E = E \cup s.edges$

```
41:     end for
42:     MJG ⟵ ⟨V,E⟩
43: end for
44: return MJG
```

Листинг 1. Алгоритм построения минимального графа смежности при помощи самоуправляемых клик

Здесь и далее $S \leftarrow e$ обозначает добавление элемента e к множеству S, а $S \rightarrow e{:}\,Cond(e)$ обозначает извлечение элемента, удовлетворяющего условиям $Cond$, из множества S в переменную e.

В цикле (2–4) алгоритм строит множество значимых весов $Weights$. Здесь применяется улучшение 1 (исключение незначимых сужений), так как множество клик строится путем перебора всех ребер.

В цикле (6–14) перебираются все вершины, и каждая вершина добавляется к тем кликам, в которых она должна содержаться.

В цикле (7–13) перебираются все веса из множеств $Weights$ и рассматриваемая вершина добавляется в каждую клику, которая должна ее содержать.

Условный оператор (8–12) в случае, если вес вершины содержит вес клики, добавляет эту вершину к этой клике.

В цикле (17–36) алгоритм строит множество жил для каждой стереоклики.

Условный оператор (18–22) из клик, состоящих из двух вершин, извлекает их единственные ребра и добавляет в множество обязательных ребер $NecessaryEdges$. Здесь применяется улучшение 3 (априорный учет однореберных бездетных клик), так как только у этих клик число ребер равно 2.

Условный оператор (19–34) при условии, что клика состоит из более чем двух вершин, строит множество жил для данной клики.

Условный оператор (25–33) исключает из рассмотрения клики, сжимаемые до одного феода (т.е. имеющие ровно одно владение). Здесь применяется улучшение 2 (исключение клик с единственным владением).

В цикле (28–32) перебираются все деревья, построенные на феодах клики (т.е. оммажи). Для этого, как правило, используется алгоритм Прюфера.

В цикле (29–31) в массив жил для данной клики добавляются все жилы, соответствующие данному оммажу.

В цикле (36–43) алгоритм перебирает все кортежи, индексирующие жилы для каждой клики. Каждый кортеж индексирует набор жил, выбранных по одной для каждой клики. В цикле происходит объединение всех жил одного кортежа с ребрами из множества обязательных ребер. Граф, содержащий эти ребра, добавляется к множеству минимальных графов смежности.

Заметим, что здесь, в отличии от базового алгоритма, у нас нет привязки к порядку перебора клик. То есть клики обрабатываются вне зависимости друг от друга.

Утверждение 1. Алгоритм построения множества минимальных графов смежности при помощи самоуправляемых клик строит множество минимальных графов смежности.

Доказательство. В цикле (2–12) строится массив клик (т.е. вершин, этим кликам принадлежащих) по определению клик.

В цикле (17–35) будут рассмотрены все клики, для стереоклик будет построено множество жил, собственные ребра биклик будут добавлены в граф обязательных ребер, а моноклики не будут проигнорированы.

Цикл (36–43) перебирает все наборы жилы по одной для каждой клики стереоклики и объединяет их с множеством обязательных ребер. Согласно теореме о минимальных графах смежности, мы перебираем таким образом все возможные множества ребер минимальных графов смежности.

Оценка времени работы алгоритма остается открытой задачей, поскольку оно чрезвычайно сильно зависит от структуры АБС, для которой строится множество минимальных графов смежности. Однако, как было показано, алгоритм построения множества минимальных графов смежности при помощи самоуправляемых клик требует меньше времени, чем алгоритм, реализующий базовую схему.

6. Заключение. В статье были рассмотрены результаты анализа клик и вторичных структур, проведенные в работах [15–17], на основании классификации клик, предложенной в работе [15], были сформулированы три улучшения для алгоритма синтеза множества минимальных графов смежности, представляющих вторичную структуру алгебраической байесовской сети, предложенного в работе [14].

Первое улучшение состояло в том, чтобы рассматривать при построении графа клик только клики, т. е. только те подграфы максимального графа смежности, вес которых совпадает с весом какого-либо из ребер максимального графа смежности.

Второе улучшение состояло в том, чтобы рассматривать при переборе клик из графа клик только те клики, которые имеют более одной компоненты связности при удалении из них ребер веса, равного весу клики (т.е. имеющих ровно одно *владение*).

Третье улучшение состояло в том, чтобы клики, состоящие ровно из двух вершин, не использовать для построения особых множеств ребер — *жил*, а выделять из них единственное ребро, которое добавлять к специальному графу — *графу обязательных ребер*.

Предложен алгоритм построения множества минимальных графов смежности, реализующий все три улучшения, который будет выполнятся быстрее, чем базовый алгоритм, предложенный в статье [14]. Доказана корректность алгоритма.

Дальнейший анализ глобальной структуры алгебраических байесовских сетей позволит обособить и структурировать новые элементы, специальная работа с которым ляжет в основу дальнейших улучшений алгоритма построения множества минимальных графов смежности.

Литература

1. *Городецкий В.И.* Алгебраические байесовские сети — новая парадигма экспертно-вычислительных систем // Юбилейный сборник трудов институтов Отделения информатики, вычислительной техники и автоматизации РАН. Т. 2. М.: РАН, 1993, С. 120–141.
2. *Городецкий В.И., Тулупьев А.Л.* Формирование непротиворечивых баз знаний с неопределенностью // Известия РАН. Сер. Теория и системы управления. 1997. №5. С. 33–42.
3. *Опарин В.В., Фильченков А.А., Тулупьев А.Л., Сироткин А.В.* Матроидное представление семейства графов смежности над набором фрагментов знаний // Научно-технический вестник Санкт-Петербургского государственного университета информационных технологий, механики и оптики. 2010. Вып. 4. С. 73–76.
4. *Тулупьев А.Л.* Алгебраические байесовские сети: глобальный логико-вероятностный вывод в деревьях смежности: Учеб. пособие. СПб.: СПбГУ; ООО Издательство «Анатолия», 2007. 40 с. (Сер. Элементы мягких вычислений).
5. *Тулупьев А.Л.* Алгебраические байесовские сети: система операций глобального логико-вероятностного вывода // Информационно-измерительные и управляющие системы. 2010. №11. С 65–72.
6. *Тулупьев А.Л.* Ациклические алгебраические байесовские сети: логико-вероятностный вывод // Нечеткие системы и мягкие вычисления: Научный журнал Российской ассоциации нечетких систем и мягких вычислений. 2006. Том 1, № 1. С. 57–93.
7. *Тулупьев А.Л.* Байесовские сети: логико-вероятностный вывод в циклах. СПб.: Изд-во С.-Петербургского ун-та, 2008. 140 с. (Элементы мягких вычислений.)
8. *Тулупьев А.Л.* Непротиворечивость оценок вероятностей в алгебраических байесовских сетях. Вестник СПбГУ. Сер. 10. 2009. Вып. 3. С. 144–151.
9. *Тулупьев А.Л.* Преобразование ациклических байесовских сетей доверия в алгебраические байесовские сети // Известия высших учебных заведений: Приборостроение. 2009. № 3. С. 21–23.

10. *Тулупьев А.Л.* Согласованность данных и оценка вероятности альтернатив в цикле стохастических предпочтений // Известия высших учебных заведений: Приборостроение. 2009. № 7. С. 3–8.
11. *Тулупьев А.Л., Николенко С.И., Сироткин А.В.* Байесовские сети: логико-вероятностный подход. СПб.: Наука, 2006. 607 с.
12. *Тулупьев А.Л., Сироткин А.В.* Алгебраические байесовские сети: принцип декомпозиции и логико-вероятностный вывод в условиях неопределенности // Информационно-измерительные и управляющие системы, 2008, № 10, т. 6. С. 85–87.
13. *Тулупьев А.Л., Сироткин А.В., Николенко С.И.* Байесовские сети доверия: логико-вероятностный вывод в ациклических направленных графах. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та. 2009. 400 с.
14. *Фильченков А.А., Тулупьев А.Л.* Структурный анализ систем минимальных графов смежности Труды СПИИРАН. 2009. Вып. 11. С. 104–127.
15. *Фильченков А.А., Тулупьев А.Л., Сироткин А.В.* Компаративный анализ клик минимальных графов смежности алгебраических байесовских сетей // Труды СПИИРАН. 2010. Вып. 13. [в печати]
16. *Фильченков А.А., Тулупьев А.Л., Сироткин А.В.* Особенности анализа вторичной структуры алгебраической байесовской сети // Труды СПИИРАН. 2010. Вып. 12. [в печати]
17. *Фильченков А.А., Тулупьев А.Л., Сироткин А.В.* Структурный анализ клик минимальных графов смежности // Вестник Тверского государственного университета. Сер. Прикладная математика. 2010. [в печати].
18. *Gorodetsky V.I., Drozdgin V.V., Jusupov R.M.* Application of Attributed Grammar and Algorithmic Sensitivity Model for Knowledge Representation and Estimation // Artificial Intelligence and Information, Control Systems of ROBOTSA. Amsterdam: Elsevier Science Publishers B. V., 1984, P. 232–237.

Фильченков Андрей Александрович — аспирант кафедры информатики математико-механического факультета С.-Петербургского государственного университета (СПбГУ), младший научный сотрудник лаборатории теоретических и междисциплинарных проблем информатики СПИИРАН. Область научных интересов: автоматическое обучение вероятностных графических моделей. Число научных публикаций — 6. aaafil@mail.ru, СПИИРАН, 14-я линия В.О., д. 39, г. Санкт-Петербург, 199178, РФ; р.т. +7(812)328-3337, факс +7(812)328-4450. Научный руководитель — А.Л. Тулупьев.

Filchenkov Andrey Alexandrovich — PhD student of Computer Science Department, SPbGU, junior researcher, Theoretical and Interdisciplinary Computer Science Laboratory, SPIIRAS Research area: machine learning of probabilistic graphical models. The number of publications — 6. aaafil@mail.ru, SPIIRAS, 14-th line V.O., 39, St. Petersburg, 199178, Russia; office phone +7(812)328-3337, fax +7(812)328-4450. Scientific advisor — A.L. Tulupyev.

Поддержка исследования. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № **09-01-00861**-а «Методология построения интеллектуальных систем поддержки принятия решений на основе баз фрагментов знаний с вероятностной неопределенностью».

РЕФЕРАТ

Фильченков А.А. **Алгоритм построения множества минимальных графов смежности при помощи самоуправляемых клик.**

Цель работы — предложить улучшения для существующего алгоритма построения множества минимальных графов смежности и реализовать их в улучшенном алгоритме.

Рассмотрена теория глобальной структуры алгебраических байесовских сетей, в частности, классификация клик графов смежности. Приведена базовая схема алгоритма построения множества минимальных графов смежности.

Над множеством вершин строится максимальный граф смежности. По этому графу строится граф клик. Каждой клике сопоставляется множество вершин, которые в нее попали. На графе клик задается порядок. По заданному порядку перебираются все клики из упорядоченного дерева клик. Для каждой клики при помощи алгоритма Прюфера перебираются все оммажи, поскольку оммаж является деревом — и для каждого оммажа перебираются все соответствующие ему жилы. Таким образом, для каждой клики перебираются все жилы, соответствующие ее весу. Все такие жилы записываются в массив жил для данной клики. Согласно теореме о множестве минимальных графов смежности, нам достаточно построить все возможные пучки, чтобы получить все минимальные графы. Это можно сделать, перебрав всевозможные комбинации жил для каждой клики, объединяя такие жилы в единый граф.

На основе рассмотренной классификации предложены три улучшения для базового алгоритма, основанные на особенностях некоторых клик.

Первое улучшение состояло в том, чтобы рассматривать при построении графа клик только клики, то есть только те подграфы максимального графа смежности, вес которых совпадает с весом какого-либо из ребер максимального графа смежности. Второе улучшение состояло в том, чтобы рассматривать при переборе клик из графа клик только те клики, которые имеют более одной компоненты связности при удалении из них ребер веса, равного весу клики (т.е. имеющих ровно одно владение).Третье улучшение состояло в том, чтобы клики, состоящие ровно из двух вершин, не использовать для построения особых множеств ребер — жил, а выделять из них единственное ребро, которое добавлять к специальному графу — графу обязательных ребер.

Предложен алгоритм построения множества минимальных графов смежности, реализующий описанные улучшения.

Дальнейший анализ глобальной структуры алгебраической байесовской сети может быть полезен в целях создания новых эффективных алгоритмов построения семейства минимальных графов смежности.

SUMMARY

Filchenkov A.A.. **Minimal join graph set synthesis self-managing cliques algorithm.**

The goal of this work is to offer improvements for the existing minimal join graph set designing algorithm and to actualize them in an improved algorithm.

Algebraic Bayesian network global structure theory in common and join graphs clique classification in particular are overviewed. Minimal join graph set designing algorithm basic scheme is given.

Maximal join graph should be built over a given vertex set. A clique graph should be built by that graph. Every clique should be collated to the set of vertexes that belong to the clique. Cliques order should be specified. With the order all the cliques should be sorted out. All homages should be sorted out for every clique by the means of the Pruefer algorithm, because an homage is a tree. Than all sinews should be sorted out for every homage. So that, all the sinews would be sorted out for each clique. All such sinews should be reordered to sinew array for the clique. According to the minimal join graph set theorem, it's enough to design all branches in the purpose to design all minimal join graphs. It can be done by sorting out all sinew combinations chosen one for each clique and uniting them into the one graph.

On the base of observed classification three basic algorithm improvements that base some cliques specifies, are suggested.

The first improvement is to use only the cliques (e.g. only the maximal join graph subgraphs), the weight of which equals to weigh of any maximal join graph edge. The second improvement is to use only the cliques that have more than one connection components having lost all the edges of the same weight. (e.g. the cliques that has more than one possession).The third improvement is to use cliques that have only two vertices not in designing sinews, but to add their only edge to a special graph — necessary edges graph.

Minimal join graph set designing algorithm that actualizes the improvements is suggested.

The further algebraic Bayesian network global structure analysis might be useful in the purpose to create new efficient minimal join graph set designing algorithms.