

В.А. КОСТЮКОВ, М.Ю. МЕДВЕДЕВ, В.Х. ПШИХОПОВ  
**МЕТОД ОПТИМИЗАЦИИ ТРАЕКТОРИИ МОБИЛЬНОГО  
РОБОТА В ПОЛЕ ИСТОЧНИКОВ-РЕПЕЛЛЕРОВ**

*Костюков В.А., Медведев М.Ю., Пшихопов В.Х. Метод оптимизации траектории мобильного робота в поле источников-репеллеров.*

**Аннотация.** Рассматривается процедура корректировки траектории движения робототехнической платформы (РТП) на плоскости с целью снижения вероятности её поражения/обнаружения в поле конечного числа источников-репеллеров. Каждый из таких источников описан математической моделью некоторого фактора противодействия целостности или скрытности РТП.

Указанная процедура основана, с одной стороны, на понятии характерной вероятностной функции системы источников-репеллеров, позволяющем оценивать степень влияния этих источников на движущуюся РТП. Из этого понятия вытекает используемая здесь в качестве показателя оптимизации целевой траектории вероятность её успешного прохождения. С другой стороны, эта процедура базируется на решении локальных оптимизационных задач, позволяющих корректировать отдельные участки исходной траектории с учетом нахождения в их окрестностях конкретных источников-репеллеров с заданными параметрами. Каждый из таких источников характеризуется потенциалом, частотой воздействия, радиусом действия и параметрами спада поля.

Корректировка траектории происходит итерационно и учитывает целевое значение вероятности прохождения. Основным ограничением на вариацию исходной траектории является максимально допустимое отклонение измененной траектории от исходной. Если такого ограничения нет, то задача может потерять смысл, поскольку тогда можно выделить область, охватывающую все препятствия и источники, и обойти её по периметру. Поэтому осуществляется поиск такого локального экстремума, который соответствует допустимой кривой в смысле указанного ограничения.

Предлагаемая в настоящей работе итерационная процедура позволяет проводить поиск соответствующих локальных максимумов вероятности прохождения РТП в поле нескольких произвольно расположенных и ориентированных источников в некоторой окрестности исходной траектории.

Вначале ставится и решается задача оптимизации траектории при условии движения в поле одного источника с областью действия в виде кругового сектора, затем полученный результат распространяется на случай нескольких аналогичных источников.

Основной проблемой исследования является выбор общего вида функционала в каждой точке исходной кривой, а также его коэффициентов настройки. Показано, что выбор этих коэффициентов настройки есть адаптивная процедура, входными переменными которой являются характерные геометрические величины, описывающие текущую траекторию в поле источников.

Для устранения осцилляций, возникающих вследствие локальности предлагаемой процедуры, применяются стандартные процедуры медианного сглаживания.

Результаты моделирования показывают высокую эффективность предложенной процедуры для корректировки ранее спланированной траектории.

**Ключевые слова:** планирование пути, конфликтная среда, оптимизация движения, вероятность успешного прохождения, группа источников-репеллеров

**1. Введение.** Распространенным подходом к решению задачи учета внешних воздействий различной природы на движущуюся РТП (например, радиолокационные и прочие воздействия с целью её обнаружения) в условиях неопределенности является применение метода потенциальных полей [1-5], функций риска [6-14], и методов, используемых для обхода геометрических препятствий [15 – 21].

Возможности использования обобщенных функций риска в решении оптимизационных задач при наличии неопределенностей подробно рассмотрены в общем обзоре [6].

В работе [7] вводится функция риска, заданная в каждой точке области пространства, в которой расположены источники. Решается задача минимизации интеграла от функции риска при движении вдоль целевой траектории при различных условиях, среди которых можно выделить ограничения по длине пути. Для одного источника данная задача решается аналитически методами вариационного исчисления. Для многих источников в [7] предложен алгоритм нелинейного программирования, применяемый для графа, учитывающего весовые коэффициенты ребер и соответствующие стоимости прохождения.

В работах [8, 9] показано, что в случае объекта, движущегося с переменной скоростью в окрестности одного источника, оптимальная траектория и режим изменения скорости таковы, что текущее значение суммарного «сигнала» от источника должно быть постоянно во времени. В работах [9 – 12] это свойство обобщено на случаи нескольких источников, подвижных и разнородных наблюдателей.

В статьях [13, 14] рассмотрены некоторые возможные стратегии поведения подвижных объектов в группе, увеличивающие эффективность проникновения через систему обороны, состоящую из нескольких источников.

Общей особенностью работ [6–14] является использование функции риска и отсутствие методов расчета вероятностей обнаружения или поражения. Например, экстремальная траектория, полученная численным методом оптимизации рисков на сетевом графе [6], требует вычисления указанной вероятности, так как знание оптимальной траектории еще не гарантирует выполнение миссии подвижным объектом/группой объектов, если нет способа рассчитать вероятность ее выполнения. Наличие методики расчета вероятности выполнения миссии позволит, в некоторых случаях, выбрать приемлемые траектории.

Одним из возможных подходов при решении задач по определению указанных вероятностей является введение аппарата характеристических вероятностных функций [22]. На основании этого метода пред-

ложена итерационная процедура поиска траектории, минимально отклоняющейся от исходной и характеризующейся вероятностью прохождения не ниже заданного значения.

В работе [22] каждому из средств поражения/обнаружения, воздействующих на движущуюся РТП, ставится в соответствие его приближенная модель – источник полей, на основании которых может быть рассчитана вероятность успешного прохождения траектории. Под «успешным прохождением» траектории понимается: в случае источников обнаружения – факт того, что РТП не была обнаружена; в случае источника какого-либо поражающего фактора – факт того, что РТП не была поражена этим источником.

Важной проблемой является корректный учет формы той части пространства, в которой источник влияет на движущуюся в его окрестности РТП. В достаточном общем случае эту часть пространства можно описать круговым сектором, опирающимся на произвольный угол, принадлежащий интервалу от 0 до  $2\pi$ . В случае независимости источника от азимутального угла эта область представляет собой круг. При решении ряда практически важных задач возможно считать радиус этого круга бесконечным, что значительно упрощает анализ, поскольку не нужно использовать функции принадлежности конечных областей влияния источников [22].

При рассмотрении указанного выше случая конечной области влияния источника необходимо дать общий алгоритм поведения объекта внутри этой области, который базируется на двух факторах. Первым фактором является стремление удалиться как можно дальше вдоль радиальной координаты от центра источника возмущений. Вторым фактором является стремление объекта как можно быстрее выйти из этой области. Основной особенностью развиваемого в настоящей статье подхода является сочетание этих двух факторов адекватно текущему положению объекта внутри области источника и его направлению движения относительно границ этой области.

При движении в поле конечного числа источников указанного типа разработан обобщенный алгоритм, базирующийся на сочетании глобального планирования пути от исходной точки до целевой с локальными отклонениями от глобального пути в окрестностях центров соответствующих источников, получаемыми на основе предлагаемой процедуры оптимизации.

Заметим, что как предлагаемый в настоящей статье, так и другие указанные выше алгоритмы обхода препятствий и уклонения от влияния источников различных воздействий могут применяться не только в

отношении РТП, но также и в отношении различных экипажных/пилотируемых или дистанционно управляемых аппаратов. Причем наибольшую эффективность эти методы имеют в случае стационарных или даже заранее известных источников/препятствий. Тогда можно просто заранее спланировать программные траектории движения, оптимальные с точки зрения некоторого критерия, например, минимизации риска или максимизации вероятности успешного прохождения траектории, и существенно облегчить исполнение оператором своих функций.

Однако в целом ряде реальных ситуаций, когда источники и препятствия могут быть существенно недетерминированными и принципиально не подлежащими какой-либо предварительной оценке по своим ключевым параметрам, применение таких методов требует использования автономной системы управления с соответствующими ограничениями по быстродействию.

**2. Процедура оптимизации пути робототехнической платформы в поле нескольких источников возмущений.** Рассмотрим  $K$  источников, область действия каждого из которых  $U_{S,k}$  представляет собой круговой сектор с центром в точке  $O^{(k)}$ , направляющим вектором средней линии  $n_s^{(k)}$ , радиусом  $d_0^{(k)}$ , углом  $\Delta\alpha_s^{(k)}$ , стягивающим этот сектор. Внутри каждой такой области задана характеристическая вероятностная функция (ХВФ) соответствующего источника, представляющая собой вероятность успешного прохождения достаточно малого в пределе элементарного отрезка в течение малого времени  $T_k$ ; отрезок считается малым настолько, чтобы можно было пренебречь его ориентацией относительно источника и переменностью воздействия последнего на РТП, двигающуюся по указанному отрезку. Центр отрезка находится в точке  $M$  с полярными координатами  $d_k, \alpha_k$ , заданными в собственной системе отсчета источника. При этих условиях ХВФ есть непрерывное поле на фазовом пространстве  $\mathbb{R}_2 \otimes (0, T_\delta)$ ,  $\mathbb{R}_2$  есть двумерная евклидова плоскость, а  $(0, T_\delta)$  есть область на дополнительной евклидовой оси  $\mathbb{R}_1$ ,  $T_\delta$  имеет размерность времени. В работе [22] было предложено и обосновано следующее возможное аналитическое представление для ХВФ:

$$q_{0,S_k}(d_k, \alpha_k, T_k) = \begin{cases} \exp\left\{-\varepsilon^{(k)} T_k \exp\left[-(d_k / d_m^{(k)})^{2p_k} - \xi_{a,k} (|\alpha_k / \alpha_m^{(k)}|)^{2q_k}\right]\right\}, \\ \text{при } M \in U_{S,k}; \\ 1, \text{ иначе,} \end{cases} \quad (1)$$

где  $T_k \in (0, T_\delta)$ , параметр  $T_\delta$  определяется так, чтобы значение  $q_{0,s_k}(d_k, \alpha_k, T_k)$  давало с заданной погрешностью вероятность успешного прохождения РТП вдоль указанного отрезка, причем при  $T_\delta \rightarrow 0$  эта погрешность стремится к нулю. Величина  $\varepsilon^{(k)}$  есть характерная частота воздействия источника на РТП; увеличение  $\varepsilon^{(k)}$  снижает вероятность прохождения данного отрезка. Параметр  $d_k$  – расстояние от центра источника  $O^{(k)}$  до точки  $M$ ,  $\alpha_k$  – угол отклонения вектора  $O^{(k)}M$  относительно нормали  $n_S^{(k)}$ , причем  $\alpha_k \geq 0$  при отклонении влево от нормали;  $p_k$  и  $q_k$  – положительные числа;  $d_m^{(k)}$  – эффективный радиус источника,  $d_m^{(k)}$  может быть не равен радиусу сектора  $d_0^{(k)}$ ;  $\alpha_m^{(k)}$  – эффективный угол отклонения от нормали. Коэффициент  $\xi_{a,k} = 1$  в случае учета неравномерности углового распределения по сектору, если  $\xi_{a,k} = 0$  в противном случае.

Обратим внимание, что для обозначения ХВФ у переменной  $q$  используется дополнительный нижний индекс «0», а для обозначения вероятностей прохождения конечных (не элементарных) участков траекторий этот нижний индекс отсутствует.

Каждый источник будем характеризовать набором параметров:

$$S^{(k)} \{O^{(k)}, n_S^{(k)}, d_0^{(k)}, d_m^{(k)}, \Delta\alpha_S^{(k)}, \alpha_m^{(k)}, \varepsilon^{(k)}\}, k = 1, 2, \dots, K. \quad (2)$$

Пусть РТП движется по траектории  $Tr$ , заданной совокупностью прямолинейных отрезков  $A_l A_{l+1}$ ,  $l=1, 2, \dots, N-1$ ; эти отрезки порождены узловыми точками  $A_l$ ,  $l=1, 2, \dots, N$ ,  $N > 3$  – натуральное число.

Рассчитаем вероятность прохождения РТП по траектории  $Tr$ , которая полностью или частично принадлежит хотя бы одной из областей действия источников. В работе [22] получена общая формула расчета такой вероятности для случая, когда область действия каждого источника является вся евклидова плоскость  $\mathbb{R}_2$ , что равносильно  $d_0^{(k)} = \infty$ ,  $\Delta\alpha_S^{(k)} = 2\pi$  во введенных выше обозначениях.

Выражение (1) есть обобщение ХВФ, полученной в [22], на случай произвольного сектора влияния источника, который может быть как ограниченным, так и нет. В этом случае вероятность успешного прохождения траектории  $Tr$  в приближении постоянства  $v$  линейной скорости движения РТП рассчитывается по формулам:

$$\begin{aligned}
 q(Tr) &= \prod_{k=1}^K q_{S_k}(Tr) = \prod_{k=1}^K \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \prod_{i=1}^n q_{0,S_k}(d_{k,i}, \alpha_{k,i}, \frac{|\Delta l_i|}{v}) \right] \\
 &= \exp \left[ - \sum_{k=1}^K \varepsilon^{(k)} \cdot I^{(k)} \right],
 \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
 I^{(k)} &\equiv \frac{\sqrt{\pi} d_m^{(k)}}{2v} \sum_{l=1}^{N-1} \eta_l^{(k)}(A_l, A_{l+1}) \left\{ \exp \left[ - \left( \frac{d_l^{(k)} \sin \varphi_l^{(k)}}{d_m^{(k)}} \right)^2 \right] \times \right. \\
 &\times \left. \left[ \operatorname{sign}(\tilde{\rho}_{2,l}^{(k)}) \operatorname{erf}(|\tilde{\rho}_{2,l}^{(k)}|) - \operatorname{sign}(\tilde{\rho}_{1,l}^{(k)}) \operatorname{erf}(|\tilde{\rho}_{1,l}^{(k)}|) \right] \right\},
 \end{aligned} \tag{4}$$

$$\tilde{\rho}_{1,l}^{(k)} = \frac{d_l^{(k)} \cos \varphi_l^{(k)}}{d_m^{(k)}}, \quad \tilde{\rho}_{2,l}^{(k)} = \tilde{\rho}_{1,l}^{(k)} + \frac{\rho}{d_m^{(k)}}, \tag{5}$$

где  $q_{S_k}(Tr)$  – вероятность прохождения траектории под действием источника  $S^{(k)}$ ;  $d_{(i)}^{(k)}(\rho)$  – расстояние от центра  $k$ -го источника до точки интегрирования на линейном отрезке  $A_l A_{l+1}$ . Здесь в формуле (3) с целью получения представления для  $q_{S_k}(Tr)$  рассматривается произведение соответствующих ХВФ для всех достаточно малых интервалов  $\{\Delta l_i\}_{i=1}^n$ , на которые разбита траектория  $Tr$ , и далее совершается предельный переход при бесконечном измельчении таких разбиений. Функция  $\eta_l^{(k)}$  определяет принадлежность хотя бы одной точки отрезка  $A_l A_{l+1}$  к области  $k$ -го источника:

$$\eta_l^{(k)}(A_l, A_{l+1}) = \begin{cases} 1, & \text{если } A_l \in U_{S,k} \text{ или } A_{l+1} \in U_{S,k}; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{6}$$

Величина  $d_{(i)}^{(k)}(\rho)$  вычисляется следующим образом:

$$d_{(i)}^{(k)}(\rho) = \sqrt{\rho^2 + (d_l^{(k)})^2 + 2d_l^{(k)}\rho \cos \varphi_l^{(k)}}, \tag{7}$$

где  $d_l^{(k)} = |O^{(k)} A_l|$ ;  $\varphi_l^{(k)}$  – угол между направлением  $O^{(k)} A_l$  и вектором  $A_l A_{l+1}$ . Соответствующие геометрические построения приведены на рисунке 1 для случая  $K=2$ . Знак приближенного равенства соответствует

случаю, когда только часть интервала  $A_i A_{i+1}$  принадлежит сектору  $k$ -го источника, согласно строблирующему свойству функции  $\eta_i^{(k)}(A_i, A_{i+1})$ . При выборе достаточно большого числа узловых точек  $N=N_{gr}$  погрешность расчета по формуле (3) будет достаточно малой, и мы будем далее предполагать  $N > N_{gr}$ .

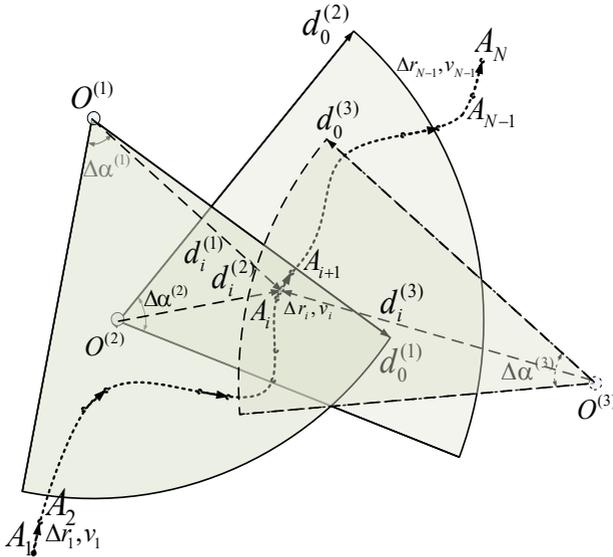


Рис. 1. Случай прохождения исходной траектории в поле действия трех источников

Поставим задачу найти максимум функционала (3) на множестве всевозможных кусочно-линейных траекторий с числом узловых точек не более  $N_{lim}$  и закрепленными концами:

$$q(Tr) \rightarrow \max,$$

$$\text{при условиях: } A_1 \text{ и } A_N \text{ – фиксированы, } N_{gr} \leq N \leq N_{lim}, \quad (8)$$

$$\Delta d(Tr_0, Tr_{opt}) \leq \Delta d_z,$$

где  $A_1$  и  $A_N$  – начальная и конечная точки траектории  $Tr$ ,  $\Delta d(Tr_0, Tr_{opt})$  – отклонение оптимизированной кривой  $Tr_{opt}$  от исходной  $Tr_0$ , которое не должно превышать заданного значения  $\Delta d_z$ .

В связи со сложностью решения задачи (8), преобразуем её в более простую так, чтобы отклонение её решения от соответствующего решения задачи (8) было практически приемлемым, и решение более простой задачи позволяло синтезировать более эффективную по быстродействию процедуру поиска траекторий с заданной вероятностью прохождения.

Таким образом, требуется найти такой функционал  $G(Tr, p)$ , чтобы решение оптимизационной задачи:

$$G(Tr, p) \rightarrow \max,$$

при условиях:

$$A_1 \text{ и } A_N - \text{фиксированы, } N_{gr} \leq N \leq N_{lim}; \quad (9)$$

$$\Delta d(Tr_0, Tr_{opt}) \leq \Delta dz,$$

давало траекторию  $\hat{Tr}$ , которая отклоняется от решения задачи (8) не более чем на заданную величину. Здесь  $p$  есть вектор параметров настройки функционала  $G$ .

Может быть дано следующее возможное решение задачи (9).

Вначале для фиксированной узловой точки кусочно-линейной траектории построим некоторую новую точку так, чтобы ХВФ какого-либо из источников в новой точке имела значение большее, чем в исходной. При этом мы можем наложить ограничение на степень удаления новой точки от исходной. Затем точно так же строим аналогичные точки для всех других источников. В результате получаем некоторый набор точек, соответствующий данному узлу. Взвешенная сумма векторов, проведенных из данного узла до каждой из точек полученного набора, характеризует новую эквивалентную точку, учитывающую степень влияния каждого из источников так, что вектору большей длины соответствует и больший вклад во взвешенной сумме. Это означает, что от источника, которому соответствует вектор большей длины, нужно удалиться в первую очередь, он является более критичным, чем источник, которому соответствует вектор меньшей длины.

После получения эквивалентных точек для каждого узла указанным способом локальной оптимизации получаем некоторую новую кусочно-линейную траекторию движения РТП, которая, однако, не дает решение задачи (9), поскольку не учитывает взаимосвязь отдельных локальных участков искомой оптимальной кривой.

Этот подход лишь в ограниченном числе случаев дает решения, в достаточной степени приближенные к глобальному оптимуму вероят-

ности прохождения. Речь идет о движении в поле источников, удаленных друг от друга настолько, что эффект интерференции их полей проявляется слабо.

Процедура оптимизации (9) должна учитывать положение, по крайней мере, соседних точек, так как достижение локальных минимумов для отдельной точки может вступать в противоречие с достижением максимума вероятности прохождения на линейном отрезке. Аналогичный вывод справедлив и в отношении произвольного участка кусочно-ломаной, объединяющего более одного отрезка.

Локальная оптимизация может приводить к возникновению осцилляций полученной кусочно-линейной кривой. Причиной этого является независимость таких локальных процедур оптимизации. Эти осцилляции повышают длину кривой, что уменьшает вероятность ее успешного прохождения.

Хотя некоторые локальные максимумы или/и глобальный максимум исходной задачи (8) могут соответствовать и сильным отклонениям результирующих узловых точек от указанных выше эквивалентных точек, мы их рассматривать не будем, поскольку такие отклонения одновременно означают и большие смещения от исходных положений узлов, что может противоречить ограничению 2) в (8) и (9).

Высказанные соображения позволяют предложить в качестве функционала  $G(Tr, p)$  в (9) специальный функционал, позволяющий: а) учесть связанность соседних точек в плане достижения глобального максимума; б) убрать осцилляции кривой после локальных оптимизаций следующего вида:

$$G(Tr, p) = -\delta_G \sum_{i=2}^{N-1} [(x'_i - x_i)^2 + (y'_i - y_i)^2] - \delta_L \sum_{i=2}^{N-1} [(x'_i - x_{loc,i})^2 + (y'_i - y_{loc,i})^2]. \quad (10)$$

Здесь первое слагаемое есть сумма квадратов отклонений координат каждой целевой точки  $A'_i(x'_i, y'_i)$  от соответствующей ей исходной  $A_i(x_i, y_i)$  до оптимизации, а второе – сумма квадратов отклонений координат каждой целевой точки  $A'_i(x'_i, y'_i)$  от точки  $A_{loc,i}(x_{loc,i}, y_{loc,i})$ , полученной в результате решения локальной оптимизационной задачи для  $A_i(x_i, y_i)$ . Коэффициенты  $0 \leq \delta_G, \delta_L \leq 1$  характеризуют влияние факторов минимизации отклонения от исходной кривой и от кривой, полученной после локальных оптимизаций узловых точек.

Пусть точки  $A_{loc,i}(x_{loc,i}, y_{loc,i}), i = 1, 2, \dots, N$  получены каким-либо образом, тогда рассмотрим задачу максимизации функционала (10).

Стационарная точка (10) по переменным  $\{x'_i, y'_i\}, i = 2, 3, \dots, N-1$  получается из двух систем линейных уравнений относительно векторов

$$X' \equiv [x'_1, x'_2, \dots, x'_N]^T, Y' \equiv [y'_1, y'_2, \dots, y'_N]^T \quad (11)$$

следующим образом:

$$X'_{st} \equiv [x'_{st,1}, x'_{st,2}, \dots, x'_{st,N}]^T = A^{-1}B_X, Y'_{st} \equiv [y'_{st,1}, y'_{st,2}, \dots, y'_{st,N}]^T = A^{-1}B_Y, \quad (12)$$

$$[A] = \begin{bmatrix} -\tilde{\delta} & \delta_G & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \delta_G & -\tilde{\delta} & \delta_G & 0 & \dots & . & 0 & 0 \\ 0 & \delta_G & -\tilde{\delta} & \delta_G & \dots & 0 & . & 0 \\ 0 & 0 & \delta_G & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & . & . & 0 & 0 \\ 0 & . & 0 & \dots & . & -\tilde{\delta} & \delta_G & \delta_G \\ 0 & 0 & . & \dots & 0 & \delta_G & -\tilde{\delta} & \delta_G \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \delta_G & -\tilde{\delta} \end{bmatrix}, \quad (13)$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} -\delta_L x_{loc,2} - \delta_G x_1, & -\delta_L x_{loc,3}, & \dots, & -\delta_L x_{loc,N-2}, \\ -\delta_L x_{loc,N-1} - \delta_G x_N \end{bmatrix}^T, \quad (14)$$

$$B_2 = [-\delta_L y_{loc,2} - \delta_G y_1, -\delta_L y_{loc,3}, \dots, -\delta_L y_{loc,N-2}, -\delta_L y_{loc,N-1} - \delta_G y_N]^T.$$

Можно показать, что в найденной стационарной точке, которой соответствует набор точек  $A'_{st,i}(x'_{st,i}, y'_{st,i}), i = 2, 3, \dots, N-1$ , выполняется достаточное условие локального максимума по минорам матрицы Гессе при значениях  $\delta_G, \delta_L$  таких, что  $0 \leq \delta_G, \delta_L \leq 1, \delta_G + \delta_L = 1$ . В этой же точке достигается и глобальный максимум:

$$A'_{opt,i}(x'_{opt,i}, y'_{opt,i}) = A'_{st,i}(x'_{st,i}, y'_{st,i}), i = 2, 3, \dots, N-1,$$

поскольку при удалении из указанного локального максимума вдоль любого направления и на любое расстояние функция  $G(Tr, p)$  будет всегда монотонно убывать в силу отсутствия локальных минимумов.

**3. Локальное преобразование для корректировки траектории при движении в поле одного источника.** Рассмотрим задачу нахождения точек  $A_{loc,i}(x_{loc,i}, y_{loc,i})$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , которые далее называются точками локального смещения. Вначале рассмотрим движение РТП в поле действия одного источника. Будут использоваться все переменные, введенные выше для каждого  $k$ -го источника, но применительно к единственному источнику, поэтому они пишутся без индекса « $k$ ».

Требуется сместить точку  $M$  в новое положение  $M'$ , при условии  $M \in U_S$ , так, чтобы в  $M'$  значение ХВФ было больше, чем в  $M$  при одном и том же  $T$ , и, во-вторых, характеризовалось большей степенью приближения к границам сектора  $U_S$ .

Пусть даны сектор  $U_S \{O, n_s, d_0, \Delta\alpha_s, \varepsilon\}$  и исходная траектория  $Tr$ , пересекающая этот сектор (см. рис. 2). Часть траектории  $Tr$ , которая проходит внутри сектора, обозначим  $Tr_l$ . Также рассмотрим произвольную систему точек  $M_i$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ , разбивающую  $Tr_l$  на сегменты  $\Delta r_i$ ,  $i=1, 2, \dots, n-1$ . Далее для простоты в (1) будем брать  $k_a = 0$ .

Найдем параметрическое преобразование:

$$M' = F(S, Tr; \rho; M), \tag{15}$$

где  $\rho$  – векторный параметр, переводящий произвольную внутреннюю для сегмента точку  $M$ , принадлежащую одновременно  $Tr_l$ , в новую точку  $M'$  таким образом, что выполнены следующие два условия.

Условие А. Если  $M=M_k$  есть произвольная точка из последовательности  $\{M_i\}$ ,  $k \leq n$ , тогда вероятность  $q_S(Tr_{l,M})$  успешного прохождения той части  $Tr_{l,M}$  траектории  $Tr_l$ , которая соответствует только узловым точкам подпоследовательности  $\{M_i\}$ ,  $i=k, k+1, \dots, n$ , меньше вероятности  $q_S(Tr'_{l,M'})$  успешного прохождения соответствующей смещенной траектории  $Tr'_{l,M'}$ , полученной как кусочно-ломаная кривая из узловых точек  $Tr_{l,M}$  в результате применения к каждой из них преобразования  $F$ :

$$q_S(Tr'_{l,M'}) > q_S(Tr_{l,M}). \tag{16}$$

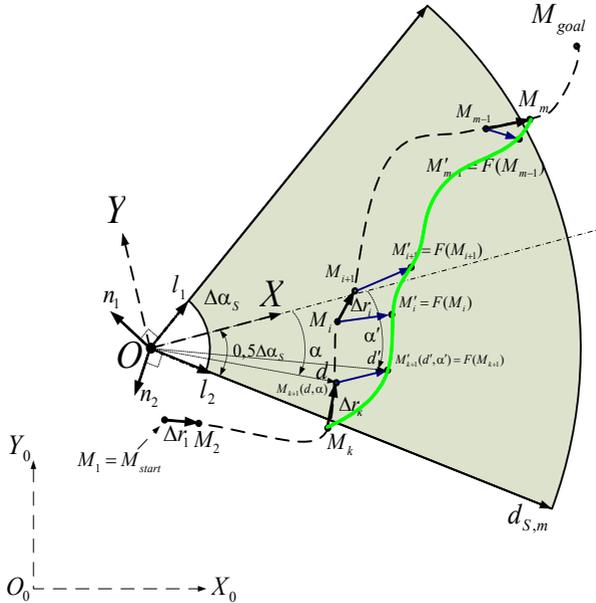


Рис. 2. К постановке задачи синтеза локальной процедуры оптимизации

Условие В. Последовательное применение преобразования  $F$  к смещенным траекториям типа  $Tr'_{M'_k}$ , где  $M'_k = F(M_k)$ , позволяет прийти за ограниченное число шагов  $N_{lim}$  к такой траектории  $Tr_{lim}$ , что вероятность успешного прохождения  $q_{S,lim}$  её внутренней для сегмента  $S$  части  $Tr'_{lim}$  имеет максимально возможное значение на множестве кусочно-линейных траекторий, имеющих те же начальную и конечную точки и то же число узлов. Число  $N_{it,lim}$  есть функция параметра  $\rho$ . Далее полную траекторию РТП, полученную после  $u$ -кратного применения преобразования  $F$ , то есть на  $u$ -й итерации, будем обозначать  $Tr_u$ , а её внутреннюю для сектора  $U_S$  часть как  $Tr'_{1,u}$ .

Условие А является интегральным, подразумевающим корреляцию удаления траектории от центра опасных зон с быстрым достижением границы сегмента, за пределами которого источник не активен. Условие В гарантирует, что при надлежащем выборе параметра  $\rho$  преобразования  $F$  удастся достичь наиболее безопасного положения траектории относительно источника.

Заметим, что достаточным условием выполнения требования А в (16) является следующее:

$$q_{0s}(d', \alpha', T' = |\delta M'_i| / v) > q_{0s}(d, \alpha, T = |\delta M_i| / v), \quad i=1, \dots, n-1, \quad (17)$$

где  $\delta M_i = M_{i+1} - M_i$  – векторная длина  $i$ -го отрезка траектории  $Tr_i$ ,  $\delta M'_i = M'_{i+1} - M'_i$  – векторная длина отрезка, построенного на базе образов точек  $M'_i, M'_{i+1}$  по преобразованию (15),  $v$  – неизменный в данном приближении модуль скорости РТП.

Условие (17), накладываемое на функцию  $F$ , имеет локальный характер и означает требование смещения в более безопасную область движения, причем вероятность перемещения без поражения/обнаружения вдоль любого скорректированного участка  $M'_i M'_{i+1}$  выше вероятности непоражения/необнаружения при движении вдоль исходного участка  $M_i M_{i+1}$ . Для исходной  $M$  и конечной  $M'$  точек использованы полярные координаты; для примера на рисунке 2 отображены точки  $M_{k+1}=M(d, \alpha)$  и образ преобразования  $F: M'_{k+1}(d', \alpha') = F(M_{k+1})$ .

Рассмотрим теперь обобщенную методику синтеза локального преобразования для отклонения траектории в поле одного источника. Преобразование  $F$ , переводящее точку  $M$  в новое положение  $M'$ , включает следующие этапы.

1. Линейное преобразование координат точки  $M$  из базовой системы  $O_0 X_0 Y_0$  в систему отсчета сегмента  $OXY$ , показанную на рисунке 2.

2. Операторное нелинейное преобразование  $\tilde{P} = f(P)$ ,  $P \in U_s$  сегмента на левую полуплоскость, в результате которого сектор  $U_s$  отобразится в полукруг с центром в начале координат, лежащий в левой полуплоскости. В частности, произойдут следующие геометрические отображения: а) точки сегмента, находящиеся на левом берегу разреза вдоль его средней линии, перейдут в положительную полуось  $OY^+$ , а точки сегмента, находящиеся на правом берегу этого же разреза, перейдут в отрицательную полуось  $OY^-$ ; в) левая и правая границы сегмента перейдут в отрицательную полуось  $OX^-$ ; г) если точка  $M$  принадлежит внутренней области сегмента, то она перейдет: в случае нахождения на левой от средней линии части сегмента, то есть от оси  $OX$ , – во второй квадрант плоскости  $OXY$ ; в случае нахождения в правой от  $OX$  части сегмента – в третий квадрант  $OXY$  (см. рис. 3). Таким образом, преобразование  $f$  совершает перевод  $M$  в некоторую точку  $\tilde{M}$ .

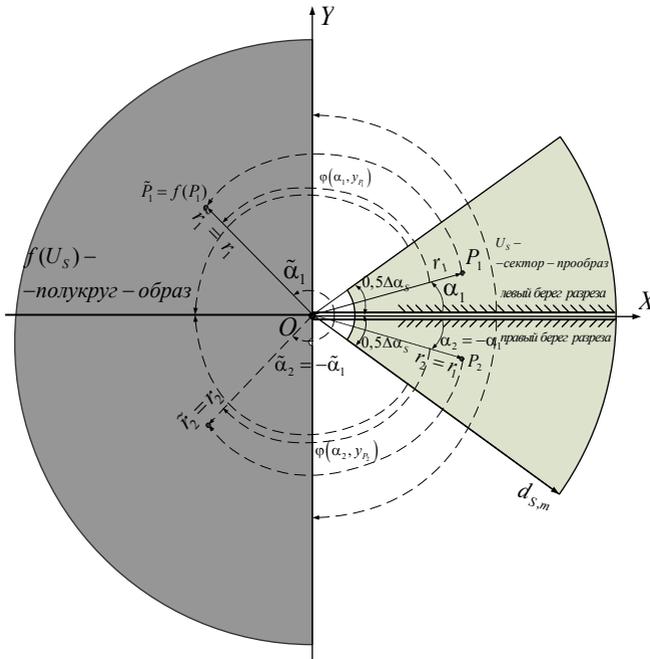


Рис. 3. Геометрия нелинейного операторного преобразования  $\tilde{P}=f(P)$

3. Максимизация специального функционала  $\Phi(\tilde{M}, S, Tr, \rho; P')$  на множестве точек левой полуплоскости,  $P' \in OX^-Y$  и нахождение соответствующего оптимального значения  $P' \equiv \tilde{M}_{opt} = f_{\Phi}(\tilde{M}, S, Tr, \rho)$ ; выбор этого функционала определяется требованиями *A* и *B*, накладываемыми на искомую функцию *F* в (15), и свойствами операторного нелинейного преобразования *f*.

4. Применение обратного операторного преобразования  $f^{-1}$  к точке  $P'$  и получение искомой точки  $M'$ :  $M' \equiv f^{-1}(P')$ .

5. Преобразование координат  $M'$  из  $OXY$  в базовую систему  $O_0X_0Y_0$ .

Произведем выбор операторного нелинейного преобразования  $\tilde{P}=f(P)$ . Подберем такое активное преобразование, которое: а) не меняет длины радиуса-вектора; б) левый берег разреза средней линии сектора отображает на положительную полуось  $OY^+$ , а правый берег этого разреза – на отрицательную полуось  $OY^-$ ; в) левую и правую боковые границы сектора отображает на отрицательную полуось  $OX^-$ .

Преобразование, удовлетворяющее этому условию, имеет вид:

$$\begin{cases} x_{\tilde{P}} = \cos[\varphi(\alpha, y_P)]x_P - \sin[\varphi(\alpha, y_P)]y_P, \\ y_{\tilde{P}} = \sin[\varphi(\alpha, y_P)]x_P + \cos[\varphi(\alpha, y_P)]y_P, \end{cases} \quad (18)$$

где  $\alpha = \text{sign}(y_P)\arccos(x/r)$  – угловое положение точки прообраза  $P$  внутри сектора  $U_S$ ,  $r = \sqrt{x_P^2 + y_P^2}$ , а угол поворота  $\varphi$  равен:

$$\varphi(\alpha, y) = (\pi/2)\text{sign}(y) + (\pi/2 - \alpha_{gr})(\alpha/\alpha_{gr}). \quad (19)$$

Обратным к преобразованию (18) является:

$$x_P = r \cos \alpha, \quad y_P = r \sin \alpha, \quad (20)$$

$$\alpha = [2\tilde{\alpha} / \pi - \text{sign}(y_{\tilde{P}})]\alpha_{gr}, \quad (21)$$

$\alpha$  – искомый угол ориентации прообраза  $P$  точки  $\tilde{P}$  в системе координат  $OXY$  (см. рис. 3), а угол ориентации в этой же системе образа  $\tilde{P}$  есть  $\tilde{\alpha} = \text{sign}(y_{\tilde{P}})a \cos(x_{\tilde{P}}/r)$ ;  $r = \sqrt{x_P^2 + y_P^2} = \sqrt{x_{\tilde{P}}^2 + y_{\tilde{P}}^2} = \text{inv}$ .

Из выражений прямого (18), (19) и обратного (20), (21) преобразований можно получить следующие их свойства.

1. Если точка образа преобразования  $f$  претерпела смещение на большее расстояние от начала координат  $O$ , то и соответствующий прообраз претерпит смещение с тем же приращением модуля радиуса-вектора.

2. Если точка образа, находясь во втором/третьем квадранте, претерпевает смещение к отрицательной полуоси  $OX^-$  так, что угол между этой полуосью и радиус-вектором точки становится меньше, то точка прообраза смещается так, что угол между радиус-вектором прообраза и левой/правой границей сектора становится меньше.

3. Если точка образа, находясь во втором/ третьем квадранте, претерпевает смещение к положительной полуоси  $OY^+$ / отрицательной полуоси  $OY^-$  так, что угол между этой полуосью и радиус-вектором точки становится меньше, то соответствующая точка прообраза смещается в такое положение, что угол между её радиус-вектором и средней линией сектора источника становится меньше.

Рассмотрим более подробно методику синтеза и оптимизацию специального функционала  $\Phi(\tilde{M}, S, Tr, \rho; P)$ . Отметим, что рассмотрен-

ное операторное преобразование  $\tilde{P}=f(P)$  позволяет сформулировать оптимизационную задачу так, чтобы одновременно учесть и реализовать требования  $A$  и  $B$ , накладываемые на искомый функционал  $F$ . Покажем это. Выделим четыре возможных случая движения РТП внутри сектора источника по отношению к его левой и правой линейным границам. Во-первых, РТП может двигаться по направлению к левой границе или от неё, находясь в левом полусегменте (случаи 1 и 2). Во-вторых, РТП может двигаться по направлению к правой границе или же от неё, находясь в правом полусегменте (случаи 3 и 4).

Рассмотрим случаи 1 и 3, когда РТП приближается к соответствующей границе, а скорректированная точка  $M'$  удаляется от центра  $O$  и приближается к этой границе. После преобразования  $\tilde{P}=f(P)$  левая граница сектора отображается в отрицательную полуось  $OX$ . Учтем, что радиус точки  $\tilde{P}$  в системе координат  $OXY$  инвариантен относительно прямого  $f$  и обратного  $f^{-1}$  преобразований (18), (20). Поэтому для увеличения расстояния от  $O$  до  $M'$  и одновременного приближения к левой границе варьируемая точка  $P'$  функционала  $\Phi(\tilde{M}, S, Tr, \rho; P')$  должна стремиться удалиться дальше вдоль отрицательного направления оси  $OX$  и одновременно приблизиться к этой оси. Возможна и смена знака вертикальной координаты, что означает выход из сектора через соответствующую его боковую границу.

Учет этих требований совместно с ограничением на степень удаления от точки  $M$  исходной траектории  $Tr$  может быть реализован в следующих функционалах для 1-го и 3-го случаев, подлежащих дальнейшей максимизации:

$$\Phi_1[\tilde{M}, S, Tr, \rho; x_{P'}, y_{P'}] = -\delta_1 x_{P'} \rho - \delta_2 y_{P'} \rho - \delta' [(x_{P'} - x_{\tilde{M}})^2 + (y_{P'} - y_{\tilde{M}})^2], \quad (22)$$

$$\Phi_3[\tilde{M}, S, Tr, \rho; x_{P'}, y_{P'}] = -\delta_1 x_{P'} \rho + \delta_2 y_{P'} \rho - \delta' [(x_{P'} - x_{\tilde{M}})^2 + (y_{P'} - y_{\tilde{M}})^2], \quad (23)$$

где  $\rho = \rho(S, Tr, \tilde{M})$  – неотрицательный параметр преобразования, имеющий размерность длины и являющийся пока не определенной функцией от параметров источника  $S$ , исходной траектории  $Tr$  и точки  $M(x_{\tilde{M}}, y_{\tilde{M}})$ ;  $\delta_{1,2} = \delta_{1,2}(S, Tr, \tilde{M})$  – пока не определенные функции взвешенных факторов удаления от центра и приближения к боковой границе, зависящие от  $S, Tr, \tilde{M}$ , причем  $0 \leq \delta_{1,2} \leq 1$ ,  $\delta_1 + \delta_2 \leq 1$ . Величина  $\delta' = 1 - \delta_1 - \delta_2$  – взвешенный коэффициент, отражающий степень притяжения к исходной точке  $\tilde{M}$  кривой при проведении оптимизации. Координаты целевой точки функционала есть  $x_{P'}, y_{P'}$ .

Стационарные точки  $P'_{st}$  функционалов (22) и (23) имеют следующие координаты:

для случая 1

$$x_{P',st} \equiv x_{\tilde{M}_{opt}} = x_{\tilde{M}} - \frac{\delta_1 \rho}{2\delta'}, \quad y_{P',st} \equiv y_{\tilde{M}_{opt}} = y_{\tilde{M}} - \frac{\delta_2 \rho}{2\delta'}, \quad (24)$$

для случая 3:

$$x_{P',st} \equiv x_{\tilde{M}_{opt}} = x_{\tilde{M}} - \frac{\delta_1 \rho}{2\delta'}, \quad y_{P',st} \equiv y_{\tilde{M}_{opt}} = y_{\tilde{M}} + \frac{\delta_2 \rho}{2\delta'}. \quad (25)$$

Вторые производные функционала (22) принимают в стационарной точке (24) следующие значения:  $(\partial^2 \Phi_{1,3} / \partial x_{P'}^2) \Big|_{P'=P'_{st}} = -2\delta' < 0$ ,

$(\partial^2 \Phi_{1,3} / \partial y_{P'}^2) \Big|_{P'=P'_{st}} = -2\delta' < 0$ ,  $(\partial^2 \Phi_{1,3} / \partial x_{P'} \partial y_{P'}) \Big|_{P'=P'_{st}} = 0$ . Следовательно,

согласно достаточному условию существования локального максимума [23], в точках (24) и (25) функционалы (22), (23) достигают локальных максимумов, которые являются глобальными в силу единственности стационарной точки в этих двух случаях.

Таким образом, выражения (24), (25) дают координаты скорректированной точки  $\tilde{M}_{opt} = P'_{st}$  в случаях 1 и 3.

Теперь рассмотрим случаи 2 и 4. В случае 2 происходит движение в левом полусекторе от левой границы. Поэтому целесообразно сделать так, чтобы после нелинейного преобразования  $\tilde{P} = f(P)$  точка  $\tilde{P}$  притягивалась к образу срединной линии сектора по  $f$ , точнее, к образу левого берега разреза, произведенного вдоль этой линии. Но этот образ принадлежит, как было указано ранее, положительной полуоси  $OY^+$ . С другой стороны, как и для случаев 1 и 3, надо стремиться отодвинуть точку  $\tilde{P}$  как можно дальше от начала координат  $O$ .

В случае 4 происходит удаление от правой границы правого сектора. Следовательно, здесь целесообразно сделать так, чтобы после нелинейного преобразования  $\tilde{P} = f(P)$  точка  $\tilde{P}$  далее притягивалась к образу по  $f$  правого берега разреза, произведенного вдоль срединной линии сектора. Но этот образ принадлежит отрицательной полуоси  $OY$ . С другой стороны, надо по-прежнему стремиться отодвинуть точку  $\tilde{P}$  как можно дальше от точки  $O$ .

Перечисленным для случаев 2 и 4 требованиям удовлетворяют следующие функционалы:

$$\Phi_2[\tilde{M}, S, Tr, \rho; x_{P'}, y_{P'}] = \delta_1 y_{P'} \rho + \delta_2 x_{P'} \rho - \delta' \left[ (x_{P'} - x_{\tilde{M}})^2 + (y_{P'} - y_{\tilde{M}})^2 \right]; \quad (26)$$

$$\Phi_4[\tilde{M}, S, Tr, \rho; x_{p'}, y_{p'}] = -\delta_1 y_{p'} \rho + \delta_2 x_{p'} \rho - \delta_1' \left[ (x_{p'} - x_{\tilde{M}})^2 + (y_{p'} - y_{\tilde{M}})^2 \right]. \quad (27)$$

Здесь коэффициент  $\delta_1$  отражает фактор удаления от центра, а  $\delta_2$  – фактор приближения к срединной линии со стороны левого полусектора – для случая 2, либо правого полусектора – для случая 4.

Решая задачу оптимизации функционалов (26), (27) по ранее приведенной методике, получаем точки глобальных максимумов:

для случая 2:

$$x_{p',st} \equiv x_{\tilde{M}_{opt}} = x_{\tilde{M}} + \frac{\delta_2 \rho}{2\delta_1'}, \quad y_{p',st} \equiv y_{\tilde{M}_{opt}} = y_{\tilde{M}} + \frac{\delta_1 \rho}{2\delta_1'}; \quad (28)$$

для случая 4:

$$x_{p',st} \equiv x_{\tilde{M}_{opt}} = x_{\tilde{M}} + \frac{\delta_2 \rho}{2\delta_1'}, \quad y_{p',st} \equiv y_{\tilde{M}_{opt}} = y_{\tilde{M}} - \frac{\delta_1 \rho}{2\delta_1'}; \quad (29)$$

Итоговый функционал  $\Phi$  принимает вид:

$$\Phi = \{\Phi_i, \text{ если } Y(i), i = 1, 2, 3, 4\} \quad (30)$$

$$Y1: M \in U_{S,l} \text{ и } (M_{prev} M \cdot n_1) \geq 0,$$

$$Y2: M \in U_{S,l} \text{ и } (M_{prev} M \cdot n_1) < 0, \quad (31)$$

$$Y3: M \in U_{S,r} \text{ и } (M_{prev} M \cdot n_1) < 0,$$

$$(32)$$

$$Y4: M \in U_{S,r} \text{ и } (M_{prev} M \cdot n_1) \geq 0.$$

Здесь  $n_{1,2}$  – внешние нормали к левой и правой боковым границам сектора соответственно;  $M$  – точка из разбиения  $\{M_i\}$ ,  $i=1,2,\dots,n$  части  $Tr_i$  исходной траектории, лежащей внутри сектора  $U_S$  на линейные участки  $\Delta r_i$ ,  $i=1,2,\dots,n-1$ ;  $M_{prev}$  – предыдущая по отношению к  $M$  точка указанной последовательности.

Соответствующее функционалу (30) решение оптимизационной задачи дано выражением:

$$\begin{bmatrix} x_{\tilde{M}_{opt}} \\ y_{\tilde{M}_{opt}} \end{bmatrix}^T = f_{\Phi}(\tilde{M}, S, Tr, \rho) = \begin{bmatrix} x_{\tilde{M}} \\ y_{\tilde{M}} \end{bmatrix}^T + (\rho / 2\delta') \begin{bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \end{bmatrix}^T, \quad (33)$$

$$\delta_x = \begin{cases} -\delta_1, & \text{если У1 или У3;} \\ \delta_2, & \text{иначе;} \end{cases}$$

$$\delta_y = \begin{cases} -\delta_2, & \text{если У1,} \\ \delta_1, & \text{если У2,} \\ \delta_2, & \text{если У3,} \\ -\delta_1, & \text{если У4.} \end{cases} \quad (34)$$

После нахождения точки  $\tilde{M}_{opt}$  необходимо возвратиться в область оригиналов, то есть преобразов по  $f$ , с помощью выражений (20), (21) обратного преобразования  $f^1$ .

Указанные особенности прямого и обратного операторных отображений  $f$  и  $f^1$  совместно с проведенным обоснованием выбора функционала (30) позволяют заключить, что свойство  $A$  параметрического преобразования (15)  $M' = F(S, Tr; \rho; M)$  выполняется.

Теперь покажем, что достижение свойства  $B$  целевого преобразования  $F$  и организация итерационной процедуры коррекции исходной траектории могут быть обеспечены выбором параметра  $\rho$  – характеристической длины функционала (30). Из выражения (33) следует, что значения координат  $x_{M'}$  и  $y_{M'}$  определяются в том числе параметром  $\rho$ . Длина радиус-вектора  $O\tilde{M}_{opt}$ , получающегося после проведения смещения  $\tilde{M} \rightarrow \tilde{M}_{opt}$  согласно соотношению (33), равна:

$$\begin{aligned} |\tilde{M}_{opt}| = x_{\tilde{M}_{opt}}^2 + y_{\tilde{M}_{opt}}^2 &\equiv \tilde{r}_{opt}^2 = \left[ x_{\tilde{M}} + \frac{\delta_x \rho}{2\delta'} \right]^2 + \left[ y_{\tilde{M}} + \frac{\delta_y \rho}{2\delta'} \right]^2 = \\ &= a\rho^2 + b\rho + c, \end{aligned} \quad (35)$$

где  $a = \frac{\delta_x^2 + \delta_y^2}{4\delta'^2}$ ,  $b = \frac{x_{\tilde{M}} \delta_x + y_{\tilde{M}} \delta_y}{\delta'}$ ,  $c = x_{\tilde{M}}^2 + y_{\tilde{M}}^2 = r^2$ . Здесь использовано то, что точка  $\tilde{M}$  обязательно принадлежит второму или третьему квадранту, согласно особенности преобразования  $f$ .

Пусть поставлена задача отыскать такое значение  $\rho$ , при котором длина радиус-вектора  $O\tilde{M}_{opt}$  равна заданному значению  $\tilde{r}_{opt} = kr$ , где

число  $k > 1$  в точке  $\tilde{M}$  характеризует степень нарастания радиуса при совершении преобразования  $\Phi$  в  $\tilde{M}$ .

На основании (35) эта задача сводится к нахождению решения следующего уравнения:

$$a\rho^2 + b\rho + c - \tilde{r}_{opt}^2 = 0. \quad (36)$$

Решение (36) с учетом требования положительности  $\rho$  имеет вид:

$$\rho(k, \tilde{M}) = \frac{2\delta'}{\delta_1^2 + \delta_2^2} \left( -\Delta\rho + \sqrt{\Delta\rho^2 + r^2(k^2 - 1)(\delta_1^2 + \delta_2^2)} \right), \quad (37)$$

$$\Delta\rho = \begin{cases} \Delta\rho_I - (\delta_1 x_{\tilde{M}} + \delta_2 y_{\tilde{M}}), & \text{если У1,} \\ \Delta\rho_{II} - \delta_2 x_{\tilde{M}} + \delta_1 y_{\tilde{M}}, & \text{если У2,} \\ \Delta\rho_{III} - \delta_1 x_{\tilde{M}} + \delta_2 y_{\tilde{M}}, & \text{если У3,} \\ \Delta\rho_{IV} - \delta_2 x_{\tilde{M}} - \delta_1 y_{\tilde{M}}, & \text{если У4.} \end{cases} \quad (38)$$

Поэтому параметр  $\rho$ , выбранный по (37), (38), определяет скорость сходимости итерационной процедуры трансформации исходной траектории  $Tr$  при движении в поле одного источника; при таком выборе параметра  $\rho$  и дополнительном соблюдении условия А п. 3 обеспечивается выполнение и условия В п. 3.

Произведем выбор параметра  $k$  преобразования  $\Phi$  для обеспечения выполнения условия (16). Выразим полярные координаты преобразованной точки  $M'(r', \alpha')$  (согласно цепочке преобразований  $M \rightarrow \tilde{M} \rightarrow P' \rightarrow M'$ ) через соответствующие полярные координаты исходной точки  $M(r, \alpha)$ .

Предположим, что исходная точка  $M$  находится в левом полусекторе источника и движется по направлению к его левой границе, то есть, что имеется случай 1. Случаи 2, 3, 4 рассматриваются аналогично.

Пусть преобразованная точка  $M'$  имеет радиальную координату  $r' = kr$  в полярной системе координат источника, где  $r$  – радиальная координата исходной точки  $M$ ,  $k > 1$  – пока не определенный коэффициент. Определим её угловую координату  $\alpha'$  согласно выражениям (37), (38), в которых  $\Delta\rho_I = -(\delta_1 x_{\tilde{M}} + \delta_2 y_{\tilde{M}})$ .

В силу свойств преобразования функционала  $\Phi_1$  трансформированная точка  $P \in \Phi_1(\tilde{M})$  имеет следующую угловую координату в полярной системе источника:

$$\alpha_{P'} = \pi + \arctan \left( \frac{y_{\tilde{M}} + \Delta y_{\tilde{M}}}{x_{\tilde{M}} + \Delta x_{\tilde{M}}} \right), \quad (39)$$

где  $\Delta x_{\tilde{M}} = \frac{\delta_x \rho}{2\delta'}$ ,  $\Delta y_{\tilde{M}} = \frac{\delta_y \rho}{2\delta'}$  согласно выражению (33).

Применим к  $P'$  инверсное к  $f$  преобразование. Согласно (21), угол  $\alpha'$  образа  $M'$  с учетом неравенств  $y_M, y_{\tilde{M}} > 0$  для рассматриваемого случая 1 может быть найден по формулам:

$$\alpha_{M'}(k, r, \alpha) = \alpha' = \left[ 1 + (2/\pi) \arctan \left( \frac{y_{\tilde{M}} + \Delta y_{\tilde{M}}}{x_{\tilde{M}} + \Delta x_{\tilde{M}}} \right) \right] \alpha_{gr}, \quad (40)$$

$$\begin{cases} x_{\tilde{M}} = r \{ \cos [\varphi(\alpha)] \cos \alpha - \sin [\varphi(\alpha)] \sin \alpha \}, \\ y_{\tilde{M}} = r \{ \sin [\varphi(\alpha)] \cos \alpha + \cos [\varphi(\alpha)] \sin \alpha \}, \end{cases} \quad (41)$$

$$\varphi(\alpha) = (\pi/2) (1 + \alpha / \alpha_{gr}) - \alpha. \quad (42)$$

Определим условия выполнения неравенств (17):

$$q_{0S}(d', \alpha', T') = |\delta M'_i| / \nu > q_{0S}(d, \alpha, T = |\delta M_i| / \nu), \quad i=1, \dots, n-1. \quad (43)$$

Рассмотрим ХВФ с равномерным азимутальным распределением и коэффициентом  $p=1$  в выражении (1). Тогда для ХВФ неравенство (17) может быть переписано в следующем виде:

$$\frac{|\delta M'_i|}{|\delta M_i|} < \exp \left[ (r'^2 - r^2) / d_m^2 \right]. \quad (44)$$

Далее, используя известные дифференциальные соотношения [24], связывающие модули малых приращений  $|\delta M_i|$  и  $|\delta M'_i|$  с соответствующими приращениями координат  $\delta r$  и  $\delta \alpha$ , получим:

$$\frac{|\delta M'_i|}{|\delta M_i|} \cong k \sqrt{\frac{\delta r^2 + r^2 (\partial_r \alpha' \delta r + \partial_\alpha \alpha' \delta \alpha)^2}{\delta r^2 + r^2 \delta \alpha^2}}, \quad (45)$$

где  $\partial_r \alpha'$ ,  $\partial_\alpha \alpha'$  - частные производные функции (40) по  $r$  и  $\alpha$ , взятые в точке  $M(r, \alpha)$ .

В итоге неравенству (17), являющемуся достаточным условием для исходного требования  $A$  в (16), после несложных преобразований, может быть поставлено в соответствие следующее неравенство:

$$k \sqrt{\frac{\delta r^2 + r^2 (\partial_r \alpha' \delta r + \partial_\alpha \alpha' \delta \alpha)^2}{\delta r^2 + r^2 \delta \alpha^2}} < \exp \left[ \left( \frac{r}{d_m} \right)^2 (k^2 - 1) \right], \quad (46)$$

Неравенство (46) имеет решение, поскольку при достаточно больших значениях  $k$  правая часть превышает левую с любым конечным коэффициентом пропорциональности. Для большинства практически важных случаев коэффициент при  $k$  в левой части (46) ограничен значением  $\sqrt{3}$ . Например, при  $r=2d_m$  условие (46) выполняется уже при  $k=1.2$ , при  $r=d_m$  это условие выполняется при  $k=1.4$ , а при  $r=0,25d_m$  минимальное значение  $k=6.3$ .

Поскольку максимально допустимое значение  $k$ , удовлетворяющее (46), ничем сверху не ограничено, то всегда возможен такой выбор  $k$ , что каждая следующая смещенная по  $F$  траектория будет отличаться от предыдущей не менее, чем на заданное расстояние. Например, при любом заданном минимально возможном расстоянии  $\Delta r_{pr} = |MM'|$  между какой-либо исходной точкой  $M$  и её образом  $M'$  по  $F$  можно следующим выбором значения  $k$ :

$$k = \max_i \left[ \max \left( k_i, \frac{\Delta r}{r_i} + 1 \right) \right], \quad (47)$$

обеспечить выполнение неравенств:

$$|M_i M_i'| \geq \Delta r_{pr}, i=1,2, \dots, n, \quad (48)$$

для каждой точки  $M_i' \in Tr_m$  кусочно-линейной кривой на данной итерации. Здесь  $k_i > 1$  есть значение параметра  $k$  для точки  $M_i$ , выбранное так, чтобы удовлетворялось неравенство (46).

Таким образом, возможность выбора параметра  $k$ , согласно соотношениям (46)-(48), обеспечивает выполнение условия  $A$  преобразования  $F$ .

Выбор преобразования  $P' = f_\Phi(\tilde{M}, S, Tr, \rho)$  и функции  $\rho(S, Tr, \tilde{M})$  с учетом (46)-(48) позволяет осуществить локальную оптимизацию каждой точки  $M_i$  по функционалу  $F$  с получением новой последовательности точек  $M'_i, i=1,2, \dots, n$  так, что требования  $A, B$  целевого функционала  $F$  удовлетворяются.

Рассмотрим теперь методику выбора весовых коэффициентов  $\delta', \delta_1, \delta_2$  функционала  $\Phi$ . Степень влияния коэффициентов  $\delta_1$  и  $\delta_2$  факторов должна быть различной для разных внутренних точек сегмента. Действительно, для некоторой точки  $M_1$ , которая находится достаточно близко от боковой границы сектора, коэффициент  $\delta_2$  должен иметь большее значение, чем для точки  $M_2$ , находящейся достаточно далеко от боковых границ, но при том же радиальном удалении от центра источника, что и точка  $M_1$  (см. рис. 4). Точно так же, для точки  $M_2$  значение коэффициента  $\delta_1$  должно быть меньше, чем для точки  $M_3$ , находящейся вплотную к внешней круговой границе сектора.

В первом из этих примеров большее значение коэффициента  $\delta_2$  для  $M_1$  стимулирует в последующем РТП быстро покинуть сектор источника из положения  $M_1$  через соответствующую близко расположенную боковую границу. Это, однако, справедливо при условии, что движение в данной точке совершается в сторону самой границы сектора. А во втором - большое значение  $\delta_1$  для  $M_3$  стимулирует РТП быстро покинуть сектор источника из положения  $M_3$  через соответствующую близко расположенную внешнюю границу сектора.

Пусть задан коэффициент  $\delta'$ , отражающий степень притяжения к исходной точке  $\tilde{M}$  кривой при оптимизации функционала (30). Введем следующее правило определения зависимости коэффициентов  $\delta_1$  и  $\delta_2$  от положения точки  $M$ :

$$\delta_1 = k_\delta / (d_{sm} - r), \quad \delta_2 = k_\delta / (r \Delta \varphi), \quad (49)$$

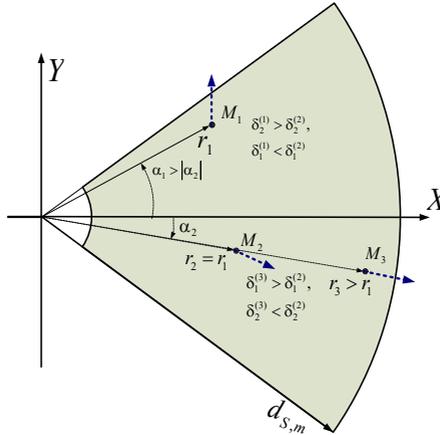


Рис. 4. Пояснение зависимости весовых коэффициентов  $\delta_1$  и  $\delta_2$  от положения исходной точки  $M$  внутри сектора источника  $U_S$

$$k_\delta = (1 - \delta') / \left[ (r \Delta\varphi)^{-1} + (d_{S,m} - r)^{-1} \right]. \quad (50)$$

Здесь  $\Delta\varphi$  – угловое расстояние между радиусом-вектором текущей точки  $\tilde{M}$  и направляющим вектором боковой границы, к которой движется РТП. Значение  $\Delta\varphi$  зависит от рассматриваемого случая:

$$\Delta\varphi = \begin{cases} \Delta\alpha/2 - |\alpha|, & \text{если У1 или У4;} \\ \Delta\alpha/2 + |\alpha|, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (51)$$

где У1 и У4 определяются согласно (31), (32).

**4. Локальное преобразование для корректировки траектории движения в поле нескольких источников.** Пусть имеется несколько источников возмущений с параметрами (2).

Рассмотрим участки траектории, которые целиком принадлежат секторам, минимум, двух источников (рис. 1). Введем весовые коэффициенты эффективности источников  $\delta_s^{(k)}$ ,  $k=1,2,\dots, K$ , где  $0 \leq \delta_s^{(k)} \leq 1$  и  $\sum \delta_s^{(k)} = 1$ , которые учитывают влияние, степень активности и опасность каждого из источников при планировании корректировки перемещений РТП в режиме реального времени.

Пусть для  $M$  траектории  $Tr$  применена процедура корректировки для каждого из  $\tilde{K}$  источников, в сектора которых попала точка  $M$ . В результате получены следующие точки:  $M^{(k(j))'}$ ,  $j=1,2,\dots,\tilde{K}$ . Здесь  $k(j)$ ,  $j=1,2,\dots,\tilde{K}$  есть функция выделения подпоследовательности номеров источников, в которые попадает точка  $M$ . Тогда в качестве радиуса-вектора  $O_0M'$  результирующей точки  $M'$  в базовой системе координат  $O_0X_0Y_0$  (рис. 1), соответствующей корректировке исходной точки  $M$  с учетом всех  $\tilde{K}$  источников, примем следующий:

$$O_0M' = O_0M + \sum_{j=1}^{\tilde{K}} \delta_S^{(k(j))} \cdot MM^{(k(j))'}, k = 1, 2, \dots, K, \quad (52)$$

где  $MM^{(k)'}$  есть векторная длина линейного отрезка с началом в  $M$  и концом в  $M^{(k)'}$ .

Преобразование (52)  $F_k$  каждой точки  $A_i(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  исходной кривой  $Tr$ , находящейся в поле действия нескольких источников, порождает набор точек локального смещения:

$$A_{loc,i}(x_{loc,i}, y_{loc,i}) = F_K \left[ \left\{ S^{(k)} \right\}, Tr; \rho; A_i(x_i, y_i) \right], \quad (53)$$

$$i = 1, 2, \dots, N.$$

**5. Общая итерационная процедура достижения целевой вероятности прохождения.** На основании рассмотренных в предыдущих разделах процедур может быть выработана итерационная процедура нахождения траектории, соответствующей заданной целевой вероятности прохождения.

Рассмотрим вопрос о необходимости варьирования числа узлов кусочно-линейной кривой при увеличении номера итерации. Заметим, что при неизменном значении числа узловых точек  $N$  в результате применения процедуры локальной оптимизации к кривой на текущей итерации могут найтись такие точки  $A_{i,u}, A_{i+1,u}$ , что длина отрезка  $A_{i,u}A_{i+1,u}$  будет недопустимо большой, что не позволит провести корректно поиск траектории с заданной целевой вероятностью. Например, при нахождении одной точки вне полей источников, а второй вблизи исходной кривой, но в поле действия источника, первая точка не будет подвергаться корректировке в результате применения процедуры локальной оптимизации на каждом шаге, а вторая точка – будет, поэтому для достаточно большого номера  $u$  итерации они могут удалиться на значительное рас-

стояние. Аналогичная ситуация может иметь место для точек, соседствующих с граничными, которые закреплены. В обоих случаях могут появиться отрезки значительной длины.

По этой причине в оптимизационных задачах (8) и (9) задана возможность увеличения числа узловых точек с ростом номера итерации. Установив, например, некоторый предел  $|\Delta r|_{gr}$  на максимальную длину отрезка, можно подвергнуть дискретизации отрезки полученной на очередной итерации кривой, которые имеют длину, большую  $|\Delta r|_{gr}$ .

Как уже отмечалось, первая составляющая функционала (10) способствует сокращению осцилляций кривой, возникающих вследствие применения локальной оптимизации. Степень этого сокращения регулируется коэффициентом  $\delta_G$ . Однако большие значения  $\delta_G$  означают малые значения коэффициента  $\delta_L = 1 - \delta_G$ , что уменьшает эффективность локальной оптимизации. Недостаточно большое значение  $\delta_G$  может приводить к тому, что на некоторых участках будут наблюдаться осцилляции кривой, для снижения которых предлагается процедура сглаживания медианного типа, когда в окрестности радиуса  $R_{mean}$  каждой узловой точки кривой берутся соседние узловые точки, и среднее арифметическое их радиус-векторов считается новым положением данной точки.

Таким образом, алгоритм искомой итерационной процедуры следующий.

Формируется цикл  $u=0, 1, 2, 3, \dots$ , начиная с нулевой итерации, соответствующей начальной кривой, условием выхода из которого является превышение вероятности прохождения  $q(Tr_u)$  траектории заданного значения  $q_{gr}$ ; в цикле производятся следующие операции:

1. Находятся отрезки, образованные соседними точками  $A_{i,u}(x_{i,u}, y_{i,u}), i = 1, 2, \dots, N$  кривой на  $u$ -й итерации, длина которых превосходит  $|\Delta r|_{gr}$ , и проводится их дискретизация. В результате получается промежуточная кусочно-линейная кривая  $Tr_{div,u+1}$  с точками  $A_{i,u+1}^{(1)}(x_{i,u+1}^{(1)}, y_{i,u+1}^{(1)}), i = 1, 2, \dots, N(u+1)$ .

2. Находится набор точек локального смещения на  $u+1$ -й итерации с помощью процедуры локальной оптимизации (53):

$$A_{i,u+1}^{(2)}(x_{i,u+1}^{(2)}, y_{i,u+1}^{(2)}) = F_K \left[ \{S^{(k)}\}, Tr_u; \rho; A_{i,u+1}^{(1)}(x_{i,u+1}^{(1)}, y_{i,u+1}^{(1)}) \right], \quad (54)$$

$$i = 1, 2, \dots, N(u+1).$$

В результате получается кусочно-линейная кривая  $Tr_{loc,u+1}$ .

3. Находится оптимальная траектория для функционала (10) по формулам (12) – (15):

$$X_{u+1} = A^{-1}B_{X,u+1}, Y = A^{-1}B_{Y,u+1}, A_{i,u+1}^{(3)}(x_{i,u+1}^{(3)}, y_{i,u+1}^{(3)}) = [X_{u+1}(i), Y_{u+1}(i)]^T, \quad (55)$$

$$i = 2, 3, \dots, N(u+1) - 1, A_{1,u+1}^{(2)} = A_{1,u+1}^{(1)}, A_{N(u+1),u+1}^{(2)} = A_{N(u+1),u+1}^{(1)},$$

где  $B_{X,u+1}, B_{Y,u+1}$  есть правые части соответствующих линейных уравнений относительно координат точек  $A_{i,u+1}^{(3)}, i = 2, 3, \dots, N(u+1) - 1$  с матрицей  $A$ , не зависящей от  $u$ . В результате получаем кривую  $Tr_{glob,u+1}$ .

4. Производится сглаживание  $Tr_{glob,u+1}$ , после чего получается искомая траектория  $Tr_{u+1}$   $Tr_{u+1}$  на  $u+1$  итерации с точками

$$A'_{i,u+1}(x'_{i,u+1}, y'_{i,u+1}), i = 1, 3, \dots, N(u+1).$$

Заметим, что используемая в данном алгоритме процедура локальной оптимизации узловых точек базируется на адаптивной подстройке параметров  $\rho, k, \delta', \delta_1, \delta_2$  преобразования  $\Phi$  для каждого источника на каждой текущей итерации, исходя из текущего расположения некоторой узловой точки траектории на этой итерации относительно сегмента источника.

**6. Результаты моделирования.** Пусть известна исходная кривая, по которой предполагается движение РТП для достижения заданной целевой точки.

Рассмотрим введенную итерационную процедуру на примере 1 движения вдоль исходной прямолинейной траектории, пересекающей сектор источника с ХФВ (1) при  $k_a=0$  с параметрами  $\varepsilon=3, d_m = 10, \Delta\alpha_s = \pi/3, O(0;0); n=[1;0]$ . Параметры итерационной процедуры  $\mu=0.1, \delta'=0.4$ , рассмотренное число итераций  $N_{iter}=50$ , весовые коэффициенты источников  $\delta_s^{(k)}, k=1, 2, \dots, K$  для простоты положены равными. Это означает, что РТП необходимо избегать попадания в зоны действия каждого из источников в одинаковой степени. Будем соотносить допустимое число итераций с требованием непревышения некоторого критического удаления от исходной кривой. Движение РТП предполагается с постоянной скоростью  $v=4$  м/с. Целевое значение вероятности прохождения везде принято равным  $q_{goal}=0,9$ .

Из рисунке 5а, где приведены траектории итераций 1, 5, 9, 10, 20, 30, 40, 50 для примера 1, видно, что с ростом номера  $i$  итерации вероятности прохождения образуют следующую последовательность  $q_{S,i}$ :  $q_{S,i=1}=0.6583$ ;  $q_{S,i=5}=0.7231$ ;  $q_{S,i=9}=0.7885$ ;  $q_{S,i=10}=0.8029$ ;  $q_{S,i=20}=0.9087$ ;  $q_{S,i=30}=0.9513$ ,  $q_{S,i=40}=0.9667$ ,  $q_{S,i=50}=0.9649$ .

Здесь и далее исходная кусочно-линейная кривая показана синей сплошной линией, сглаженная траектория – сплошной желтой, а итерационные кривые изображены зеленым пунктиром, за исключением кривой на той итерации, на которой достигается максимальное значение вероятности успешного прохождения – она показана сплошной зеленой линией. Если на графиках не видна исходная синяя кривая, значит, она практически совпадает с желтой кривой сглаживания и визуально перекрывается ею.

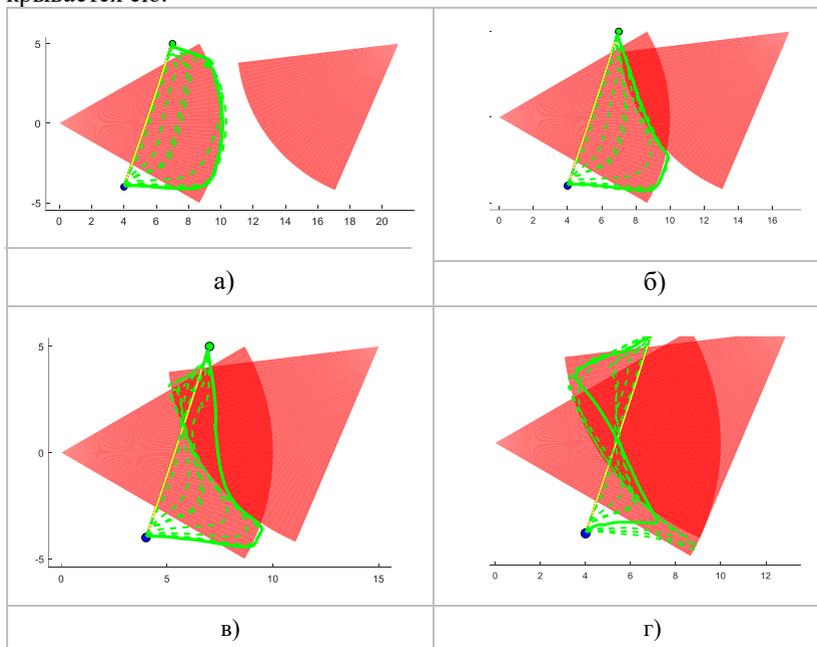


Рис. 5. Моделирование движения РТП в поле одного и двух источников: а) для одиночного источника влияния; б) два источника, при положении второго источника  $O_2(17;5)$ ; в) два источника, при положении второго источника  $O_2(15;5)$ ; г) два источника, при положении второго источника  $O_2(13;5)$

В примере 1 максимальное значение вероятности прохождения достигается при 40-й итерации. Дальнейшее незначительное (около 1%)

уменьшение вероятности прохождения вызвано влиянием погрешностей, обусловленных шагом дискретизации и сглаживанием промежуточных кривых на каждой итерации. Целевая вероятность здесь достигается уже на 20-й итерации.

На рисунке 5б приведен пример движения РТП в поле двух источников. Источники такие же, как и в примере 1, но центр и направляющий вектор второго равен:  $O_2(17;5)$ ;  $n_2 = [-0,8; -0,6]$ . Параметры итерационной процедуры те же, что и для примера 1. Вероятности прохождения образуют следующую последовательность для тех же значений  $u$ , что и в примере 1:  $q_{S,u=1} = 0.6587$ ;  $q_{S,u=5} = 0.7228$ ;  $q_{S,u=9} = 0.7773$ ;  $q_{S,u=10} = 0.7860$ ;  $q_{S,u=20} = 0.8420$ ;  $q_{S,u=30} = 0.8742$ ,  $q_{S,u=40} = 0.8788$ ,  $q_{S,u=50} = 0.8667$ .

Снижение вероятности прохождения на 50-й итерации по сравнению с 40-й вызвано здесь усилением влияния второго источника. Здесь целевая вероятность  $q_{goal} = 0,9$  не достигается в пределах  $N_{iter} = 50$ .

На рисунке 5в показан случай, когда второй источник занимает положение  $O_2(15;5)$ . В этом случае также не удастся достичь целевой вероятности. Соответствующие вероятности прохождения образуют следующую последовательность:  $q_{S,u=1} = 0.6365$ ;  $q_{S,u=5} = 0.6619$ ;  $q_{S,u=9} = 0.6852$ ;  $q_{S,u=10} = 0.6858$ ;  $q_{S,u=20} = 0.6670$ ;  $q_{S,u=30} = 0.6475$ ,  $q_{S,u=40} = 0.6976$ ,  $q_{S,u=50} = 0.7637$ .

Заметим, что в окрестности  $u=30$  наблюдается локальный минимум, однако далее интегральная вероятность растет и достигает значения  $q_{S,u=50} = 0.7637$ . Наличие немоного поведения функции  $q_{S,u}$  свидетельствует о сложном влиянии полей обоих источников на итерационные кривые РТП в условиях, когда исходная кривая проходит между этими источниками. Это напоминает попадание в область локального минимума суммарного потенциала при решении задачи огибания сложных препятствий методом потенциальных полей.

Для случая еще большего приближения второго источника к первому соответствующие результаты приведены на рисунке 5г, а последовательность вероятностей прохождения есть:  $q_{S,u=1} = 0.5646$ ;  $q_{S,u=5} = 0.5680$ ;  $q_{S,u=9} = 0.5831$ ;  $q_{S,u=10} = 0.5868$ ;  $q_{S,u=20} = 0.5884$ ;  $q_{S,u=30} = 0.5561$ ,  $q_{S,u=40} = 0.5414$ ,  $q_{S,u=50} = 0.5540$ .

Здесь уже имеются три локальных максимума, обусловленные еще большим приближением второго источника к первому.

Когда область, в которой должен перемещаться РТП, содержит несколько произвольно ориентированных источников, растет число итераций, необходимых для обхода локальных экстремумов и достижения глобального максимума, если последний существует.

Так, на рисунке 6 приведены результаты построения скорректированных траекторий в области с семью произвольно расположенными и

ориентированными источниками на выборочных итерациях до  $u=130$ . Последовательность вероятностей прохождения есть:  $q_{S,u=1}=0.7060$ ;  $q_{S,u=5}=0.7437$ ;  $q_{S,u=10}=0.7592$ ;  $q_{S,u=20}=0.6462$ ;  $q_{S,u=30}=0.6714$ ;  $q_{S,u=40}=0.6931$ ,  $q_{S,u=50}=0.6995$ ,  $q_{S,u=80}=0.7586$ ,  $q_{S,u=100}=0.8909$ ,  $q_{S,u=130}=0.9719$ .

Вначале происходит увеличение вероятности прохождения до  $u=10$ , затем РТП попадает в зону влияния одного из источников, заходя в неё с тыльной стороны, поэтому  $q_{S,u}$  далее начинает уменьшаться вплоть до  $u=20$ , однако уже ранее 30-й итерации возобновляется рост  $q_{S,u}$ , в результате которого эта функция начинает превышать целевое значение вероятности  $q=0.9$  при  $u=130$ .

На рисунке 7 представлены результаты построения скорректированных траекторий в области с девятью произвольно расположенными и ориентированными источниками на выборочных итерациях вплоть до  $u=80$ . Последовательность вероятностей прохождения есть:  $q_{S,u=1}=0.4818$ ;  $q_{S,u=5}=0.5947$ ;  $q_{S,u=10}=0.6718$ ;  $q_{S,u=20}=0.6783$ ;  $q_{S,u=30}=0.7721$ ;  $q_{S,u=40}=0.8518$ ,  $q_{S,u=50}=0.9046$ ,  $q_{S,u=80}=0.9413$ . Особенность расположения источников здесь позволяет избежать осцилляционного поведения функции  $q_{S,u}$ , что обуславливает достижение целевой вероятности за меньшее число шагов, по сравнению с предыдущим случаем.

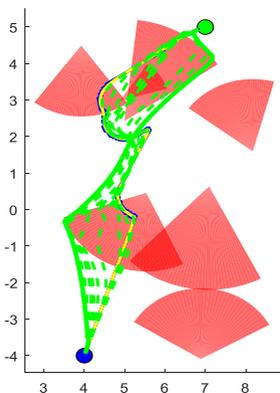


Рис. 6. Моделирование движения РТП в поле многих источников

На рисунке 8 представлен случай, когда начальная траектория проложена в области, содержащей как источники, так и препятствия (последние показаны закрашенными черным полигонами). Последовательность вероятностей прохождения есть:  $q_{S,u=1}=0.5473$ ;  $q_{S,u=5}=0.5989$ ;  $q_{S,u=12}=0.6852$ ;  $q_{S,u=20}=0.7798$ ;  $q_{S,u=25}=0.7864$ ;  $q_{S,u=30}=0.8342$ ;  $q_{S,u=40}=0.8832$ ;  $q_{S,u=50}=0.9570$ .

В случае пересечения итерационной кривой с максимальной вероятностью прохождения одного или нескольких препятствий необходимо просто минимально отстроиться в область, безопасную от столкновения с этими препятствиями, с возможной и вынужденной потерей вероятности прохождения.

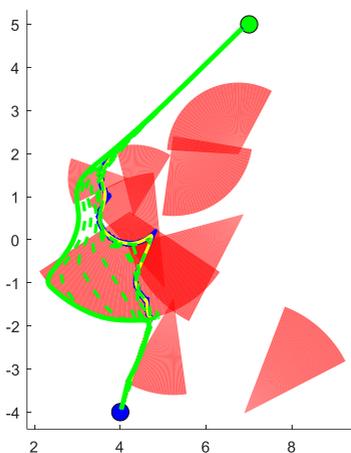


Рис. 7. Движение РТП в поле многих источников для примера 6

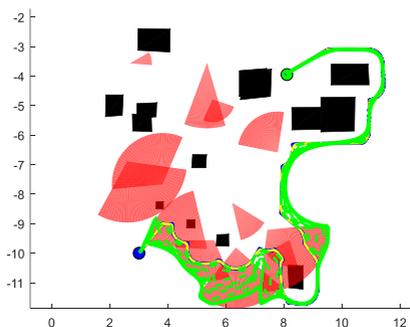


Рис. 8. Моделирование движения РТП в поле многих источников для примера 7

**7. Выводы.** В статье рассматривается новая процедура корректировки исходной траектории движения робототехнической платформы на плоскости с целью снижения вероятности её поражения/обнаружения в поле конечного числа источников-репеллеров, каждый из которых обладает ограниченной областью действия в виде кругового сектора. Эффективность синтезированной процедуры определяется

строгим решением задачи для случая одного источника, учетом воздействия всех источников в общем случае и подтверждается результатами проведенного моделирования.

Эта процедура позволяет находить локальные максимумы указанной вероятности на множестве допустимых кривых, отклоняющихся от исходной не более чем на заданное расстояние в соответствующем функциональном пространстве.

Предложенная процедура основана, с одной стороны, на представлении о характеристической вероятностной функции одиночного источника-репеллера, позволяющем в итоге оценивать степень влияния системы таких источников на движущуюся РТП. Из этого понятия вытекает используемая в качестве критерия оптимизации целевой траектории вероятность её успешного прохождения.

С другой стороны, процедура базируется на решении локальных оптимизационных задач, позволяющих корректировать отдельные участки исходной глобальной траектории с учетом нахождения в их окрестностях конкретных источников-репеллеров с заданными параметрами. При этом локальная оптимизация узловых точек исходной траектории базируется на адаптивной подстройке ключевых параметров преобразования  $\Phi$  для каждого источника на каждой текущей итерации, исходя из текущего расположения некоторой узловой точки траектории на этой итерации относительно сегмента источника.

Предложенный метод корректировки траекторий с учетом заданного распределения источников-репеллеров, основанный на указанной процедуре, позволяет эффективно организовывать соответствующее движение РТП с заданным вероятностным критерием качества/ успешности выполнения миссии.

## Литература

1. Khatib O. Real-Time Obstacles Avoidance for Manipulators and Mobile Robots. *Int. Journal of Robotics Research*. 1986. vol. 5(1). pp. 90–98.
2. Montiel O., Orozco-Rosas U., Sepúlveda R. Path planning for mobile robots using Bacterial Potential Field for avoiding static and dynamic obstacles. *Expert Systems with Applications*. 2015. vol. 42 (12). pp. 5177-5191.
3. Rasekhipour Y., Khajepour A., Chen S.-K., Litkouhi B. A Potential Field-Based Model Predictive Path-Planning Controller for Autonomous Road Vehicles. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*. 2017. vol. 18(5). pp. 1255-1267.
4. Mabrouk M.H., McInnes C.R. Solving the potential field local minimum problem using internal agent states. *Robotics and Autonomous Systems*. 2018. vol. 56(12).
5. Pshikhopov V., Medvedev M., Soloviev V. The Multicopter Control Algorithms with Unstable Modes. *2019 6th International Conference on Control, Decision and Information Technologies (CoDIT'19)*, Paris, France. 2019. pp. 1179 – 1184.

6. Krokmal P., Zabarankin M., Uryasev S. Modeling, and optimization of risk. *Surveys in Operations Research and Management Science*. 2001. vol. 16. pp. 49–66.
7. Zabarankin M., Uryasev S., Pardalos P. *Optimal Risk Path Algorithms*. Cooperative Control and Optimizatoin. Dordrecht: Kluwer Acad. 2002. pp. 271–303.
8. Галяев А.А., Маслов Е.П., Рубинович Е.Я. Об одной задаче управления движением объекта в конфликтной среде. *Известия РАН. Теория и системы управления*. 2009. vol. 3. pp. 134–140.
9. Галяев А.А., Маслов Е.П. Оптимизация законов уклонения подвижного объекта от обнаружения. *Известия РАН. Теория и системы управления*. 2010. vol. 4. pp. 43–53.
10. Абрамянц Т.Г., Маслов Е.П., Яхно В.П. Уклонение подвижного объекта от обнаружения группой наблюдателей. *Проблемы управления*. 2010. vol. 5. pp. 73–79.
11. Галяев А.А. Задача уклонения от подвижного одиночного наблюдателя на плоскости в конфликтной среде. *Автоматика. и телемеханика*. 2014. vol. 6. pp. 39–48.
12. Абрамянц Т.Г., Галяев А.А., Маслов Е.П., Рудько И.М., Яхно В.П. Уклонение подвижного объекта в конфликтной среде от обнаружения системой разнородных наблюдателей. *Проблемы управления*. 2015. vol. 2. pp. 31–37.
13. Корепанов В.О., Новиков Д.А. Задача о диффузной бомбе. *Проблемы управления*. 2011. vol. 5. pp. 66–73.
14. Корепанов В.О., Новиков Д.А. Модели стратегического поведения в задаче о диффузной бомбе. *Проблемы управления*. 2015. vol. 2. pp. 38–44.
15. Lavrenov R.O., Magid E.A., Matsuno F., Svinin M.M., Sutakorn J. Development and implementation of spline-based path planning algorithm in ROS/gazebo environment. *SPIIRAS Proceedings*. 2019. vol. 18(1), pp. 57-84.
16. Carsten J., Ferguson D., Stentz A. 3D Field D\*: Improved Path Planning and Replanning in Three Dimensions. *Proceedings of the 2006 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*. Beijing, China, 2006. pp. 3381–3386.
17. Pshikhopov V., Medvedev M. Motion Planning and Control Using Bionic Approaches Based on Unstable Modes. *Path Planning for Vehicles Operating in Uncertain 2D Environments*, 2017. pp. 239 – 280.
18. Han J. An efficient approach to 3D path planning. *Information Sciences*. 2019. vol. 478, pp. 318-330.
19. Pshikhopov V., and Medvedev M. Group control of autonomous robots' motion in uncertain environment via unstable modes. *SPIIRAS Proceedings*, 2018. vol. 60(5), pp. 39-63.
20. Yu X.-Y., Fan Z.-Y., Ou L.-L., Zhu F., Guo Y.-K. Optimal Path Planning Satisfying Complex Task Requirement in Uncertain Environment // *Robotica*. 2019. vol. 37 (11), pp. 1956 – 1970.
21. Shlyakhov N.E., Vatamaniuk I.V., Ronzhin A.L. Review of the Methods and Algorithms of a Robot Swarm Aggregation. *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*. 2017. vol. 18(1). pp. 22-29.
22. Костюков В.А., Пшихопов В.Х., Медведев М.Ю. Оптимизация движения мобильного робота на плоскости в поле конечного числа источников-репеллеров, *Труды СПИИРАН*, 2020. vol. 19(1), pp. 43–78.
23. Кудрявцев Л.Д. *Курс математического анализа (в 3 томах): Т. 2*. М: Дрофа. 2004. 720 с.
24. Гельфанд И.М., Фомин С.В. *Вариационное исчисление*. М.: Физматлит, 1961.

**Костюков Владимир Александрович** – канд. техн. наук, доцент, НИИ робототехники и процессов управления, Южный федеральный университет. Область научных интересов: математическое моделирование, мобильные роботы, алгоритмы планирования пути, ветроэнергетические установки. Число научных публикаций -65. [wkost-einheit@yandex.ru](mailto:wkost-einheit@yandex.ru), <http://rirpc.sfedu.ru/>; ул. Шевченко, д. 2, К-225, г. Таганрог, 347922, РФ; р.т.: +7(8634)371-694, факс: +7(8634)681-894.

**Медведев Михаил Юрьевич** – д-р техн. наук, доцент, ведущий научный сотрудник, НИИ робототехники и процессов управления, Южный федеральный университет. Область научных интересов: адаптивное и робастное управление мобильными роботами, оценивание возмущений, методы анализа и синтеза систем автоматического управления. Число научных публикаций-240+. [medvmihal@sfedu.ru](mailto:medvmihal@sfedu.ru), <http://rirpc.sfedu.ru> ул. Шевченко, д. 2, К-225, г. Таганрог, 347922, РФ; р.т.: +7(8634)371-694, факс: +7(8634)681-894.

**Пшихопов Вячеслав Хасанович** – д-р техн. наук, профессор, директор, НИИ робототехники и процессов управления, Южный федеральный университет. Область научных интересов: управление мобильными роботами в неопределенных средах; оптимальное управление роботами; анализ и синтез систем группового управления; интеллектуальное управление и планирование в робототехнике. Автор более 260 публикаций. Число научных публикаций-250. [pshichop@rambler.ru](mailto:pshichop@rambler.ru), <http://rirpc.sfedu.ru/>; ул. Шевченко, д. 2, К-225, г. Таганрог, 347922, РФ; р.т.: +7(8634)371-694, факс: +7(8634)681-894.

**Поддержка исследований.** Работа выполнена при финансировании Российского научного фонда (грант 18-19-00621, выполняемый в ОАО «НКБ робототехники и систем управления»).

V. KOSTJUKOV, M. MEDVEDEV, V. PSHIKHOPOV  
**METHOD FOR OPTIMIZING OF MOBILE  
ROBOT TRAJECTORY IN REPELLER SOURCES FIELD**

*Kostjukov V., Medvedev M., Pshikhopov V. Method for Optimizing of Mobile Robot Trajectory in Repeller Sources Field.*

**Abstract.** The article discusses the procedure for correcting the trajectory of a robotic platform (RTP) on a plane in order to reduce the probability of its defeat/detection in the field of a finite number of repeller sources. Each of these sources is described by a mathematical model of some factor of counteraction to the RTP.

This procedure is based, on the one hand, on the concept of a characteristic probability function of a system of repeller sources, which allows us to assess the degree of influence of these sources on the moving RTP. From this concept follows the probability of its successful completion used here as a criterion for optimizing the target trajectory. On the other hand, this procedure is based on solving local optimization problems that allow you to correct individual sections of the initial trajectory, taking into account the location of specific repeller sources with specified parameters in their vicinity. Each of these sources is characterized by the potential, frequency of impact, radius of action, and parameters of the field decay.

The trajectory is adjusted iteratively and takes into account the target value of the probability of passing. The main restriction on the variation of the original trajectory is the maximum allowable deviation of the changed trajectory from the original one. If there is no such restriction, then the task may lose its meaning, because then you can select an area that covers all obstacles and sources, and bypass it around the perimeter. Therefore, we search for a local extremum that corresponds to an acceptable curve in the sense of the specified restriction.

The iterative procedure proposed in this paper allows us to search for the corresponding local maxima of the probability of RTP passage in the field of several randomly located and oriented sources, in some neighborhood of the initial trajectory.

First, the problem of trajectory optimization is set and solved under the condition of movement in the field of single source with the scope in the form of a circular sector, then the result is extended to the case of several similar sources.

The main problem of the study is the choice of the General form of the functional at each point of the initial curve, as well as its adjustment coefficients. It is shown that the selection of these coefficients is an adaptive procedure, the input variables of which are characteristic geometric values describing the current trajectory in the source field.

Standard median smoothing procedures are used to eliminate oscillations that occur as a result of the locality of the proposed procedure.

The simulation results show the high efficiency of the proposed procedure for correcting the previously planned trajectory.

**Keywords:** Path Planning, Conflict Environment, Traffic Optimization, Probability of Successful Passage, Group of Repeller Sources

**Kostjukov Vladimir** – Dr. Sci., Associated Professor, Research and Development Institute of Robotics and Control Systems, Southern Federal University. Research interests: mathematical modeling, mobile robots, path planning algorithms, wind power plants construction. Number of publications: 65. [wkost-einheit@yandex.ru](mailto:wkost-einheit@yandex.ru), <http://rirpc.sfedu.ru/>; 2, Shevchenko street, Office 225, Taganrog, Russian Federation, 347922; office phone: +7(8634)371-694, fax: +7(8634)681-894.

**Medvedev Mikhail** – Dr. Sci., Professor, Research and Development Institute of Robotics and Control Systems, Southern Federal University. Research interests: adaptive and robust control of mobile robots, estimation, analysis and synthesis attitudes of control systems. Number of publications: 240. medvmihal@sfedu.ru, <http://rirpc.sfedu.ru/>; 2, Shevchenko street, Office 225, Taganrog, Russian Federation, 347922; office phone: +7(8634)371-694, fax: +7(8634)681-894.

**Pshikhov Viacheslav** – Dr. Sci., Professor, Head of Research and Development Institute of Robotics and Control Systems, Southern Federal University. Research interests: control of mobile robots in uncertain environment, optimal control of robots, analysis and synthesis of collective robots control, intelligent control and planning in the robotics. The number of publications is 250. pshichop@rambler.ru, <http://rirpc.sfedu.ru/>; Shevchenko street, 2, K-225, Taganrog, 347922, Russian Federation; office phone: +7(8634)371-694, fax: +7(8634)681-894.

**Acknowledgment.** The study is supported by the Russian Science Foundation, grant 18-19-00621, executed at Joint stock Company “Scientific-Design bureau of Robotics and Control Systems”.

### References

1. Khatib O. Real-Time Obstacles Avoidance for Manipulators and Mobile Robots. *Int. Journal of Robotics Research*. 1986. vol. 5(1), pp. 90–98.
2. Montiel O., Orozco-Rosas U., Sepúlveda R. Path planning for mobile robots using Bacterial Potential Field for avoiding static and dynamic obstacles. *Expert Systems with Applications*. 2015. vol. 42 (12), pp. 5177-5191.
3. Rasekhipour Y., Khajepour A., Chen S.-K., Litkouhi B. A Potential Field-Based Model Predictive Path-Planning Controller for Autonomous Road Vehicles. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*. 2017. vol. 18(5), pp. 1255-1267.
4. Mabrouk M.H., McInnes C.R. Solving the potential field local minimum problem using internal agent states. 2008. *Robotics and Autonomous Systems*. vol. 56(12), pp. 1050 – 1060.
5. Pshikhov V., Medvedev M., Soloviev V. The Multicopter Control Algorithms with Unstable Modes. *6th International Conference on Control, Decision and Information Technologies (CoDIT'19)*, Paris, France. 2019. pp. 1179 – 1184.
6. Krokhmal P., Zabarankin M., Uryasev S. Modeling and optimization of risk. *Surveys in Operations Research and Management Science*. 2001. vol. 16, pp. 49–66.
7. Zabarankin M., Uryasev S., Pardalos P. Optimal Risk Path Algorithms. *Cooperative Control and Optimizaton*. Dordrecht: Kluwer Acad., 2002. pp. 271 – 303.
8. Galyaev A.A., Maslov E.P., Rubinovich E.Ya. *Ob odnoj zadache upravleniya dvizheniem ob"ekta v konfliktnoj srede* [On a problem of controlling the movement of an object in a conflict environment]. *Izvestiya RAN. Teoriya i sistemy upravleniya* [Journal of Computer and Systems Sciences International]. 2009. vol. 3, pp. 134–140. (In Russ.).
9. Galyaev A.A., Maslov E.P. *Optimizaciya zakonov ukloneniya podvizhnogo ob"ekta ot obnaruzheniya* [Optimization of the laws of mobile object evasion from detection]. *Izvestiya RAN. Teoriya i sistemy upravleniya* [Journal of Computer and Systems Sciences International]. 2010. vol. 4, pp. 43–53. (In Russ.).
10. Abramyants T.G., Maslov E.P., Yakhno V.P. *Optimizaciya zakonov ukloneniya podvizhnogo ob"ekta ot obnaruzheniya* [Evasion of a moving object from detection by a group of observers]. *Problemy upravleniya* [Control Sciences]. 2010. vol. 5, pp. 73–79. (In Russ.).
11. Galyaev A.A. *Zadacha ukloneniya ot podvizhnogo odinochnogo nablyudatelya na ploskosti v konfliktnoj srede* [Evasion on plane from a single mobile observer in the conflict

- environment]. *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and Remote Control]. 2014. vol. 76(6), pp. 1017–1024.
12. Abramyan T.G., Galyaev A.A., Maslov E.P., Rud'ko I.M., Yakhno V.P. *Uklonenie podvizhnogo ob'ekta v konfliktnoj srede ot obnaruzheniya sistemoy raznorodnyh nablyudatelej* [Evasion of a moving object in a conflict environment from detection by the system of heterogeneous observers]. *Problemy upravleniya* [Control Sciences]. 2015. vol. 2, pp. 31–37. (In Russ.).
  13. Korepanov V.O., Novikov D.A. *Zadacha o diffuznoj bombe* [The problem of diffuse the bomb]. *Problemy upravleniya* [Control Sciences]. 2011. vol.5, pp. 66–73. (In Russ.).
  14. Korepanov V.O., Novikov D.A. *Modeli strategicheskogo povedeniya v zadache o diffuznoj bombe* [Models of strategic behavior in the diffuse bomb problem]. *Problemy upravleniya* [Control Sciences]. 2015. vol. 2, pp. 38–44. In Russ.).
  15. Lavrenov R.O., Magid E.A., Matsuno F., Svinin M.M., Sutakorn J. Development and implementation of spline-based path planning algorithm in ROS/gazebo environment. *SPIIRAS Proceedings*. vol. 18(1), pp. 57-84. 2019.
  16. Carsten J., Ferguson D., Stentz A. 3D Field D\*: Improved Path Planning and Replanning in Three Dimensions. *Proceedings of the 2006 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*. 2006. Beijing, China, pp. 3381–3386. 2006.
  17. Pshikhov V., Medvedev M. Motion Planning and Control Using Bionic Approaches Based on Unstable Modes. *Path Planning for Vehicles Operating in Uncertain 2D Environments*, pp. 239 – 280. 2017.
  18. Han J. An efficient approach to 3D path planning. *Information Sciences*. 2019. vol. 478, pp. 318-330.
  19. Pshikhov V., Medvedev M. Group control of autonomous robots motion in uncertain environment via unstable modes. *SPIIRAS Proceedings*. 2018. vol. 60(5), pp. 39-63.
  20. Yu X.-Y., Fan Z.-Y., Ou L.-L., Zhu F., Guo Y.-K. Optimal Path Planning Satisfying Complex Task Requirement in Uncertain Environment. *Robotica*. 2019. vol. 37 (11), pp. 1956–1970.
  21. Shlyakhov N.E., Vatamaniuk I.V., Ronzhin A.L. Review of the Methods and Algorithms of a Robot Swarm Aggregation. *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*. 2017. vol. 18(1). pp. 22-29.
  22. Kostjukov V. Pshikhov V., Medvedev M. Optimization of mobile robot movement on a plane with finite number of repeller sources. *SPIIRAS Proceedings*. 2020, vol. 9(1), pp. 43-78.
  23. Kudrjavcev L.D. *Kurs matematicheskogo analiza* [A course of mathematical analysis]. 2004. vol. 2. Moscow: Drofa. 720 p.
  24. Gel'fand I.M., Fomin S.V. *Variacionnoe ischislenie* [Calculus of variations]. Moscow: Fizmatlit, 1961.