

# ИССЛЕДОВАНИЕ СТРУКТУРНОЙ НАДЕЖНОСТИ П-СЕТЕЙ С НЕЗАВИСИМЫМИ И ЗАВИСИМЫМИ ОТКАЗАМИ ЭЛЕМЕНТОВ

ПАВЛОВ А.Н.

УДК 519.711.72

*Павлов А.Н. Исследование структурной надежности П-сетей с независимыми и зависимыми отказами элементов.*

**Аннотация.** В данной статье проведено исследование структурной надежности П-сетей на основе логико-вероятностного и нечетко-возможностного подходов для монотонных однородных и неоднородных структур. Определены верхние и нижние оценки структурной надежности П-сетей с независимыми и зависимыми отказами элементов.

**Ключевые слова:** независимые и зависимые отказы элементов, структурная надежность, П-сеть.

*Pavlov A.N. Investigation of structural reliability of P-networks with independent and dependent elements failures.*

**Abstract.** In this paper we study the structural reliability of P-networks on the basis of logical-probabilistic and fuzzy-possibilistic approaches for monotone homogeneous and heterogeneous structures. Identifies the upper and lower bounds on structural reliability of P-networks with independent and dependent failures elements.

**Keywords:** independent and dependent elements failure, structural reliability, P-network.

Проведем исследование структурной надежности монотонных П-сетей (параллельно-последовательных структур) с использованием логико-вероятностного [1–3] и нечетко-возможностного [4–6] подходов. Любая монотонная П-сеть [7, 8] образуется путем суперпозиции простейших неразложимых сетей  $\Gamma_2^S$  и  $\Gamma_2^D$  (рис. 1), которые являются «кирпичиками» параллельно-последовательных монотонных структур.

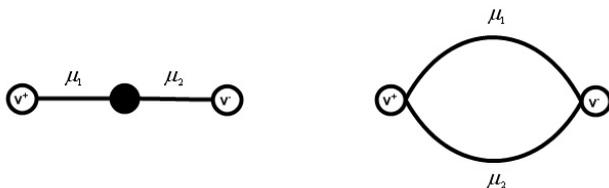


Рис. 1. Простые неразложимые П-сети.

Начнем анализ структурной надежности с этих «кирпичиков». Полиномы структурного отказа (надежности), вычисляемые с использованием логико-вероятностного и нечетко-возможностного подходов,

получаются из предположения *независимости* отказов элементов. При данном предположении полином отказа для структуры  $\Gamma_2^S$  представляет собой  $T_1(q_1, q_2) = q_1 + q_2 - q_1q_2$  (или для возможностей отказа  $T_1(\mu_1, \mu_2) = \mu_1 + \mu_2 - \mu_1\mu_2$ ). Полином отказа для структуры  $\Gamma_2^P$  —  $T_2(q_1, q_2) = q_1q_2$  (или  $T_2(\mu_1, \mu_2) = \mu_1\mu_2$ ).

Рассмотрим ситуацию, когда отказы (надежность) элементов структуры *зависимые*. Для структуры  $\Gamma_2^S(v^+, v^-)$  полином структурной надежности с использованием условной вероятности имеет вид  $R_2^S(p_1, p_2) = P(x_1 \wedge x_2) = P(x_2 | x_1) \cdot P(x_1)$ . Условная вероятность надежной работы элемента  $x_2$  при условии безотказной работы элемента  $x_1$  может быть либо  $P(x_2 | x_1) \leq P(x_2)$ , либо  $P(x_2 | x_1) \geq P(x_2)$ .

Рассмотрим **первый случай**  $P(x_2 | x_1) \leq P(x_2)$ . Введем параметр  $\lambda \in [0, 1]$ , и пусть

$$P(x_2 | x_1) = \lambda P(x_2) = \lambda p_2.$$

В этом случае  $R_2^S(p_1, p_2) = \lambda p_1 p_2$ . Для структуры с нечетким описанием по аналогии будем считать, что  $R_2^S(\mu_1, \mu_2) = \lambda \mu_1 \mu_2$ . Произведем расчет интегральных показателей структуры  $\Gamma_2^S(v^+, v^-)$  в рассматриваемом случае.

$$F_{\text{неоднор}}(R_2^S(p_1, p_2)) = \iint_{[0,1]} \lambda p_1 p_2 dp_1 dp_2 = \frac{\lambda}{4}.$$

$$F_{\text{однор}}(R_2^S(p_1, p_2)) = \int_{[0,1]} \lambda p^2 dp = \frac{\lambda}{3}.$$

$$F_{\text{однор. возм}}(R_2^S(\mu_1, \mu_2)) = 1 - \mu_* = \frac{2\lambda + 1 - \sqrt{1 + 4\lambda}}{2\lambda},$$

так как  $\lambda \mu_*^2 = 1 - \mu_*$ .

Значения интегральных показателей для различных значений параметра  $\lambda$  приведены на рис. 2.

Таким образом, интегральная возможностная оценка структурной надежности в условиях независимости безотказной работы элементов

( $\lambda = 1$ ) является верхней оценкой структурной надежности сети  $\Gamma_2^s(v^+, v^-)$ .

Рассмотрим **второй случай**  $P(x_2 | x_1) \geq P(x_2)$ . Поскольку  $0 \leq P(x_2 | x_1) \leq 1$ , то введем обозначение

$$\tilde{p}_2 = P(x_2 | x_1).$$

Тогда полином структурной надежности  $\Gamma_2^s(v^+, v^-)$  будет иметь вид

$$R_2^s(p_1, p_2) = p_1 \tilde{p}_2.$$

Для структуры с нечетким описанием полином имеет вид  $R_2^s(\mu_1, \mu_2) = \mu_1 \tilde{\mu}_2$ . Интегральные показатели структуры  $\Gamma_2^s(v^+, v^-)$  будут иметь значения соответствующие значениям, полученным для первого случая при  $\lambda = 1$ . Следовательно, интегральная возможностная оценка (при  $\lambda = 1$ ) является наибольшей оценкой структурной надежности сети  $\Gamma_2^s(v^+, v^-)$ .



Рис. 2. Интегральные оценки структурной надежности  $\Gamma_2^s(v^+, v^-)$  (первый случай).

Полином структурной надежности сети  $\Gamma_2^p(v^+, v^-)$  при условии зависимости безотказной работы элементов представляет собой

$$R_2^p(p_1, p_2) = 1 - P(\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2) = 1 - P(\bar{x}_2 | \bar{x}_1) \cdot P(\bar{x}_1).$$

Для случая  $P(\bar{x}_2 | \bar{x}_1) \leq P(\bar{x}_2)$  полином структурной надежности равен

$$R_2^P(p_1, p_2) = 1 - \lambda(1 - p_1)(1 - p_2),$$

т. е.

$$R_2^P(p_1, p_2) = 1 - \lambda + \lambda(p_1 + p_2) - \lambda p_1 p_2.$$

Если события несовместны ( $\lambda = 0$ ), то  $R_2^P(p_1, p_2) = 1$ . Если события независимые ( $\lambda = 1$ ), то  $R_2^P(p_1, p_2) = p_1 + p_2 - p_1 p_2$ . Это совпадает с правилами преобразования конъюнкций и дизъюнкций при построении полинома надежности (отказа) [9]. Аналогично запишем полином надежности для структуры с нечеткими элементами:

$$R_2^P(\mu_1, \mu_2) = 1 - \lambda + \lambda(\mu_1 + \mu_2) - \lambda \mu_1 \mu_2.$$

Тогда интегральные показатели структуры  $\Gamma_2^P(v^+, v^-)$ , введенные выше, рассчитываются по следующим формулам:

$$F_{\text{неоднор}}(R_2^P(p_1, p_2)) = \iint_{[0,1]} (1 - \lambda + \lambda(p_1 + p_2) - \lambda p_1 p_2) dp_1 dp_2 = 1 - \frac{\lambda}{4}.$$

$$F_{\text{однор}}(R_2^P(p_1, p_2)) = \int_{[0,1]} (1 - \lambda + 2\lambda p - \lambda p^2) dp = 1 - \frac{\lambda}{3}.$$

$$F_{\text{однор. возм}}(R_2^P(\mu_1, \mu_2)) = 1 - \mu_* = \frac{\sqrt{1 + 4\lambda} - 1}{2\lambda},$$

так как  $1 - \lambda + 2\lambda\mu_* - \lambda\mu_*^2 = 1 - \mu_*$ .

Значения интегральных показателей для различных значений параметра  $\lambda$  приведены на рис. 3.



Рис. 3. Интегральные оценки структурной надежности  $\Gamma_2^p(v^+, v^-)$ .

Таким образом, интегральная возможностная оценка структурной надежности в условиях независимости безотказной работы элементов ( $\lambda=1$ ) является нижней оценкой структурной надежности сети  $\Gamma_2^p(v^+, v^-)$ .

В заключение проведем исследование интегральных возможностных показателей структурной надежности (отказа) для неоднородных П-сетей. Вычислим возможностные оценки для структур  $\Gamma_2^s(v^+, v^-)$  и  $\Gamma_2^p(v^+, v^-)$ , состоящих из неоднородных элементов. Обозначим интегральную возможностную оценку неоднородной сети через  $F_{\text{неод. возм.}}$ .

Для сети  $\Gamma_2^s(v^+, v^-)$ .

$$\begin{aligned}
 F_{\text{неодвозм}}(R_2^s(\mu_1, \mu_2)) &= \iint_{[0,1]} (R_2^s(\mu_1, \mu_2) \circ P_1) \circ P_2 = \\
 &= \int_{[0,1]} \left( \int_{[0,1]} R_2^s(\mu_1, \mu_2) \circ P_1 \right) \circ P_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}. \\
 \int_{[0,1]} R_2^s(\mu_1, \mu_2) \circ P_1 &= 1 - \mu_1^* = \frac{\mu_2}{1 + \mu_2},
 \end{aligned}$$

так как  $\mu_1^* \mu_2 = 1 - \mu_1^*$ .

$$\int_{[0,1]} \frac{\mu_2}{1+\mu_2} \circ P_2 = 1 - \mu_2^* = \frac{3-\sqrt{5}}{2},$$

так как

$$\frac{\mu_2^*}{1+\mu_2^*} = 1 - \mu_2^* \Rightarrow \mu_2^* = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Для сети  $\Gamma_2^P(v^+, v^-)$

$$F_{\text{неод. возм}}(R_2^P(\mu_1, \mu_2)) = \iint_{[0,1]} (R_2^P(\mu_1, \mu_2) \circ P_1) \circ P_2 =$$

$$\int_{[0,1]} \left( \int_{[0,1]} R_2^P(\mu_1, \mu_2) \circ P_1 \right) \circ P_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

$$\int_{[0,1]} R_2^P(\mu_1, \mu_2) \circ P_1 = 1 - \mu_1^* = \frac{1}{2 - \mu_2},$$

так как  $\mu_1^* + \mu_2 - \mu_1^* \mu_2 = 1 - \mu_1^*$ .

$$\int_{[0,1]} \frac{1}{2 - \mu_2} \circ P_2 = 1 - \mu_2^* = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

так как

$$\frac{1}{2 - \mu_2^*} = 1 - \mu_2^* \Rightarrow \mu_2^* = \frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Полученные результаты совпадают с возможностными оценками однородной сети:

$$F_{\text{однор. возм}}(R_2^S(\mu_1, \mu_2)) = \frac{2\lambda + 1 - \sqrt{1 + 4\lambda}}{2\lambda},$$

$$F_{\text{однор. возм}}(R_2^P(\mu_1, \mu_2)) = \frac{\sqrt{1 + 4\lambda} - 1}{2\lambda} \quad (\text{при } \lambda = 1).$$

Учитывая тот факт, что любая П-сеть является суперпозицией сетей  $\Gamma_2^S(v^+, v^-)$  и  $\Gamma_2^P(v^+, v^-)$ , можно предположить, что данные свойства будут сохраняться и для всех П-сетей. Проверим данное предположение на следующем примере. Рассмотрим различные П-сети, составленные из шести дуг (рис. 4, а, б).

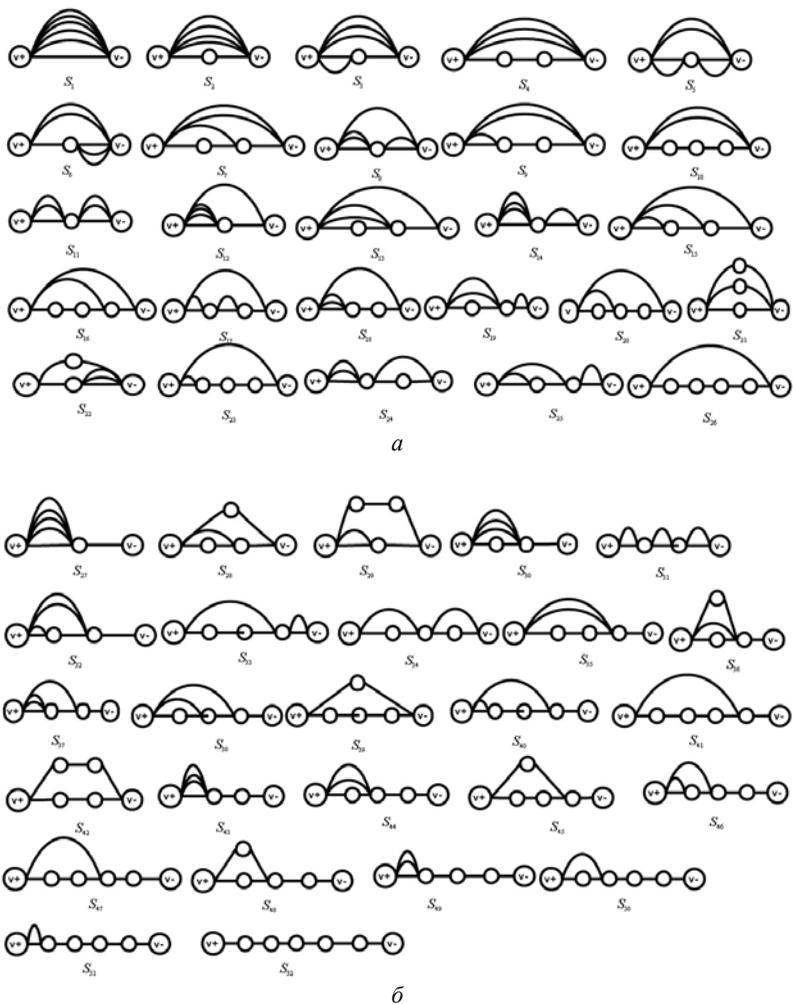


Рис. 4. П-сети, составленные из шести элементов.

Результаты вычислительных экспериментов представлены на рис. 5.



Рис. 5. Результаты вычисления интегральных оценок отказа структур.

**Заключение.** Полученные результаты позволяют провести сравнительный анализ топологии структур систем. Так, например, для рассматриваемых П-сетей можно выявить следующие закономерности.

1. Полученные интегральные оценки возможности отказа однородной и неоднородной сети в условиях независимости отказов элементов структуры являются верхними и нижними границами интегрального показателя структурной надежности (отказа) системы.
2. Интегральные вероятностные оценки однородной структуры расположены между интегральной вероятностной оценкой неоднородной сети и показателем возможности структурной надежности (отказа).
3. При приближении рассматриваемых П-сетей к своим предельным состояниям  $S_1$  (самая надежная из рассматриваемых сетей) и  $S_{52}$  (самая ненадежная из рассматриваемых сетей) наблюдается расхождение значений интегральных показателей. Это позволяет ввести шкалу для сравнения структур по их месту положения от своих крайних состояний  $S_1, S_{52}$ , которая отражает наличие в структуре дублирующих связей.

## Литература

1. *Рябинин И.А., Черкесов Г.Н.* Логико-вероятностные методы исследования надежности структурно-сложных систем. М.: Радио и связь, 1981. 264 с.
2. *Рябинин И.А.* Надежность и безопасность сложных систем. СПб.: Политехника, 2000. 248 с.
3. *Рябинин И.А.* Надежность и безопасность структурно-сложных систем. СПб.: Изд-во С.-Петербур.ун-та, 2007. 276 с.
4. *Павлов А.Н.* Нечетко-возможностный подход к анализу и оцениванию безопасности сложных организационно-технических систем // Материалы XI Санкт-Петербургской междунар. конф. «Региональная информатика-2008 (РИ-2008)», Санкт-Петербург, 22–24 октября 2008 г. С. 48–49.
5. *Павлов А.Н.* Исследование генома двухполюсной сетевой структуры // Тр. IX Междунар. науч. школы МА БР-2009 «Моделирование и анализ безопасности и риска в сложных системах», Санкт-Петербург, 7–11 июля 2009 г. СПб., 2009. С. 429–434.
6. *Пытьев Ю.П.* Возможность как альтернатива вероятности. Математические и эмпирические основы, применение. М.: Физматлит, 2007. 464 с.
7. *Яблонский С.В.* Введение в дискретную математику. М.: Наука, 1986. 384 с.
8. *Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А.* Задачи и упражнения по дискретной математике. Учебное пособие. М.: Физматлит, 2005. 416 с.
9. *Соложенцев Е.Д.* Сценарное логико-вероятностное управление риском в бизнесе и технике. СПб.: Изд. дом «Бизнес-пресса», 2004. 432 с.

**Павлов Александр Николаевич** — канд. техн. наук, доцент; старший научный сотрудник лаборатории информационных технологий в системном анализе и моделировании Учреждения Российской академии наук Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН (СПИИРАН). Специалист в области системного анализа и принятия решений в условиях существенной неопределенности. Область научных интересов: разработка научных основ теории управления структурной динамикой сложных организационно-технических систем. Число научных публикаций — более 70. pavlov62@list.ru; СПИИРАН, 14-я линия В.О., д. 39, Санкт-Петербург, 199178, РФ; р.т. +7(812)328-0103, факс +7(812)328-4450.

**Pavlov Alexander Nikolaevich** — Ph.D., associate professor; senior researcher, Laboratory for Information Technologies in Systems Analysis and Modeling, St. Petersburg Institute for Informatics and Automation of the Russian Academy of Sciences (SPIIRAS). Specialist in the field of systems analysis and operations research by conditions of substantial uncertainty. Research interests: development of research fundamentals for the control theory by structural dynamics of complex organizational-technical systems. The number of publications — more than 70. pavlov62@list.ru; SPIIRAS, 39, 14th Line V.O., St. Petersburg, 199178, Russia; of-fice phone +7(812)328-0103, fax +7(812)328-4450.

**Поддержка исследований.** Исследования, выполненные по данной тематике, проводились при финансовой поддержке РФФИ (гранты 08-08-00346а, 08-08-00403а, 09-08-00259а, 10-08-00771а), Отделения нанотехнологий и информационных технологий РАН (проект № О-2.3/03).

## РЕФЕРАТ

### **Павлов А.Н. Исследование структурной надежности П-сетей с независимыми и зависимыми отказами элементов.**

Любая монотонная П-сеть (параллельно-последовательная структура) образуется путем суперпозиции простейших неразложимых сетей, которые являются «кирпичиками» параллельно-последовательных монотонных структур. Полиномы структурного отказа (надежности), вычисляемые с использованием логико-вероятностного и нечетко-возможностного подходов, получаются из предположения *независимости* отказов элементов. Проводится анализ структурной надежности простейших неразложимых сетей для случая *зависимости* отказов элементов при условии однородной и неоднородной структуры. Высказано предположение о том, что полученные соотношения между интегральными возможностными и вероятностными оценками однородных и неоднородных простейших сетей будут сохраняться и для любых П-сетей. Приводятся результаты исследования интегральных показателей структурной надежности для П-сетей, составленных из шести элементов.

Для параллельно-последовательных структур можно выявить следующие закономерности:

- полученные интегральные оценки возможности отказа однородной и неоднородной сети в условиях независимости отказов элементов структуры являются верхними и нижними границами интегрального показателя структурной надежности (отказа) системы;
- интегральные вероятностные оценки однородной структуры расположены между интегральной вероятностной оценкой неоднородной сети и показателем возможности структурной надежности (отказа);
- при приближении рассматриваемых П-сетей к своим предельным состояниям (самая надежная и самая ненадежная П-сеть) наблюдается расхождение значений интегральных показателей, что позволяет ввести шкалу сравнения структур, отражающую наличие в структуре дублирующих связей.

## SUMMARY

### ***Pavlov A.N.* Investigation of structural reliability of P-networks with independent and dependent elements failures.**

Any monotone P-network (indecomposable-parallel structure) is formed by the superposition of the simplest indecomposable networks, which are the “building blocks” of indecomposable-parallel monotone structures. Polynomials of structural failure (reliability), calculated using the logical-probabilistic and fuzzy-possibilistic approaches, derived from the assumption of *independence* of elements failures. The analysis of structural reliability of the simplest indecomposable networks for the case of dependence of elements failure by condition of homogeneous and heterogeneous structure is carried out. It is conjectured that the obtained relations between the integral possibilistic and probabilistic estimations of homogeneous and heterogeneous networks will be kept for any P-networks. The results of the study of integral indicators of structural reliability for the P-networks composed of six elements are given.

It can reveal the following patterns for the indecomposable-parallel structures:

- obtained integral estimates of a failure of homogeneous and heterogeneous networks in terms of independence of failures of structures elements are the upper and lower boundaries of the integral index of structural reliability (failure) of the system;
- integrated probabilistic assessment of a homogeneous structure situated between the integrated probabilistic assessment of heterogeneous networks and index of the possibility of structural reliability (failure);
- when approaching considered P-networks to their limit state (the most reliable and most unreliable P-networks) values divergence of integral parameters is observed that allows us to introduce scale of structures comparison, reflecting the presence in the structure of duplicate links.