# МЕТОД РАНДОМИЗИРОВАННЫХ ТРАЕКТОРИЙ В ЗАДАЧАХ ОЦЕНКИ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ЗАВИСИМОСТИ

ХОВАНОВ Н.В.

**УДК** 519.27

*Хованов Н.В.* **Метод рандомизированных траекторий в задачах оценки функциональной зависимости.**

**Аннотация.** Разрабатывается метод рандомизированных траекторий (функций), основанный на модели байесовской рандомизации неопределенности. Строится стохастический процесс с равновероятными дискретными монотонными траекториями, тренд которого служит искомой оценкой функциональной зависимости между исследуемыми показателями. Обсуждается задача учета нечисловой экспертной информации для повышения точности и надежности оценки функциональной зависимости.

**Ключевые слова:** байесовская рандомизация неопределенности, метод рандомизированных траекторий (функций), нечисловая экспертная информация, стохастический процесс с равновероятными дискретными монотонными траекториями.

*Hovanov N.V.* ***Randomized Trajectories Method in Problems of Functional Dependence Estimation.***

**Abstract.** A randomized trajectories (functions) method is developed, this method being based on the Bayesian uncertainty randomization model. A stochastic process with equally probable discrete monotonic trajectories is constructed – the process trend is a required estimation of the functional dependence between parameters under investigation. The problem of nonnumeric expert information using for exactness and reliability increasing is discussing.

**Keywords:** Bayesian randomization of uncertainty, randomized trajectories (functions) method, nonnumeric expert information, stochastic process with equally probable discrete monotonic trajectories.

**1. Введение.** При исследовании информационных процессов в сложных системах различной природы (социально-политических, финансово-экономических, экологических и т.д.) обычно возникает задача оценки функциональной зависимости между показателями, характеризующими изучаемую систему. Зачастую, роль одного из показателей играет время, регистрируемое в определенные дискретные моменты. Поэтому для иллюстрации различных положений излагаемого далее *метода рандомизированных траекторий* (МРТ) мы, в основном, будем обращаться к примерам анализа временных рядов значений показателей системы.

Анализ динамики показателей базируется на исходной эмпирической информации, имеющей вид совокупности конечных временных рядов. Под *конечным временным рядом* $y(t)$ здесь понимается последовательность значений $y_0 = y(t_0),..., y_m = y(t_m)$ исследуемого финан-



Труды СПИИРАН. 2009. Вып. 9. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2009. Issue 9. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

сово-экономического показателя $y$, наблюдаемых в последовательные моменты времени $t_0,...,t_m$, $t_0 < ... < t_m$ соответственно. Дальнейшая статистическая обработка такой исходной эмпирической информации обычно производится на основе теоретико-вероятностной модели, в рамках которой предполагается, что наблюдаемый временной ряд $y(t)$, $t = t_0,...,t_m$, есть реализация («траектория») некоторого *случайного временного ряда* (стохастического процесса $\tilde{y}(t)$ с дискретным временем $t = t_0,...,t_m$).

Иными словами, вектор наблюдаемых значений $(y_0,...,y_m)$ исследуемого показателя $y$ интерпретируется как выборочное значение случайного вектора $(\tilde{y}_0,...,\tilde{y}_m)$, каждая компонента $\tilde{y}_i = \tilde{y}(t_i)$ которого есть одномерное сечение случайного процесса $\tilde{y}(t)$. Этот гипотетический (напрямую не наблюдаемый) случайный временной ряд $\tilde{y}(t)$ описывается вероятностным пространством $(Y, A_\sigma, P)$, где $Y = \{y(t;\theta), \theta \in \Theta\}$ есть множество всех возможных траекторий процесса $\tilde{y}(t)$, $A_\sigma$ – сигма-алгебра подмножеств множества $Y$, а вероятностная мера $P$ определяет вероятность $P(A)$ любого события $A \in A_\sigma$.

Однако, описанный стандартный теоретико-вероятностный подход к интерпретации наблюдаемого временного ряда $y(t_0),...,y(t_m)$ как реализации (траектории) непосредственно не наблюдаемого случайного временного ряда $\tilde{y}(t_0),...,\tilde{y}(t_m)$, описываемого вероятностным пространством $(Y, A_\sigma, P)$, вызывает ряд замечаний со стороны разных групп исследователей.

Во-первых, некоторые специалисты отвергают саму идею описания эмпирически наблюдаемых временных рядов при помощи сложных и принципиально ненаблюдаемых математических схем (см., например, довольно резкую критику использования абстрактных теоретико-вероятностных схем для объяснения эмпирически наблюдаемой стабилизации частот событий в работах [2,3,4]).

Во-вторых, ряд исследователей указывает на возможность статистической обработки конечных временных рядов с использованием более простой и наглядной, чем теоретико-вероятностная конструкция, «геометрико-механической» интерпретации, согласно которой матема-



Труды СПИИРАН. 2009. Вып. 9. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2009. Issue 9. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

тическое ожидание случайной величины трактуется как центр распределенной вероятностной массы, дисперсия – как момент инерции этой массы и т.д. (см., например, [6,22,28]).

Наконец, в-третьих, многие специалисты, не отказываясь от использований концепции вероятностного пространства $(Y, A_\sigma, P)$ для интерпретации наблюдаемых конечных временных рядов значений исследуемых показателей, призывают максимально точно и осторожно применять абстрактные математические схемы, учитывая их неизбежные ограничения и приближенный характер описания реальных процессов (см., например, [13,14,15]). Особенно важно учитывать ограниченность точности и достоверности теоретико-вероятностных объяснений в случае коротких временных рядов, сильно затрудняющих прогнозирование будущей динамики значений исследуемого показателя [1,9], а также в случае наличия неопределенности разных видов, возникающей при дефиците эмпирических данных и не сводящейся к неопределенности теоретико-вероятностного вида [21].

Настоящая статья в значительной степени основана на выборочном обзоре работ, содержащих описание конкретных модификаций общей теоретико-вероятностной *модели рандомизации неопределенности выбора дискретной функции*. Такая модель позволяет построить методы оценки функциональной зависимости, повышающие (в определенных ситуациях и в определенной мере, разумеется) точность и достоверность оценивания динамики значений показателей за счет учета нечисловой, неточной и неполной экспертной информации. Многие излагаемые далее результаты получены и подробно исследованы в работах сотрудников ЛНИИ ВЦ АН СССР и Ленинградского государственного университета в конце 70-х – начале 80-х годов прошлого века (см., например, [5,17,23,24]).

В первом разделе излагаются основы метода рандомизированных траекторий, в основе которого лежит байесовский подход к моделированию неопределенности выбора элемента из конечного множества при помощи задания вероятностной меры на этом конечном множестве. Второй раздел посвящен важному частному случаю рандомизации выбора элемента из конечного множества монотонных траекторий, связанному с построением соответствующего стохастического процесса с равновероятными дискретными монотонными траекториями. В третьем разделе подробно разобран пример использования построенного стохастического процесса с равновероятными монотонными траекториями для оценки динамики цены облигации по нечисловой, неточной и неполной экспертной информации. Разработанный метод



Труды СПИИРАН. 2009. Вып. 9. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2009. Issue 9. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

рандомизированных дискретных траекторий и его возможные приложения к задачам оценки функциональной зависимости финансово-экономических показателей кратко обсуждаются в Заключении.

**2. Метод рандомизированных траекторий.** Уже в первой четверти прошлого века среди исследователей, занимающихся вопросами оценки динамики показателей, возникло представление о различных типах неопределенности такой оценки. Четкое различение двух основных типов неопределенности проведено, например, в известной монографии Фрэнка Найта [34], вышедшей в 1921 г.

Несколько модернизировав, обобщив и формализовав определения Ф. Найта, можно сказать, что выделенная им *неопределенность первого рода* связана с ситуацией, когда некоторый элемент $y$ (например, значение показателя, или график функции, описывающей динамику этого показателя) известен исследователю «с точностью до множества $Y$». Иными словами, при неопределенности первого рода результатом оценки является указание некоторого множества $Y$, содержащего элемент $y$. Такую неопределенность, при которой исследователь знает только то, что оцениваемый (прогнозируемый) элемент $y$ принадлежит некоторому множеству $Y$, будем далее называть *теоретико-множественной неопределенностью* [21].

Введенную Ф. Найтом *неопределенность второго рода* можно связать с ситуацией, когда исследователю, помимо множества $Y$, содержащего элемент $y$, известно еще и распределение вероятности $P$, заданное на некоторой сигма-алгебре $A_\sigma$ подмножеств множества $Y$. Распределение $P$ определяет вероятность $P(Y')$ того, что элемент $y$ содержится в подмножестве $Y'$ множества $Y$, являющимся элементом сигма-алгебры $A_\sigma$. В простейшем случае конечного множества $Y$ введенная неопределенность второго рода предусматривает прямое указание вероятности $p_i = P(\{y_i\})$ появления элемента $y_i$ при соответствующем случайном испытании. Далее будем назвать описанную неопределенность второго рода *теоретико-вероятностной неопределенностью*.

Пусть перед исследователем стоит задача оценки (прогнозирования) значений $y(t_0),\dots,y(t_m)$, принимаемых изучаемым показателем в (будущие) моменты времени $t = t_0,\dots,t_m$, $t_0 < \dots < t_m$. Пусть задано конечное *множество* $Y = \{y(\theta):\theta = 1,\dots,N\}$ *всех возможных траекто-*



Труды СПИИРАН. 2009. Вып. 9. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2009. Issue 9. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

*рий* $y(\theta) = (y(t_0;\theta),...,y(t_m;\theta))$ временного ряда $y(t_0),...,y(t_m)$. Помимо значений $y(t_0;\theta),...,y(t_m;\theta)$ функции $y = y(t;\theta)$ будем рассматривать и приращения $d(t_i;\theta) = y(t_i;\theta) - y(t_{i-1};\theta)$, $i = 1,...,m$, этой функции. Очевидно, что значение функции $y = y(t;\theta)$ в точке $t = t_i$ определяется формулой $y(t_i;\theta) = y(t_0;\theta) + d(t_1;\theta) + ... + d(t_i;\theta)$.

Предполагается, что на основе экспертной информации $I$ о значениях функций $y = y(t;\theta)$ и $d = d(t;\theta)$ возможна селекция элементов множества $Y = \{y(\theta) : \theta = 1,...,N\}$ всех возможных траекторий $y(\theta) = (y(t_0;\theta),...,y(t_m;\theta))$ временного ряда $y(t_0),...,y(t_m)$. В результате селекции элементов множества $Y$, удовлетворяющих требованиям (ограничениям) информации $I$, формируется *множество* $Y(I)$ *всех допустимых* (*с точки зрения информации* $I$) функций $y = y(t;\theta)$, содержащее $N(I) \le N$ элементов. Если выполняется строгое неравенство $N(I) < N$, то можно говорить о *нетривиальной информации* $I$ (о *нетривиальных ограничениях*, описываемых информацией $I$). Если же экспертная информация $I$ *тривиальна* (множество ограничений, описываемых информацией $I$, является, фактически, *пустым* – $I = \varnothing$), то $N(I) = N(\varnothing) = N$.

Экспертная информация не носит, как правило, *числового характера* и может быть выражена лишь чисто сравнительными утверждениями типа «значение $y_i = y(t_i;\theta)$ функции $y = y(t;\theta)$ больше значения $y_j = y(t_j;\theta)$ этой же функции», «приращение $d(t;\theta)$ функции $y = y(t;\theta)$ в точке $t = t_i$ равно приращению этой функции в точке $t = t_j$» и т.п. Далее мы будем предполагать, что такая *нечисловая информация* может быть представлена в виде системы равенств и неравенств $IO = \{y(t_i;\theta) > y(t_j;\theta);\ d(t_i;\theta) = d(t_j;\theta);\ ...\}$ для значений и приращений функций $y = y(t;\theta)$. Естественно назвать экспертную информацию $IO$, выражаемую указанной системой равенств и неравенств, *ординальной* (*порядковой*) *информацией*.

Помимо ординальной информации исследователь может также иметь и *неточную экспертную информацию* $II$ о числовых значениях и приращениях функций $y = y(t;\theta)$, представимую в виде системы $II = \{y_i^- \le y(t_i;\theta) \le y_i^+, d_j^- \le d(t_j;\theta) \le d_j^+, ...\}$ неравенств, указывающих возможные диапазоны варьирования значений и приращений



Труды СПИИРАН. 2009. Вып. 9. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2009. Issue 9. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

функций $y = y(t;\theta)$. Естественно назвать экспертную информацию $II$, выражаемую системой указанных неравенств, *интервальной информацией*.

Объединяя системы неравенств $IO$ и $II$, мы получаем *нечисловую и неточную информацию* $I = OI \cup II$ о значениях и приращениях функций $y = y(t;\theta)$. При этом возможно, что объединенная система равенств и неравенств $I$ определяет функцию $y = y(t;\theta)$ не однозначно, а лишь с точностью до конечного *множества* $Y(I)$ *всех допустимых* (с точки зрения экспертной информации $I$) траекторий $y(\theta) = (y(t_0;\theta),...,y(t_m;\theta))$, $\theta = 1,...,N(I)$, $N(I) \le N$. Поэтому далее мы будем говорить о *нечисловой (ординальной), неточной (интервальной) и неполной информации* (ННН-*информации*) $I$ о значениях и приращениях функций $y = y(t;\theta)$.

Измерить количество ННН-информации $I$ можно, например, при помощи *коэффициента селекции* $SEL(I) = N/N(I)$. Для измерения количества ННН-информации в двоичных единицах (в битах) следует воспользоваться *логарифмической мерой информации* $INF(I)$, определяемой формулой $INF(I) = \log_2 SEL(I)$, где $\log_2 x$ есть двоичный логарифм числа $x$.

Итак, после построения с помощью экспертной ННН-информации $I$ множества всех допустимых траекторий исследователь находится в условиях теоретико-множественной неопределенности, когда оцениваемая (прогнозируемая) траектория $y(\theta) = (y(t_0;\theta),...,y(t_m;\theta))$ известна с точность до конечного множества $Y(I)$, состоящего не менее чем из двух элементов: $N(I) > 1$ (ср. с [7]). Для моделирования неопределенности выбора конкретного элемента $y(\theta)$ из множества $Y(I)$ можно предложить подход, восходящий к известной работе Т. Байеса [27], и состоящий в *рандомизации* такого выбора: траектория $y(\theta)$ случайно выбирается из множества $Y(I)$ с вероятностью $P(\theta) > 0$, $P(1) + ... + P(N(I)) = 1$. В результате такой рандомизации исследователь оказывается в ситуации, соответствующей теоретико-вероятностной неопределенности, описываемой случайным вектором (стохастическим, случайным процессом, случайной функцией) $\widetilde{y}(t;I) = y(t;I;\widetilde{\theta}) = (y(t_0;I;\widetilde{\theta}),...,y(t_m I;\widetilde{\theta}))$ (подробнее о рандомизации теоретико-множественной неопределенности см. [12,19,20]).



Труды СПИИРАН. 2009. Вып. 9. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2009. Issue 9. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

Теперь можно предложить в качестве оценки (прогноза) случайного значения $\tilde{y}_i(I) = \tilde{y}(t_i; I) = y(t_i; I; \tilde{\theta})$ исследуемого показателя математическое ожидание $\bar{y}_i(I) = \bar{y}(t_i) = E\,\tilde{y}_i(t; I)$ случайной величины $\tilde{y}_i(I) = \tilde{y}(t_i; I)$ (одномерного сечения стохастического временного ряда $\tilde{y}(t; I)$, $t = t_0, \ldots, t_m$), вычисляемое по формуле $\bar{y}_i(I) = y(t_i; 1)\,P(1) + \ldots + y(t_i; N(I))\,P(N(I))$. Точность полученной оценки $\bar{y}_i$ естественно измерять величиной стандартного отклонения $\sigma_i(I) = \sqrt{D\,\tilde{y}_i(I)}$, где $D\,\tilde{y}_i(I)$ есть дисперсия случайной величины $\tilde{y}_i = \tilde{y}(t_i; I)$, вычисляемая по формуле

$$D\,\tilde{y}_i(I) = [y(t_i; 1) - \bar{y}_i]^2\,P(1) + \ldots + [y(t_i; N(I)) - \bar{y}_i]^2\,P(N(I))\,. \quad (1)$$

Со времен Т. Байеса (1702-1761) при рандомизации теоретико-множественной неопределенности, в качестве распределения вероятностей $P(\theta)$ обычно выбирается равномерное распределение $P(\theta) = 1/N(I)$, соответствующее «максимальному дефициту информации», имеющегося у исследователя (об аргументах в пользу выбора именно равномерного распределения в качестве распределения, моделирующего отсутствие информации, см., например, работы [8,26,29,31-33,35,36]). В этом случае для искомых оценок $\bar{y}_i = \bar{y}(t_i)$, для определения мер $\sigma_i = \sqrt{D\,\tilde{y}_i}$ их точности получаются наиболее простые вычислительные формулы

$$\bar{y}_i(I) = 1/N(I) \cdot [y(t_i; 1) + \ldots + y(t_i; N(I))]\,, \quad (2)$$

$$D\tilde{y}_i(I) = 1/N(I) \cdot \{[y(t_i; 1) - \bar{y}_i]^2 + \ldots + [y(t_i; N(I)) - \bar{y}_i]^2\} \quad (3)$$

соответственно.

**3. Стохастические процессы с дискретными монотонными траекториями.** Рассмотрим важный частный случай применения метода рандомизированных траекторий, описанного в предыдущем параграфе, для оценки (прогнозирования) временных рядов с монотонными (неубывающими или невозрастающими) дискретными реализациями.

Пусть опять перед исследователем стоит задача оценки (прогнозирования) значений $y(t_0), \ldots, y(t_m)$, принимаемых изучаемым показателем в (будущие) моменты времени $t = t_0, \ldots, t_m$, $t_0 < \ldots < t_m$. Пусть задано конечное *множество* $Y(m, n) = \{y(t; m, n; \theta) : \theta = 1, \ldots, N(m, n)\}$



Труды СПИИРАН. 2009. Вып. 9. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2009. Issue 9. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

*всех возможных траекторий* $y(t;m,n;\theta)$, $t \in \{t_0,...,t_m\}$, $y(t;\theta) = y(t;m,n;\theta) \in \{y_0,...,y_n\}$, $y_0 < ... < y_n$, временного ряда $y(t_0),...,y(t_m)$, удовлетворяющих *условию монотонности* ($y(t_{i-1};\theta) \le y(t_i;\theta)$) и двум *краевым условиям* ($y(t_0;\theta) = y_0$, $y(t_m;\theta) = y_n$). Помимо значений $y_j = y(t_i;\theta)$ функции $y = y(t;\theta)$, будем рассматривать и неотрицательные приращения $d(t_i;\theta) = y(t_i;\theta) - y(t_{i-1};\theta) \ge 0$, $i = 1,...,m$, этой функции. Очевидно, что значение функции $y = y(t;\theta)$ в точке $t = t_i$ определяется формулой $y(t_i;\theta) = y(t_0;\theta) + d(t_1;\theta) + ... + d(t_i;\theta)$. Поэтому каждой траектории $y(t;m,n;\theta)$ из множества $Y(m,n)$ сопоставляется соответствующий набор приращений $d(t_i;m,n;\theta) = d(t_i;\theta)$, $i = 1,...,m$, из множества $D(m,n) = \{d(t;m,n;\theta) : \theta = 1,...,N(m,n)\}$.

Далее будем рассматривать простейший вариант, когда имеются равноотстоящие моменты времени $t_i = t_{i-1} + h = t_0 + i\,h$ ($h = [(t_m - t_0)/m] > 0$ – шаг отсчета времени) $i = 1,...,m$, и равноотстоящие возможные значения $y_j = y_{j-1} + u = y_0 + j\,u$ ($u = [(y_n - y_0)/n] > 0$ – шаг отсчета показателя), $j = 1,...,n$, исследуемого финансово-экономического показателя. В этом случае можно установить взаимно однозначное соответствие между множеством $Y(m,n) = \{y(t;m,n;\theta) : \theta = 1,...,N(m,n)\}$ и множеством $J(m,n) = \{j(i;m,n;\theta) : \theta = 1,...,N(m,n)\}$, где $J(m,n)$ есть множество *всех возможных траекторий* $j(i;\theta) = j(i;m,n;\theta)$, $i \in \{0,1,...,m\}$, $j(i;\theta) \in \{0,1,...,n\}$, заданных на плоской целочисленной решетке $[0,m] \times [0,n] = \{(i,j) : i = 0,1,...,m,\ j = 0,1,...,n\}$ и удовлетворяющих *условию монотонности* ($j(i-1;\theta) \le j(i;\theta)$), а также двум *краевым условиям* ($j(0;\theta) = 0$, $j(m;\theta) = n$). Указанное взаимно однозначное соответствие множеств $Y(m,n)$ и $J(m,n)$ устанавливается формулой $y_j = y(t_i;\theta) = y(t_0;\theta) + j(i;\theta)\,u = y(t_0;\theta) + j(i;\theta)[\{y_n - y_0\}/n]$, в которой $i = 0,1,...,m$.

Помимо функции $j = j(i;\theta)$ будем рассматривать и неотрицательные приращения $\delta(i;\theta) = j(i;\theta) - j(i-1;\theta) \ge 0$, $i = 1,...,m$, этой



Труды СПИИРАН. 2009. Вып. 9. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2009. Issue 9. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

функции. Очевидно, что значение функции $j = j(i;\theta)$ определяется формулой $j(i;\theta) = \delta(1;\theta) + ... + \delta(i;\theta)$. Взаимно однозначное соответствие между конечными множествами $D(m,n)$ и $\Delta(m,n) = \{\delta(i;m,n;\theta) : \theta = 1,..., N(m,n)\}$ устанавливается формулой $d(t_i;\theta) = \delta(i;\theta)u = \delta(i;\theta)[(y_n - y_0)/n]$, $i = 0,1,...,m$.

Равновероятная рандомизация теоретико-множественной неопределенности выбора конкретной траектории $j(i;\theta) = j(i;m,n;\theta)$ из множества $J(m,n)$ дает стохастический процесс $\widetilde{j}(i) = \widetilde{j}(i;m,n) = j(i;m,n;\widetilde{\theta})$, порожденный равномерно распределенным случайным параметром $\widetilde{\theta}$ : $P(\{\widetilde{\theta} = \theta\}) = 1/N(m,n)$, где число $N(m,n)$ элементов множества $J(m,n)$ определяется известной формулой $N(m,n) = (n+m-1)!/[n!(m-1)!]$.

Математическое ожидание $\mu_{\widetilde{j}}(i) = E\widetilde{j}(i)$ и дисперсия $\sigma^2_{\widetilde{j}}(i) = D\widetilde{j}(i)$ стохастического процесса $\widetilde{j}(i) = \widetilde{j}(i;m,n) = j(i;m,n;\widetilde{\theta})$ находятся по формуле $\mu_{\widetilde{j}}(i) = n[i/m]$ и по формуле $\sigma^2_{\widetilde{j}}(i) = n^2 [i(m-i)]/[m^2(m+1)] + n[i(m-i)]/[m(m+1)]$ соответственно. Отсюда находим математическое ожидание $\mu_{\widetilde{y}}(t_i) = E\widetilde{y}(t_i)$, дисперсию $\sigma^2_{\widetilde{y}}(t_i) = D\widetilde{y}(t_i)$ стохастического процесса $\widetilde{y}(t_i) = y(t_0) + \widetilde{j}(i)$ по формулам

$$\mu_{\widetilde{y}}(t_i) = y(t_0) + [y(t_n) - y(t_0)][i/m], \tag{4}$$

$$\sigma^2_{\widetilde{y}}(t_i) = [i(m-i)]/[m^2(m+1)] + (1/n)[i(m-i)]/[m(m+1)] \tag{5}$$

соответственно.

Найденный тренд $\mu_{\widetilde{y}}(t_i)$ стохастического процесса $\widetilde{y}(t_i)$ может использоваться как искомая оценка (прогноз) значений исследуемого показателя на моменты времени $t_0,...,t_m$. Наглядное представление о точности полученных оценок $\mu_{\widetilde{y}}(t_i)$, $i = 0,1,...,m$, дает область вокруг тренда $\mu_{\widetilde{y}}(t_i)$, ограниченная графиками функций $\mu^-_{\widetilde{y}}(t_i) = \mu_{\widetilde{y}}(t_i) - \sigma_{\widetilde{y}}(t_i)$, $\mu^+_{\widetilde{y}}(t_i) = \mu_{\widetilde{y}}(t_i) + \sigma_{\widetilde{y}}(t_i)$, где $\sigma_{\widetilde{y}}(t_i) = \sqrt{D\widetilde{y}(t_i)}$ есть стандартное отклонение случайного процесса $\widetilde{y}(t_i)$, $i = 0,1,...,m$.



Труды СПИИРАН. 2009. Вып. 9. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2009. Issue 9. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

Пусть теперь исследователь располагает нечисловой, неточной и неполной экспертной информацией $I_y$ о значениях $y(t_1;\theta),...,y(t_{m-1};\theta)$ траекторий из множества $Y(m,n)$, а также аналогичной ННН-информацией $I_d$ о соответствующих наборах $d(t_1;\theta),...,d(t_m;\theta)$ приращений из множества $D(m,n)$. Объединенная ННН-информация $I = I_y \cup I_d$ позволяет построить множество траекторий $Y(m,n;I) \subseteq Y(m,n)$, содержащее число элементов $N(m,n;I) \le N(m,n)$: $Y(m,n;I) = \{y(t;m,n;\tau) : \tau = 1,..., N(m,n;I)\}$.

Умея генерировать траектории из множества $Y(m,n;I) = \{y(t;m,n;\tau) : \tau = 1,..., N(m,n;I)\}$ (простейший алгоритм генерации всех монотонных траекторий из множества $Y(m,n) \supseteq Y(m,n;I)$ приведен в работе [18]), можно сосчитать математическое ожидание $\mu_{\tilde{y}}(t_i;I) = E\,\tilde{y}(t_i;I)$, дисперсию $\sigma^2_{\tilde{y}}(t_i;I) = D\,\tilde{y}(t_i;I)$ стохастического процесса $\tilde{y}(t_i;I)$ с равновероятными реализациями из множества $Y(m,n;I)$ по формулам

$$\mu_{\tilde{y}}(t_i;I) = \frac{1}{N(m,n;I)} \sum_{\tau=1}^{N(m,n;I)} y(t_i;m,n;\tau), \qquad (6)$$

$$\sigma^2_{\tilde{y}}(t_i;I) = \frac{1}{N(m,n;I)} \sum_{\tau=1}^{N(m,n;I)} [y(t_i;m,n;\tau) - \mu_{\tilde{y}}(t_i;I)]^2 \qquad (7)$$

соответственно.

Найденный тренд $\mu_{\tilde{y}}(t_i;I)$ стохастического процесса $\tilde{y}(t_i;I)$ может использоваться как искомая оценка (прогноз) значений исследуемого показателя на моменты времени $t_0,...,t_m$. Наглядное представление о точности полученных оценок $\mu_{\tilde{y}}(t_i;I)$, дает область вокруг тренда $\mu_{\tilde{y}}(t_i;I)$, ограниченная графиками функций $\mu^-_{\tilde{y}}(t_i;I) = \mu_{\tilde{y}}(t_i;I) - \sigma_{\tilde{y}}(t_i;I)$, $\mu^+_{\tilde{y}}(t_i;I) = \mu_{\tilde{y}}(t_i;I) + \sigma_{\tilde{y}}(t_i;I)$, где $\sigma_{\tilde{y}}(t_i;I) = \sqrt{D\,\tilde{y}(t_i;I)}$ есть стандартное отклонение случайного процесса $\tilde{y}(t_i;I)$, $i = 0,1,...,m$.

**4. Прогнозирование цены облигации методом рандомизированных траекторий.** Применим изложенную в предыдущем параграфе модификацию метода рандомизированных траекторий для прогно-



Труды СПИИРАН. 2009. Вып. 9. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2009. Issue 9. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

зирования временного ряда значений цены облигации по нечисловой, неточной и неполной экспертной информации. Рассмотрим динамику цены некоторой облигации, имеющей номинал 100 руб. и продающейся в момент эмиссии по цене 80 руб. Облигация погашается через шесть месяцев по номинальной цене 100 руб. Требуется оценить значение цены облигации на конец каждого из шести месяцев.

Построим сначала множество $Y = \{y(t;\theta), \theta \in \Theta\}$ возможных траекторий $y^{(\theta)}(t)$ значения цены облигации, положив, что эмиссия соответствует моменту времени $t = 0$, а единицей измерения времени является один месяц. Дополнительно предположим, что цена акции измеряется с точностью до рубля – $y(t;\theta) \in \{80, 81, ..., 99, 100\}$. Тогда множество $Y = Y(6,20) = \{y(t;\theta), t = 0,1,...,6; \theta = 1,..., N(6,20)\}$ всех возможных траекторий конечно ($\Theta = \{1,..., N(6,20)\}$, $N(6,20) = 53130$), а каждая траектория цены является монотонно неубывающей дискретной функцией $y(t;\theta) \in \{80, 81, ..., 99, 100\}$ дискретного аргумента $t \in \{0,1,...,6\}$ и представляет собой набор точек $(0, y(0;\theta)) = (0,\ 80),\ (1, y(1;\theta)),...,(5, y(5;\theta)),\ (6, y(6;\theta)) = (6,\ 100)$, где $y(t-1;\theta) \le y(t;\theta)$, $t = 1,...,6$. Приращения $d(t;\theta)$, $t = 1,...,6$, траектории $y(t;\theta)$, задаваемые соотношением $d(t;) = y(t;\theta) - y(t-1;\theta)$, позволяют определить значение функции $y(t;\theta)$ в точке $t$ как сумму $y(t;\theta) = d(1;\theta) + ... + d(t;\theta)$.

Множеству $Y(6,20) = \{y(t;\theta), t = 0,1,...,6, \theta = 1,..., N(6,20)\}$ можно взаимно однозначно сопоставить конечное множество $J(6,20) = \{j(i;\theta), i = 0,1,...,6, \theta = 1,..., N(6,20)\}$ всех возможных дискретных монотонных путей (траекторий) $j(i;\theta)$ на целочисленной решетке $[0,6]\times[0,20] = \{(i, j) : i = 0,1,...,6; j = 0,1,...,20\}$, принимающих дискретные значения из множества $\{0,1,...,20\}$ и удовлетворяющих условиям $j(i-1;\theta) \le j(i;\theta)$, $j(0;\theta) = 0$, $j(6;\theta) = 20$. Более того, в рассматриваемом случае траектории $j(i;\theta)$ и $y(t;\theta)$ связаны в каждой точке $t = i$ простым соотношением $y(t;\theta) = 80 + j(t;\theta)$, $t = 0,1,...,6$. Поэтому далее мы будем изучать, в основном, непосредственно траектории $y(t;\theta)$, опуская соответствующие описания, связанные с траекториями $j(i;\theta)$.



Труды СПИИРАН. 2009. Вып. 9. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2009. Issue 9. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

Будем моделировать неопределенность выбора траектории $y(i;\theta)$ из множества всех возможных траекторий $Y(6,20)$ при помощи стохастического процесса $\widetilde{y}(i)=\widetilde{y}(t;m,n)=\widetilde{y}(t;6,20)$, реализациями (траекториями) которого служат дискретные функции $y(t;\theta)=80+j(t;\theta)$, $\theta=1,...,N(m,n)=53130$, дискретного аргумента $t=1,....,m=6$.

В случае, когда отсутствует дополнительная экспертная информация $I$ о вероятностях появления траекторий $y(t;\theta)$ ($I=\varnothing$), стохастический процесс $\widetilde{y}(t;6,20)$ может быть задан, как это уже было отмечено выше, при помощи равномерно распределенного на множестве $\Theta=\{1,...,N(6,20)\}$, $N(6,20)=53130$, случайного параметра $\widetilde{\theta}$: $P(\{\widetilde{y}(t;6,20)=y(t;6,20;\theta)\})=P(\{\widetilde{\theta}=\theta\})=1/N(6,20)$.

Тогда для математического ожидания $\mu_{\widetilde{y}}(t)=n\cdot[t/m]$ стохастического процесса $\widetilde{y}(i;m,n)$ получаем искомую оценку $\mu_{\widetilde{y}}(t)=80+t\ [10/3]\approx 80+3.3333t$.

Аналогично, для стандартного отклонения $\sigma_{\widetilde{y}}(t)=\sqrt{D\,\widetilde{y}(t)}$ и дисперсии $\sigma^2_{\widetilde{y}}(t)=[t\,(m-t)]/[m^2\,(m+1)]+(1/n)[t\,(m-t)]/[m(m+1)]$ стохастического процесса $\widetilde{y}(i;m,n)$ получаем искомые оценки $\sigma_{\widetilde{y}}(t)\approx 1.44\sqrt{t\,(6-t)}$ и $\sigma^2_{\widetilde{y}}(t)=t\,(6-t)[20\cdot 26]/[7\cdot 36]\approx 2.04\,t\,(6-t)$ соответственно.

Теперь, помимо тренда $\mu_{\widetilde{y}}(t)$ стохастического процесса $\widetilde{y}(t;6,20)$, можно ввести ожидаемые нижнюю $\mu^-_{\widetilde{y}}(t)=\mu_{\widetilde{y}}(t)-\sigma_{\widetilde{y}}(t)$ и верхнюю $\mu^+_{\widetilde{y}}(t)=\mu_{\widetilde{y}}(t)+\sigma_{\widetilde{y}}(t)$ границы для возможных траекторий этого процесса.

Значения функций $\mu_{\widetilde{y}}(t)$, $\sigma_{\widetilde{y}}(t)$, $\mu^-_{\widetilde{y}}(t)$, $\mu^+_{\widetilde{y}}(t)$, определяющих тренд стохастического процесса $\widetilde{y}(t;6,20)$, его стандартное отклонение и границы стандартной доверительной области для тренда соответственно, приведены в табл. 1.



Труды СПИИРАН. 2009. Вып. 9. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2009. Issue 9. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

Табл. 1. **Значения функций** $\mu_{\tilde{y}}(t)$, $\sigma_{\tilde{y}}(t)$, $\mu^{-}_{\tilde{y}}(t)$, $\mu^{+}_{\tilde{y}}(t)$

| $t$ | $\mu_{\tilde{y}}(t)$ | $\sigma_{\tilde{y}}(t)$ | $\mu^{-}_{\tilde{y}}(t)$ | $\mu^{+}_{\tilde{y}}(t)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 80.00 | 0.00 | 80.00 | 80.00 |
| 1 | 83.33 | 3.21 | 80.12 | 86.55 |
| 2 | 86.67 | 4.06 | 82.60 | 90.73 |
| 3 | 90.00 | 4.31 | 85.69 | 94.31 |
| 4 | 93.33 | 4.06 | 89.27 | 17.40 |
| 5 | 96.67 | 3.21 | 93.45 | 99.88 |
| 6 | 100.00 | 100.00 | 100.00 | 100.00 |

Рассмотрим теперь другую информационную ситуацию, в которой исследователь обладает определенным количеством нечисловой, неточной и неполной информации $I \neq \varnothing$. Пусть, например, эксперт описывает свои представления о скорости роста цены облигации, указывая систему неравенств $ID = \{d(1) < d(2) < d(3) = d(4) > d(5) > d6)\}$ для приращений $d(t)$, $t = 1,...,6$. Пусть, далее, эксперт дает интервальную информацию $II$, определяемую неравенствами $81 \leq y(1) \leq 82$, $83 \leq y(2) \leq 84$, $88 \leq y(3) \leq 90$, $93 \leq y(4) \leq 99$, $98 \leq y(5) \leq 99$ для цены $y(t)$, $t = 1,...,6$, рассматриваемой облигации.

Таким образом, исследователь обладает нечисловой (ординальной) и неточной (интервальной) экспертной информацией $I = ID \cup II$, определяемой объединенной системой неравенств, входящих в системы неравенств $ID$ и $II$. Теперь сформируем множество $Y(I) = Y(m,n;I) = Y(6,20;I)$ всех допустимых траекторий $y(t;\theta)$, $\theta = 1,...,N(m,n;I) = N(6,20;I) < N(6,20)$. Для генерации всех возможных траекторий с последующей селекцией допустимых (т.е. удовлетворяющих неравенствам, входящим в объединенную систему неравенств $I$), используем бета-версию оболочки системы поддержки принятия решений (ОСППР) APIS (Aggregated Preference Indices System), представляющую собой модификацию сертифицированной ОСППР АСПИД-3W [16], созданную фирмой Polyidea Ltd. (London, G.B.).

СППР APIS по ННН-информации $I$ формирует множество $Y(6,20;I)$ допустимых траекторий, состоящее всего из пяти траекторий $y(t;\theta)$, $\theta = 1,...,N(6;20;I) = 5$, $t = 0,1,...,6$, перечисленных в табл.2.



Труды СПИИРАН. 2009. Вып. 9. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2009. Issue 9. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

Табл. 2. **Допустимые траектории стохастического процесса $\widetilde{y}$ ($i$;6,20; $I$)**

| $\theta$ | $y(0;\theta)$ | $y(1;\theta)$ | $y(2;\theta)$ | $y(3;\theta)$ | $y(4;\theta)$ | $y(5;\theta)$ | $y(6;\theta)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 80 | 81 | 83 | 89 | 95 | 98 | 100 |
| 2 | 80 | 81 | 83 | 89 | 95 | 99 | 100 |
| 3 | 80 | 81 | 84 | 89 | 97 | 99 | 100 |
| 4 | 80 | 81 | 84 | 90 | 94 | 98 | 100 |
| 5 | 80 | 81 | 84 | 90 | 96 | 99 | 100 |

Данные табл. 2 позволяют сосчитать математическое ожидание $\mu_{\widetilde{y}}(t;I)$ стохастического процесса $\widetilde{y}(t;6{,}20;I)$ с равновероятными траекториями из множества $Y(6,20;I)$ по простой формуле $\mu_{\widetilde{y}}(t;I)=[y(t;1)+\ldots+y(t;5)]/5$, а дисперсию $\sigma^2_{\widetilde{y}}(t;I)$ этого процесса – по формуле $\sigma^2_{\widetilde{y}}(t;I)=\{[y(t;1)-\mu_{\widetilde{y}}(t;1;I)]^2+\ldots+[y(t;5)-\mu_{\widetilde{y}}(t;5;I)]^2\}/5$.

Теперь, помимо тренда $\mu(t;I)=\mu_{\widetilde{y}}(t;I)$ стохастического процесса $\widetilde{y}(t;I)$ можно ввести ожидаемые нижнюю $\mu_{-}(t;I)=\mu(t;I)-\sigma(t;I)$ и верхнюю $\mu_{+}(t;I)=\mu(t;I)+\sigma(t;I)$ границы для возможных траекторий этого процесса. Значения функций $\mu(t;I)$, $\sigma(t;I)=\sqrt{D\,\widetilde{y}(t;I)}$, $\mu_{-}(t;I)$, $\mu_{+}(t;I)$ приведены в табл.3.

Табл. 3. **Значения функций $\mu$ $(t;I)$, $\sigma$ $(t;I)$, $\mu_{-}(t;I)$, $\mu_{+}(t;I)$**

| $t$ | $\mu(t;I)$ | $\sigma(t;I)$ | $\mu_{-}(t;I)$ | $\mu_{+}(t;I)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 80.00 | 0.00 | 80.00 | 80.00 |
| 1 | 81.00 | 0.00 | 81.00 | 81.00 |
| 2 | 83.60 | 0.49 | 83.11 | 84.09 |
| 3 | 89.40 | 0.49 | 88.91 | 89.89 |
| 4 | 95.40 | 1.02 | 94.38 | 96.42 |
| 5 | 98.60 | 0.49 | 98.11 | 99.09 |
| 6 | 100.00 | 0.00 | 100.00 | 100.00 |

До сих пор предполагалось, что все допустимые траектории $y(t;\theta)=y(t;6,20;\theta)$, $\theta=1,\ldots,N(6;20;I)=5$, равновероятны. Однако эксперт, зачастую, обладает дополнительной ННН-информацией $IP$ о вероятностях $p(\theta)$ появления допустимых траекторий $y(t;\theta)$,



Труды СПИИРАН. 2009. Вып. 9. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2009. Issue 9. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

$\theta = 1,\dots,N(m,n;I)$, $p(\theta) \geq 0$, $p(1)+\dots+p(N(m,n;I)) = 1$. Пусть, например, эксперт задает такую ННН-информацию о вероятностях системой неравенств $IP = \{p(3) > p(5) > p(2) > p(1) > p(4)\}$. По этой информации ОСППР APIS строит оценки $\overline{p}(1;IP) = 0.09$, $\overline{p}(2;IP) = 0.16$, $\overline{p}(3;IP) = 0.46$, $\overline{p}(4;IP) = 0.03$, $\overline{p}(5;IP) = 0.26$ вероятностей $p(1),\dots,p(5)$.

Полученные оценки вероятностей позволяют сосчитать математическое ожидание $\mu(t;I,IP) = \mu_{\widetilde{y}}(t;I,IP) = E\,\widetilde{y}(t;;I,IP)$ стохастического процесса $\widetilde{y}(t;I,IP) = \widetilde{y}(t;6,20;I,IP)$ с равновероятными траекториями из множества $Y(6,20;I)$ по формуле:

$$\mu(t;6,20;I,IP) = y(t;1)\,\overline{p}(1;IP) + \dots y(t;5)\,\overline{p}(5;IP) \quad (8)$$

Дисперсия $\sigma^2(t;I,IP) = D\,\widetilde{y}(t;I,IP)$ стохастического процесса $\widetilde{y}(t;I,IP) = \widetilde{y}(t;m,n;I,IP)$ вычисляется по формуле

$$\begin{aligned}&\sigma^2(t;6,20;I,IP) = D\,\widetilde{y}(t;6,20;I,IP) = \\ &= [y(t;1) - \mu(t;I,IP)]^2\,\overline{p}(1;IP) + \dots + [y(t;5) - \mu(t;I,IP)]^2\,\overline{p}(5;IP)\end{aligned} \quad (9)$$

Найдем нижнюю $\mu_-(t;6,20;I,IP) = \mu(t;6,20;I,IP) - \sigma(t;6,20;I,IP)$ и верхнюю $\mu_+(t;6,20;I,IP) = \mu(t;6,20;I,IP) + \sigma(t;6,20;I,IP)$ ожидаемые границы для возможных траекторий процесса $\widetilde{y}(t;6,20;I.IP)$. Значения функций $\mu(t) = \mu(t;6,20;I,IP)$, $\sigma(t) = \sigma(t;6,20;I,IP)$, $\mu_-(t) = \mu_-(t;6,20;I,IP)$, $\mu_+(t) = \mu_+(t;6,20;I,IP)$ приведены в табл. 4.

Табл. 4. **Значения функций $\mu(t)$, $\sigma(t)$, $\mu_-(t)$, $\mu_+(t)$**

| $t$ | $\mu(t)$ | $\sigma(t)$ | $\mu_-(t)$ | $\mu_+(t)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 80.00 | 0.00 | 80.00 | 80.00 |
| 1 | 81.00 | 0.00 | 81.00 | 81.00 |
| 2 | 83.75 | 0.43 | 83.32 | 84.18 |
| 3 | 89.29 | 0.45 | 88.84 | 89.74 |
| 4 | 96.15 | 0.90 | 95.25 | 97.05 |
| 5 | 98.88 | 0.32 | 98.56 | 99.20 |
| 6 | 100.0 | 0.00 | 100.0 | 100.0 |

Сравнение таблиц 3 и 4 показывает, что учет вероятностей появления траекторий несколько уменьшает стандартное отклонение, что, в



Труды СПИИРАН. 2009. Вып. 9. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2009. Issue 9. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

свою очередь, позволяет увеличить точность и достоверность экспертных оценок будущей динамики цен на облигацию.

**5. Заключение.** Итак, во втором разделе представлен общий метод рандомизированных траекторий (функций) (МРТ), базирующийся на модели байесовской рандомизации неопределенности выбора функции (траектории), описывающей функциональную зависимость между исследуемыми показателями.

Разработка в третьем разделе модификации МРТ, ориентированной на работу с дискретными неубывающими функциями дискретного аргумента доведена до явных вычислительных формул. Приведенный в четвертом разделе пример оценки методом рандомизированных траекторий динамики цены облигации показывает, что привлечение нечисловой (порядковой, ординальной), неточной (интервальной) и неполной экспертной информации позволяет существенно повысить точность и надежность получаемых оценок.

Наиболее перспективным представляется развитие МРТ в направлении привлечения вероятностных оценок экспертной информации и соединения (в рамках байесовской схемы оценивания) нечисловой экспертной информации с эмпирическими числовыми данными (см., например, следующие работы по экспертной и/или байесовской оценке вероятностей альтернатив динамики финансово-экономических показателей: [10,11,25,30]).

## Литература

1. *Айзинова И.М.* Система показателей краткосрочных процессов в народном хозяйстве // Методологические проблемы анализа и прогноза краткосрочных процессов. М.: Наука, 1979. С. 9.-27.
2. *Алимов Ю.И.* Еще раз о реализме и фантастике в приложениях теории вероятностей // Автоматика. 1979. № 4. С.83-90.
3. *Алимов Ю.И.* Альтернатива методу математической статистики. М.: Знание, 1980.
4. *Алимов Ю.И., Кравцов Ю.А.* Является ли вероятность «нормальной» физической величиной? // Успехи физических наук. 1992. Том 162. № 7. С. 150-182.
5. *Буре В.М., Колесникова О.Н., Корников В.В.* Простой статистический метод выявления монотонной зависимости среди наблюдаемых траекторий стохастического процесса. Л.: ЛНИИВЦ АН СССР, 1983.
6. *Вишняков И.В., Хованов Н.В.* Система нормативов надежности коммерческих банков. СПб.: Издательство СПбГУ, 1998.
7. *Головченко В.Б.* Прогнозирование дискретных в пространстве состояний и времени процессов. Иркутск: Иркутский ВЦ СО АН СССР, 1988.
8. *Зельнер А.* Байесовские методы в эконометрии. М.: Статистика, 1980.
9. *Кипнис В.М.* Проблема прогнозирования временных рядов в условиях малых выборок // Методологические проблемы анализа и прогноза краткосрочных процессов. М.: Наука, 1979. С. 107-134.



Труды СПИИРАН. 2009. Вып. 9. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2009. Issue 9. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

10. *Колесников Г.И., Федотов Ю.В., Хованов Н.В.* Оценка вероятностей альтернатив развития фондового рынка в условиях дефицита числовой информации // Вестник Санкт-Петербургского университета. 2005. Серия 10. Прикладная математика, информатика, процессы управления. Выпуск 2. С. 151-160.
11. *Макаров А.В., Федотов Ю.В., Хованов Н.В.* Байесовская модель оценки вероятностей альтернативных состояний финансово-экономической среды реализации инвестиционных проектов // Материалы международной научной конференции «Экономическая наука: проблемы теории и методологии». Санкт-Петербург, 16-18 мая 2002 г. Секции 5-10. СПб., ОЦЭИМ, 2002. С. 141-142.
12. *Маркова Е.В., Маслак А.А.* Рандомизация и статистический вывод. М.: Финансы и статистика, 1986.
13. *Селезнева Т.В., Тутубалин В.Н., Угер Е.Г.* Исследование прикладных возможностей некоторых моделей стохастической финансовой математики // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2000. Том 7. Выпуск 2. С. 210-238.
14. *Тутубалин В.Н.* Статистическая обработка рядов наблюдений. М.: Знание, 1973.
15. *Тутубалин В.Н.* Границы применимости (вероятностно-статистические методы и их возможности). М.: Знание, 1977.
16. *Хованов К.Н., Хованов Н.В.* Система поддержки принятия решений АСПИД-3W (Анализ и Синтез Показателей при Информационном Дефиците). Свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ № 960087 от 22.03.1996. Российское агентство по правовой охране программ для ЭВМ, баз данных и топологии интегральных микросхем (РосАПО). М., 1996.
17. *Хованов Н.В.* Стохастические процессы и поля с равновероятными монотонными дискретными реализациями // Управление, надежность и навигация. Выпуск 5. Саранск: Издательство Мордовского ГУ. 1979. С. 136-139.
18. *Хованов Н.В.* Стохастические модели теории квалиметрических шкал. Л.: Издательство ЛГУ, 1986.
19. *Хованов Н.В.* Анализ и синтез показателей при информационном дефиците. СПб.: Издательство СПбГУ, 1996.
20. *Хованов Н.В.* Математические модели риска и неопределенности. СПб.: Издательство СПбГУ, 1998.
21. *Хованов Н.В.* Три типа математических моделей неопределенности // Измерительная техника. 2005. N 9. С. 39-44.
22. *Хованов Н.В.* Феноменологическая теория стабильных метаденег // Финансы и бизнес. 2005. №4. С. 18-21.
23. *Хованов Н.В., Колесникова О.Н.* Прямой байесовский метод оценки распределений и параметров. Л.: ЛНИИ ВЦ АН СССР, 1981.
24. *Хованов Н.В., Рожков Н.Н.* Статистическая оценка показателя надежности с помощью нестационарных марковских случайных процессов // Управление, надежность и навигация. Выпуск 6. Саранск: Издательство Мордовского ГУ. 1979. С. 127-131.
25. *Хованов Н.В., Федотов Ю.В.* Рациональная оценка вероятностей альтернатив состояния среды осуществления проектов – основа эффективного стратегического менеджмента // Материалы конференции «Концепции и инструменты эффективного менеджмента». Санкт-Петербург, 28 октября 2005 г. СПб., Издательский дом СПбГУ, 2005. С. 31-32.
26. *Barmish B., Lagoa C.* The uniform distribution: a rigorous justification for its use in robustness analysis // Mathematical Control, Signals, Systems. 1997. Volume 10. P. 203-222.



Труды СПИИРАН. 2009. Вып. 9. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2009. Issue 9. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

27. *Bayes Th.* An essay towards solving a problem in the doctrine of chances // Biometrika. 1958. Volume 5. Part 3-4. P. 296-315 (Reproduced from Philosophical Transactions of London Royal Society. 1763. Volume 53).
28. *Brunk H., Gref L.* A geometrical approach to probability // Mathematics Magazine. 1964. Volume 37. № 5. P. 287-296.
29. *Evans R.* The principle of minimal information // IEEE Transactions on Reliability. 1969. Volume 18. P. 87-89.
30. *Hovanov N.V., Yudaeva M.S., Kotov N.V.* Event-Tree with randomized transition probabilities as a new tool for alternatives probabilities estimation under uncertainty // Proceedings of the Sixth International Scientific School "Modeling and Analysis of Safety and Risk in Complex Systems". St. Petersburg, July 4-8, 2006. SPb., RAS, 2006. P. 118-125.
31. *Jaynes E.* Foundations of Probability Theory and Statistical Mechanics. N.Y.: Springer, 1967.
32. *Jaynes E.* Where do we stand on maximum entropy? // R. Levin (ed.) The Maximum Entropy Formalism. Cambridge: Cambridge University Press, 1979. P. 15-118.
33. *Kan Yu., Kibzun A.* Sensitivity analysis of worst-case distribution for probability optimization problems // Probabilistic Constrained Optimizations. S. Uryasev (ed.). New York: Kluwer, 2000. P. 31-46.
34. *Knight F.* Risk, Uncertainty, and Profit. Boston (MA, USA): Houghton Mifflin Co., 1921.
35. *Shimony A.* The status of the principle of maximum entropy // Synthese. 1985. Vol. 63. P. 35-53.
36. *Villegas C.* On the representation of ignorance // Journal of American Statistical Association. 1977. Volume 72. № 359. P. 651-654.

**Хованов Николай Васильевич** — д.физ.-мат.н., проф.; профессор кафедры экономической кибернетики экономического факультета Санкт-Петербургского государственного университета (СПбГУ). Область научных интересов: математические модели принятия решений с использованием нечисловой, неточной и неполной экспертной информации. — 210. nick@polyidea.com, polydecision.com; КЭК ЭФ СПбГУ, ул. Чайковского 62, Санкт-Петербург, 191194, РФ; р.т. +7(812)272-7534.

**Nikolai V. Hovanov** — Dr. Sci. (Math.), Prof.; Professor of Economic Cybernetics Dep., Faculty of Economics, St. Petersburg State University (SPbSU). Fields of research: models of decision making by using of non-numeric, non-precise, and non-complete expert information. — 210. nick@polyidea.com, polydecision.com; DEC FE SPbSU, Tschaikovskogo 62, St. Petersburg, 191194, RF; +7(812)272-7534.



Труды СПИИРАН. 2009. Вып. 9. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2009. Issue 9. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru