УДК 519.81 **DOI** 10.15622/ia.2020.19.6.1

С.В. Микони, Д.П. Бураков

ОБОСНОВАНИЕ И КЛАССИФИКАЦИЯ ОЦЕНОЧНЫХ ФУНКЦИЙ, ПРИМЕНЯЕМЫХ В РЕЙТИНГОВЫХ МЕТОДАХ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОГО ВЫБОРА

Микони С.В., Бураков Д.П. **Обоснование и классификация оценочных функций, применяемых в рейтинговых методах многокритериального выбора.**

Аннотация. Проанализированы предложенные ранее исследователями рекомендации по применению методов многомерного оценивания объектов. Отмечена слабая обоснованность этих рекомендаций, следующая из поверхностной систематизации методов многомерного оценивания. Рекомендации ориентированы не на классы задач многомерного оценивания объектов, а на различные области человеческой деятельности. Однако в каждой сфере человеческой деятельности имеет место широкий спектр задач оценивания объектов различной природы. В связи с этим признана актуальность более тщательной систематизации методов многомерного оценивания.

Учитывая разноплановость методов многомерного оценивания, решено ограничиться систематизацией методов, применяющих оценочные функции, и на этой основе предложить общие рекомендации по их применению.

Обзор методов многомерного оценивания с единой позиции потребовал уточнения применяемой в них терминологии. На основе формальной модели установлены отношения между понятиями «предпочтение», «критерий» и «показатель». Для выделения методов, применяющих оценочные функции, введено понятие целевого значения показателя. Относительно его расположения на шкале показателя введены понятия идеальной и реальной целей. Соответствующие этим целям критерии разделены на целевые и ограничительные. С применением предложенной терминологии проанализированы наиболее известные методы многомерного оценивания. Из них выделена группа методов, применяющих оценочные функции.

Рассмотрены варианты оценочных функций, создаваемых на основе критерия и постулатов теории ценности и полезности. На основе сходства областей определения и значений различных оценочных функций установлена взаимосвязь между ними. Относительно целевого значения показателя они разделены на функции достижения цели и функции отклонения от цели. Показана взаимная дополнительность этих функций. Выделена группа функций отклонения от цели, которая позволяет упорядочивать объекты раздельно по штрафам и поощрениям относительно достижения реальной цели. Для отношения соответствия введено понятие нормы. На примере медицинских анализов показано практическое применение функций отклонения от нормы с применением как минимаксной, так и средневзвешенной обобщающей функции для установления рейтинга на множестве объектов.

Выявленное в процессе исследования сходство и различие оценочных функций положено в основу классификации использующих их методов многомерного оценивания. Различие оценочных функций по трудоемкости их создания отражено в предложенной методике их применения.

Ключевые слова: предпочтение, показатель, критерий, целевое значение, оценочная функция, функция ценности, функция полезности, достижение цели, отклонение от цели, функциональный выбор, многомерное оценивание объектов, рейтинговый метод

1. Введение. Извечная потребность человека в оценивании объектов любого вида и происхождения воплотилась в теоретические изыскания, начатые трудами [1-5]. Именно в послевоенный период с развитием информатики как средства реализации методов принятия решений было разработано их теоретическое обоснование. В последующие годы методы теории принятия решений (ТПР) разделились на отдельные группы и конкретизировались применительно к особенностям оцениваемых объектов. Ежегодно публикуются сотни работ, в которых методы ТПР используются для решения конкретных практических задач. Методы оценивания объектов по многим показателям (многомерного оценивания – ММО) нашли широкое применение на практике, охватывая все виды человеческой деятельности и объекты любой природы [6-12].

Ввиду многочисленности прикладных публикаций их общий обзор не представляется возможным. Он может быть сужен конкретной сферой приложения методов ТПР. Другой путь – сопоставление наиболее популярных методов многомерного оценивания с целью выявления их особенностей. Остановимся для примера на двух работах по этой теме, отечественной и зарубежной, опубликованных в 2013 году. Перечень рассматриваемых в них методов многокритериального выбора включает как методы оптимизации, изучаемые в рамках исследования операций, теории управления и искусственного интеллекта, так и подходы, основанные на моделировании предпочтений лица, принимающего решение (ЛПР). Методы первой группы, такие как линейное программирование и эволюционное моделирование, применяются для решения задач многокритериального выбора. В частности, целевое программирование рассматривается как обобщение линейного программирования в случае наличия нескольких целей оптимизации.

В [13] достаточно полно охвачены классические методы оптимизации. В ней приводится обширный перечень как отечественных, так и зарубежных средств решения задач многокритериального выбора. Но данное исследование носит информационный характер, поскольку в нем отсутствует сопоставление рассматриваемых методов и средств их реализации. В работе [14] представлен обзор англоязычных работ в области многокритериальной оптимизации. Как отмечают авторы, они рассмотрели наиболее популярные методы многомерного оценивания (в их терминах – Multi-Criteria Decision Making Methods, сокращенно – MCDM), к которым относятся:

1. Многомерная теория полезности (Multi-Attribute Utility Theory – MAUT).
2. Метод анализа иерархий (Analytic Hierarchy Process – AHP).
3. Теория нечётких множеств (Fuzzy Set Theory – FST).
4. Рассуждения по прецедентам (Case-Based Reasoning – CBR).
5. Анализ данных (Data Envelopment Analysis – DEA).

6. Простой метод многомерного упорядочения (Simple Multi-Attribute Rating Technique – SMART).
7. Целевое программирование (Goal Programming – GP).
8. Метод «исключение и выбор, отражающие реальность» (ELECTRE).
9. Метод организации ранжирования предпочтений для оценки обогащенного оценивания (PROMETHEE).
10. Простое аддитивное взвешивание (Simple Additive Weithing – SAW).
11. Метод упорядоченного предпочтения через сходство с идеальным решением (Technique for Order of Preference by Similarity Ideal Solution – TOPSIS).

Здесь следует отметить некорректность перечисления авторами в одном ряду как методов MCDM, так и используемых для их разработки теорий (например, FST само по себе не является методом MCDM, хотя элементы теории нечётких множеств активно используются, в том числе и в методах многомерного оценивания). В отличие от [13] в данной работе на основе анализа особенностей рассматриваемых методов предлагаются рекомендации по областям их применения. В основу рекомендаций положена трудоемкость построения модели и размерность задачи оценивания.

К недостаткам обзора следует отнести поверхностность рекомендаций по применению рассматриваемых методов. Рекомендации ориентированы не на классы задач ММО объектов, а на различные области деятельности. Однако, несмотря на большое различие областей деятельности, их оценивание не ограничивается решением частных задач. В каждой области деятельности имеет место широкий спектр задач оценивания объектов различной природы. Отмеченный недостаток обусловлен, с одной стороны, чрезмерным охватом методов ММО, а с другой стороны, отсутствием теоретического обоснования рекомендаций. Решению этой проблемы должна способствовать разработка научно-обоснованных классификаций методов ММО. Такие классификации, упорядочивая текущее знание, обладают также прогностическим свойством, что позволяет применять системный подход не только для анализа существующих моделей и средств их реализации, но и для создания новых вариантов моделей. Отсутствие таких классификаций в [14] послужило побудительным мотивом для исследований в этом направлении, результаты которых излагаются в настоящей работе.

На понимание задач оценивания объектов и классифицирование применяемых для их решения методов существенно влияет терминология предметной области (ПрО). Эта проблема актуальна для отечественной терминологии, в частности, по причине неточного перевода широко заимствуемых англоязычных терминов. В качестве примера приведем термин «метод анализа иерархий» (МАИ), который можно трактовать как анализ существующей иерархии показателей. В оригинале метод называется «Analytic Hierarchy Process» (AHP). Буквально оно переводится как «Метод аналитической иерархии». А под *иерархией* автор термина Т. Саати понимает структуру «цель → критерии → альтернативы».

Проблема уточнения смысла термина упрощается применением системного подхода к анализу моделей, изложенного в монографии [15]. В ней предложено рассматривать модель в трех аспектах: функциональном (Ф-модель), операционном (О-модель) и структурном (С-модель) и в их сочетаниях. Модель задачи описывается структурно-функциональной моделью (СФ-моделью), а процессы ее *построения* и *решения* описываются операционными, а точнее структурно-операционными моделями (СО-моделями). Примером СО-модели является алгоритм. В этих терминах любой метод относится к классу СО-моделей. Таким образом, термин AHP характеризует именно СО-, а не СФ-модель задачи, а его смысл заключается в *иерархическом процессе оценивания альтернатив*.

Для ясности дальнейшего изложения уточним еще ряд применяемых терминов. Введенный ранее термин «методы многомерного оценивания» (ММО) обобщает методы оценивания объектов по многим показателям: Multi-Attribute Rating Technique, Multi-Attribute Optimization, Multi-Objective Optimization, Multi-Criteria Optimization. Под словом «оптимизация» в них подразумевается цель упорядочения объектов для выбора из них того, который в набольшей степени удовлетворяет заданным требованиям.

В отечественной литературе часто не делается различий между терминами «показатель» и «критерий». Показателем фиксируется количественное или качественное значение некоторого свойства объекта, а критерием задается требование к значениям этого показателя. Следует упомянуть также о соотношении терминов «атрибут» и «показатель». Слово *attribute* имеет смысл *неотъемлемого свойства* объекта, а показатель используется для отражения результата *измерения* этого свойства в количественной или качественной шкале. В английском языке ему соответствует слово *indicator*.

Поскольку классификация должна охватывать методы ММО, изложенные в разных терминах, исследование предваряется объяснением применяемых терминов. На этой основе осуществлен обзор наиболее известных методов ММО. Из них выделена группа методов, применяющих оценочные функции. Сходство и различие этих функций положено в основу предлагаемой классификации группы методов ММО. Оно используется для выработки общих рекомендаций по применению рассматриваемых методов ММО. Заключительный пример демонстрирует расширенные возможности одного из методов ММО как следствие предложенной классификации.

2. Краткий обзор методов ММО. Как было отмечено ранее, в обзоре [14] отсутствует разделение моделей и методов оценивания и отнесение их к определенным классам. Для их первичного различия примем за основу деления принцип *создания* моделей оценивания. Модель ММО создается либо на основе модели оптимизации, либо на основе предпочтений ЛПР. Модели первого типа назовем *оптимизационными*, а второго типа – *экспертными* моделями. Их родоначальниками являются научные направления «Исследование операций», «Теория управления» для моделей первого типа и «Системный анализ» – для моделей второго типа. Несмотря на присутствие оптимизационного и экспертного факторов в моделях обоих типов, предлагаемое разделение удобно в смысле указания на первичность каждого из этих факторов.

Модель предпочтений ЛПР реализует отношения предпочтения:

- на множестве значений j-го показателя $R_Y \subset Y_j \times Y_j$;
- на множестве показателей $R_F \subset F \times F$;
- на множестве объектов $R_X \subset X \times X$.

Модель ПрО инвариантна по отношению к различным моделям предпочтений. Именно они и определяют различие методов ММО, которые и являются предметом дальнейшего рассмотрения.

По способу задания предпочтения разделим модели ММО на *связанные* и *несвязанные* по предпочтениям с альтернативами. Связанная модель предпочтений ЛПР отношения совмещает все три типа отношений предпочтения. В несвязанной модели предпочтений ЛПР отношение предпочтения на множестве объектов реализуется на основе первых двух типов предпочтений.

В связанной модели отношение предпочтения $R_{\text{пр},j} \subseteq X \times X$ по каждому показателю представляется матрицей парных сравнений (МПС). Значения предпочтений на множестве объектов задаются экспертом. В наиболее концентрированной форме эта модель реализуется в методе AHP Т. Саати [3]. В различных формах этот тип модели реализуется другими методами, названными в англоязычной литературе нерейтинговыми методами оценивания (outranking methods) [14].

Такое название «от противного» отражает назначение этих моделей. Их основная цель – выбор наилучшей альтернативы (объекта), хотя следствием процесса выбора является упорядочение альтернатив.

К этому классу принадлежат все методы, основанные на применении отношения предпочтения на множестве альтернатив. К ним относятся метод ANP (Analytic Network Process) [16] как обобщение метода AHP, метод ELECTRE (Elimination Et Choix Traduisant la Realite – исключение и выбор, отражающее реальность) [17], PROMETHEE (Preference Ranking Organization Method for Enrichment Evaluation) [18] и отечественный метод вербального анализа альтернатив (ВАР), разработанный коллективом академика О. И. Ларичева [19].

Трудоемкость построения связанной модели методом AHP Т. Саати оценивается количеством операций, требуемых для сопоставления N альтернатив по n показателям. Она определяется по формуле:

$$Q_{\text{AHP}} = \frac{N(N-1)}{2} \cdot n. \tag{1}$$

Согласно формуле (1) трудоемкость построения сравнительной модели быстро увеличивается с ростом размерности альтернатив, что ограничивает применение этих моделей для решения задач оценивания большой размерности. На начальном этапе развития ТПР это ограничение не являлось критическим. Основное внимание уделялось формализации предпочтений ЛПР и проблеме независимости критериев по предпочтению. Ограничение на размерность задачи оказалось критическим для оценивания большого количества объектов и сложных объектов, характеризующихся десятками показателей. Примером задач первого типа является определение рейтинга 85 регионов РФ по показателям социально-экономического развития [10]. Примером задач второго типа является оценивание качества и технического уровня сложных систем [6]. Для решения таких задач востребованы «рейтинговые» модели и методы оценивания.

В «рейтинговых» методах оценивания не лучшие, то есть неоптимальные объекты не исключаются из рассмотрения, а посему не называются альтернативами. В этих моделях первично упорядочение всех объектов, на основе которого выбираются наилучшие варианты.

Трудоемкость построения иерархической модели ММО на основе несвязанной модели с общими предпочтениями для всех объектов оценивается формулой:

$$Q = n + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} n_i \cdot (n_i - 1). \tag{2}$$

Второе слагаемое в формуле (2) отражает использование сравнительных моделей для вычисления весовых коэффициентов, применяемых для получения средневзвешенных оценок объектов. В отличие от формулы (1), сравнению подвергаются не оцениваемые объекты, а характеризующие их показатели. В иерархической модели ММО показатели разбиваются по их назначению на группы. В i-ю группу, $i = \overline{1, k}$, включается n_i показателей. Таким образом, большие (многомерные) и сложные (неоднородные) задачи решаются гибридными методами. В данном случае рейтинговый метод (ranking method) оценивания дополняется нерейтинговым методом (outranking method). Так, например, в [20] рассматривается методика многокритериального двухуровневого анализа пунктов размещения гидроэлектростанций, сочетающая в себе этапы применения методов MAUT и AHP для выбора наилучшего решения.

Формула (2) отражает независимость модели предпочтений ЛПР от модели ПрО или, иными словами, несвязность этих моделей. Она проявляется в том, что объем предпочтений Q не зависит от числа оцениваемых объектов N. Это и является основанием для именования методов упорядочения объектов на основе несвязанной модели рейтинговыми методами, поскольку отсутствует ограничение на число оцениваемых объектов.

Для сравнения несопоставимых по ресурсам объектов применяются два способа: вычисление отношения значений показателя к имеющимся ресурсам для обеспечения сопоставимости объектов относительно общего целевого значения c_j и *индивидуальное* планирование целевого значения j-го показателя c_{ji} для каждого i-го объекта, $i = \overline{1, N}$. Трудоемкость построения иерархической модели ММО на основе нормативной модели с индивидуальными требованиями для N объектов оценивается формулой:

$$Q = N \cdot n + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} n_i \cdot (n_i - 1). \qquad (3)$$

Для вычисления обобщенных оценок объектов по всем показателям применяются различные обобщающие функции (ОФ). Наибольшее распространение на практике получили аддитивная (АОФ) и мультипликативная (МОФ) функции, дающие средневзвешенные оценки объектов [21].

В работе [22] был предложен подход, основанный на замене функций полезности целями (targets). Однако в действительности задание целевых значений не противоречит заданию полезности на шкале показателя, что будет показано ниже.

В работе [4] была поставлена под сомнение парадигма многокритериального оценивания, основанная на получении компромисса в достижении частных целей с применением средневзвешенных оценок объектов. Достижению максимальной полезности (ценности) была противопоставлена парадигма достижения поставленной цели (Reference Objective), трактуемой точкой в n-мерном пространстве. Утверждалось, что «любая точка в целевом пространстве, независимо от того, достижима она или нет, идеальна или нет, может использоваться вместо весовых коэффициентов для получения функций, которые имеют минимумы только в точках Парето». В качестве таковой функции был предложен минимаксный критерий частных отклонений от поставленной цели (точки в пространстве).

В [23] в качестве источников частных целей предложено использовать ограничительные критерии с реальными целями. Метод условной оптимизации [24] предполагает исключение из упорядочения объектов, не удовлетворяющих ограничениям. В работе [23], как и в [4], все объекты подлежали упорядочению по общим оценкам независимо от достижения ими частных целей. На этом основании он был назван *методом мягких притязаний* или *приближением к образцу*. Однако в отличие от работы [4] не отвергались ОФ, дающие средневзвешенные оценки объектов. Таким образом, независимо от выбранной ОФ методы упорядочения объектов разделим на методы *достижения* и *отклонения* от цели.

3. Постановка задачи. Требования к объектам задаются на основе бинарного отношения предпочтения $R_{пр}$ [21], обладающего свойствами нестрого порядка, и потому образованного объединением отношений *превосходства* $R_{\succ}$ и *соответствия* $R_{\equiv}$, представляющих отношения строгого порядка и эквивалентности, то есть $R_{пр} = R_{\succ} \cup R_{\equiv}$.

В функциональной форме отношение предпочтения $R_{пр} \subseteq X \times X$, связывающее пару объектов x_i, $x_k \in X$, то есть $x_i \, Pr_{пр} \, x_k$, описывается двухместным предикатом $Pr_{пр}(x_i, x_k)$. *Превосходство* $x_i \succ x_k$ объекта x_i над объектом x_k представляется предикатом $\succ(x_i, x_k)$, а *соответствие* объектов x_i и x_k – предикатом $\equiv(x_i, x_k)$. Отношения превосходства и соответствия объектов x_i и x_k по j-му показателю представляются предикатами $\succ(f_j(x_i), f_j(x_k))$ и $\equiv(f_j(x_i), f_j(x_k))$, задающими составное отношение предпочтения $R_{пр j} = R_{\succ, j} \cup R_{\equiv, j} \subseteq X \times X$. Здесь и далее используются следующие обозначения:

1) $X = \{x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_N\}$ – множество оцениваемых объектов (альтернатив), $|X| = N$.

2) $F = \{f_1, \ldots, f_j, \ldots, f_n\}$ – множество показателей, отражающих различные свойства объектов, $|F| = n$.

3) Y_j, – область значений (домен) j-го показателя, также называемая шкалой этого показателя. Она определяется как некоторый отрезок $[y_{j,\min}, y_{j,\max}]$, $j = \overline{1,n}$.

4) $y_j = f_j(x)$ – значение j-го показателя для объекта x.

При количественных оценках j-го показателя в качестве предикатов превосходства применяются отношения «>» («быть больше») и «<» («быть меньше»), а в качестве предикатов соответствия – отношения «=» («быть равным») и «∈ [ ]» («принадлежать отрезку»).

Предпочтение $R_{\text{пр},j}$ преобразуется в *критерий* заданием целевого значения c_j в роли базы сравнения с любой величиной $y_j = f_j(x)$ на шкале j-го показателя, задаваемой отрезком $[y_{j,\min}, y_{j,\max}]$. Целевое значение c_j задается либо на границе шкалы показателя ($c_j = y_{j,\max}$, или $c_j = y_{j,\min}$) или на точных гранях множества Y_j, либо в промежуточной точке шкалы ($y_{j,\min} < c_j < y_{j,\max}$). Граничным целям соответствуют критерии $y_j \to \max$ и $y_j \to \min$. В [21] они названы *целевыми* критериями, а преследуемые ими цели – *идеальными* целями. Отметим, что здесь и далее символическая запись «$y \to \text{extr}$» означает требование поиска экстремального (наибольшего либо наименьшего) значения величины y на некотором множестве.

Целевой критерий характеризуется однородностью предпочтения на *всей шкале* j-го показателя. Оно реализуется заданием в качестве базы сравнения в предикате $Pr(y_j, c_j)$ целевого значения c_j на одной из границ шкалы j-го показателя. Базе сравнения $c_j = y_{j,\min}$ соответствует *максимизация* значений j-го показателя, то есть $y_j \to \max \Leftrightarrow Pr_{>}(y_j, y_{j,\min})$, а базе сравнения $c_j = y_{j,\max}$ – *минимизация* его значений, то есть $y_j \to \min \Leftrightarrow Pr_{<}(y_j, y_{j,\max})$, поскольку оценка выполнения требования, например максимизации, реализуется путем сравнения значения y_j с наименьшим возможным значением $y_{j,\min}$.

Цель, назначенная в промежутке между граничными значениями шкалы показателя, названа *реальной*, а содержащий ее критерий – *ограничительным* критерием по аналогии с оптимизационной моделью математического программирования. При реализации предпочтения превосходства с включением отношения равенства $y_j = c_j$ формируются ограничительные критерии «больше или равно» (ограничение «снизу») $Pr_{\geq}(y_j, c_j)$ и «меньше или равно» (ограничение «сверху») $Pr_{\leq}(y_j, c_j)$. В инфиксной форме они записываются как $y_j \geq c_j$ и $y_j \leq c_j$ соответственно.

При реализации отношения соответствия с базой сравнения c_j, $y_{j,\min} < c_j < y_{j,\max}$ формируется *точечный* ограничительный критерий $Pr_{=}(y_j, c_j)$, а с базой сравнения $[c_{j,\text{н}}, c_{j,\text{в}}]$ – *интервальный* ограничительный критерий $Pr_{[\,]}(y_j, [c_{j,\text{н}}, c_{j,\text{в}}])$. В этом критерии $c_{j,\text{н}}$ – нижняя ($y_{j,\min} < c_{j,\text{н}}$), а $c_{j,\text{в}}$ – верхняя ($c_{j,\text{в}} < y_{j,\max}$) граница интервала требуемых значений j-го показателя, определяемого соответствующим отрезком.

Конечно, называя любой показатель критерием, автор держит требования к нему «в уме». Однако формально значение j-го показателя $y_j = f_j(x)$ и оценка его соответствия требуемому значению c_j двухместным предикатом $Pr(y_j, c_j) \in \{1, 0\}$ – не одно и то же.

Модель задачи ММО состоит из двух частей [21]: модели ПрО и модели предпочтений ЛПР. Модель ПрО содержит информацию о сопоставляемых объектах и их свойствах. Ее формальной моделью является n-мерное отношение мощности N $R_{SD} \subseteq Y_1 \times \ldots \times Y_n$, $n = |F|$, $N = |X|$. В силу конечности множеств X и F эта модель представляется прямоугольной таблицей «Объекты/Показатели (Признаки)». В строках таблицы, помеченных именами объектов из X, перечисляются значения всех показателей для этих объектов, а столбцы озаглавлены именами показателей из множества F. Произведение $N \cdot n$ характеризует размерность задачи оценивания. На размерность задачи влияет также неоднородность показателей, проявляющаяся в различии их доменов. Различие заключается не только в принадлежности доменов показателей множествам действительных $\boldsymbol{R}$ или целых $\boldsymbol{Z}$ (при балльных оценках) чисел, но и в выделенных из них подмножеств для каждого показателя. Иными словами, каждый показатель $f_j(x)$, $j = \overline{1, n}$, измеряется в собственной шкале $Y_j = [y_{j,\min}, y_{j,\max}]$.

Модель предпочтений ЛПР выражается бинарными отношениями предпочтения $R_{\text{пр},j}$, а они, в свою очередь, задают соответствующие им критерии. Как было отмечено выше, в функциональной записи любой критерий, как соответствия, так и превосходства, представляет собой некоторый предикат, принимающий значение «истина» (1), если заданная цель выполняется, и «ложь» (0) — в противном случае, играя роль *оценочной функции* $f_{\text{о}}(y_j)$ j-го показателя (ОцФ), то есть функции, оценивающей, удовлетворяет ли значение j-го показателя y_j заданному требованию. При расширении области значений ОцФ $f_o(y_j)$ с множества $\{0, 1\}$ на множество $[0, 1]$ переходом от двузначной (булевой) логики к бесконечнозначной логике, ее значение характеризует *степень удовлетворения* заданного требования.

Заметим, что в смысле меры ОцФ является показателем, но измеряющим не свойство объекта, а *меру соответствия* этого свойства заданному требованию. Обобщенный показатель, вычисляемый обобщением значений частных ОцФ по некоторому правилу, сам по себе тоже не является критерием. Он становится таковым при задании на его шкале некоторого отношения предпочтения. Для вычисления значений обобщенного показателя для объектов, характеризуемых разнородными показателями, должна использоваться единая шкала. В качестве таковой наиболее востребована абсолютная шкала [0, 1], универсальная по отношению к аксиомам теории измерений. Эта шкала является областью значений ОцФ $f_o(y_j)$. В случае использования ОцФ с единой шкалой значений [0, 1] предпочтения на шкале обобщенного показателя естественным образом задаются отношениями {"≥", ">", "→ max"} или {"≤", "<", "→ min"}.

Разумеется, каждая ОцФ по-своему отображает отношение предпочтения на шкале $[y_{j,\min}, y_{j,\max}]$ j-го показателя. Однако общность областей определения и значений позволяет свести созданные разными способами ОцФ в единую систему. В основу этих способов положены аксиомы критерия и теории ценности/полезности [25].

Согласно [21] к ОцФ $f_o(y_j)$, областью определения которой является шкала j-го показателя $Y_j = [y_{j,\min}, y_{j,\max}]$, $j = \overline{1, n}$, относятся следующие функции:

– ценности v: $Y_j \rightarrow [0, 1]$;
– полезности u: $Y_j \rightarrow [-1, 1]$;
– плановая s: $Y_j \rightarrow [0, 200\%]$;
– принадлежности объекта l-му классу по j-му показателю μ_l: $Y_j \rightarrow [0, 1]$, $l = \overline{1, k}$;
– отклонения от цели d: $Y_j \rightarrow [-1, 1]$.

В [21] методы, реализующие сопоставление объектов на шкалах ОцФ, были названы методами *функционального выбора* (ФВ) в отличие от методов *критериального выбора* (КВ), реализующих с поставление объектов на исходных шкалах показателей. Англоязычные имена этих методов (ranking/outranking methods), отражающие их назначение, более ситуативны, чем именование по «принципу действия», так как в процессе применения назначение обозначаемого может расширяться.

Учитывая разноплановость рассмотренных методов ММО, на наш взгляд, затруднительно конкретизировать их применение по примеру работы [14]. Обоснованием рекомендаций по применению методов ММО должна служить систематизация, отражающая сходство и различие методов. В основу такой систематизации положим виды ОцФ, используемые рейтинговыми методами.

Их сходство и различие применим для выработки общих рекомендаций по применению этих методов.

Поэтому далее подробно рассмотрим ОцФ, их свойства и способы применения в рейтинговых задачах, на основании чего построим классификацию методов ФВ и определим возможные варианты их использования.

4. Оценочные функции, реализующие отношение превосходства. Согласно самому названию этого отношения и соответствующим ему предикатам реализующие его ОцФ являются монотонными в области определения $Y_j = [y_{j,\min}, y_{j,\max}]$, $j = \overline{1,n}$.

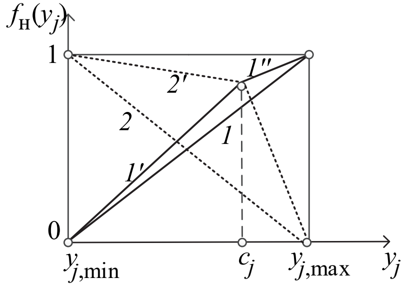
ОцФ, создаваемая на основе критерия превосходства, отображает значения из шкалы j-го показателя $[y_{j,\min}, y_{j,\max}]$ в шкалу $[0, 1]$: $f_{н}\colon Y_j \to [0, 1]$. Для предпочтения $y_j \geq c_j$ функция $f_{н,\max}(y_j)$ на отрезке $[y_{j,\min}, c_j]$ вычисляется по формуле:

$$f_{н,\max}(y_j) = \frac{y_j - y_{j,\min}}{c_j - y_{j,\min}} + b. \tag{4}$$

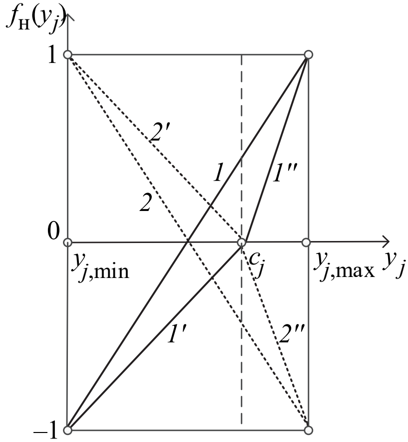
В формуле (4) величина b – нижняя граница значений функции $f_{н,\max}$. Для области значений $[0, 1]$ $b = 0$. Линейное отображение $f_{н}\colon Y_j \to [0, 1]$ называют *нормирующей функцией*. Таким образом, мера достижения объектом x цели, заданной на границе шкалы, оценивается линейной нормирующей функцией $f_{н}(y_j)$ j-го показателя.

В [21] нормирующая функция показателя трактуется как линейный вариант функции ценности $v(y_j)$ или полезности $u(y_j)$. Нормирующая функция $f_{н,\max}$ единственна в случае идеальной цели, совпадающей с верхней границей шкалы: $c_j = y_{j,\max}$ (выбор по максимуму) [5]. В [21] она называется функцией *достижения идеальной цели* (ДИЦ). Приближение к цели сопровождается увеличением значения функции $f_{н}(y_j)$ j-го показателя и при достижении идеальной цели $f_{н}(c_j) = 1$. Пример функции ДИЦ показан на рисунке 1а линией 1.

В отличие от идеальной цели реальная цель c_j, задаваемая ограничительными критериями $\geq(y_j, c_j)$ и $\leq(y_j, c_j)$, отвечает условию $y_{j,\min} < c_j < y_{j,\max}$ на шкале $[y_{j,\min}, y_{j,\max}]$. В [21] такая точка c_j рассматривается как *реальная* цель (target). Реальной цели ставится в соответствие приемлемое значение полезности (ценности) $f_{н}(c_j) = u_{jп}$ в диапазоне $0 < u_{jп} \leq 1$.



а)



б)

Рис. 1. Линейные и кусочно-линейные варианты оценочных функций:
а) – функции ценности; *б)* – функции полезности

В общем случае, когда $c_j \neq (y_{j,\max} + y_{j,\min})/2$, целевое значение c_j становится точкой излома ОцФ j-го показателя, а сама функция становится составной. Первая ее часть $f'_{н,\max}(y_j)$, отражающая достижение цели для предпочтения $y_j \geq c_j$ на отрезке шкалы показателя $[y_{j,\min}, c_j]$, вычисляется по формуле (1). Вторая часть ОцФ j-го показателя $\geq(y_j, c_j)$ – функция $f''_{н,\max}(y_j)$, отражающая превышение цели c_j, вычисляется по формуле:

$$f''_{н,\max}(y_j) = \frac{y_j - c_j}{y_{j,\max} - c_j} + b. \tag{5}$$

В целом ОцФ j-го показателя, моделирующая предпочтение критерия $\geq(y_j, c_j)$, представляет собой кусочно-линейную функцию $f_{н,\max}$. В [21] она названа *функцией достижения реальной цели* (ДРЦ). На рисунке 1а первая ее часть $f'_{н,\max}(y_j)$ представлена линией 1', а вторая часть $f''_{н,\max}(y_j)$ – линией 1". Аналогичным образом создаются функции ДРЦ $f_{н,\min}(y_j)$, $f'_{н,\min}(y_j)$ и $f''_{н,\min}(y_j)$ для критерия $\leq(y_j, c_j)$, представленные на рисунке 1а линиями 2, 2' и 2".

Разновидностью функций достижения цели является *плановая функция* $s(y_j)$. Область ее значений ограничена сверху двукратным выполнением плана. Относительно невыполнения и перевыполнения плана область значений плановой функции также может быть сведена к биполярной абсолютной шкале [–1, 1].

Значение планового показателя $s(y_j) \in [0, 100)$ означает *невыполнение* плана, именуемое на языке полезности потерями, а значение планового показателя $s(y_j) \in (100, 200]$ означает *перевыполнение* плана. Выполнению плана соответствует значение $s(y_j) = 100\%$. Особенность плановой шкалы дает возможность индивидуального планирования показателей для каждого оцениваемого объекта $x \in X$. Это позволяет сравнивать несравнимые по ресурсам объекты разной природы по плановой функции $s(y_j)$ в одном n-мерном пространстве показателей.

Плановое значение $s(y_j)$ j-го показателя задается на шкале $[y_{j,\min}, y_{j,\max}]$ (см. рис. 1б). Подобно ОцФ $f_{\text{н},\max}$, соответствующей критерию $\geq(y_j, c_j)$, плановая функция $s(y_j)$ представляет собой также кусочно-линейную функцию. Ее составляющие $s'(y_j)$ и $s''(y_j)$ вычисляются по формулам (4) и (5). На рисунке 1б они представлены линиями 1' и 1''. При трактовке невыполнения плана потерями, которые измеряются на отрицательной полуоси, в формуле (4) нижняя граница b функции $s(y_j)$ $b = -1$. В частном случае при $c_j = (y_{j,\max} + y_{j,\min})/2$ плановая функция проходит через среднюю точку шкалы $[y_{j,\min}, y_{j,\max}]$ (см. линию 1 на рис. 1б).

Случай $c_j \neq (y_{j,\max} + y_{j,\min})/2$ означает изменение предпочтения превосходства в точке c_j на втором участке шкалы показателя. При увеличении числа участков с разными предпочтениями растет и число кусков кусочно-линейной ОцФ [2]. При устремлении числа участков с разными предпочтениями к бесконечности получаем гладкую нелинейную ОцФ.

Исследуя лотерею как модель предпочтений ЛПР, фон Нейман и Моргенштерн [1] выявили зависимость типа нелинейности ОцФ от склонности/несклонности ЛПР к риску. Стремление ЛПР к максимальному выигрышу при достижении цели моделируется ОцФ, выпуклой вниз (см. линию 1' на рис. 2а). Чем ближе значение показателя к целевому, тем быстрее возрастает значение ОцФ. Стратегия несклонности к риску, то есть «довольствования малым» моделируется ОцФ, выпуклой вверх (см. линию 1'' на рис. 2а). Она быстро возрастает в начале шкалы, но по мере приближения к цели скорость возрастания замедляется. В простейшем случае нелинейность таких функций моделируется возведением в соответствующую степень k линейной нормирующей функции (при $k > 1$ функция выпукла вниз, а при $0 < k < 1$ – выпукла вверх).

Отказ от лотереи трактуется авторами [1] как безразличие к риску, то есть отсутствие интереса ЛПР к прибыли и к потерям. Этому условию соответствует полезность $u(c_j) = 0$ в точке c_j на рисунке 2б. Область значений функции полезности с учетом потерь является биполярной, то есть u: $Y_j \to [-1, 1]$.

Для уменьшения потерь ЛПР склонен к риску на участке шкалы $[y_{j,\min}, c_j)$, устремляясь к точке безразличия c_j (см. кривую 1' на рис. 2б). Достигнув ее, он может предпочесть несклонность к риску на участке $(c_j, y_{j,\max}]$ (см. кривую 1'' на рис. 2б).

Учет склонности/несклонности ЛПР к риску можно использовать для перехода от кусочно-линейной функции полезности в кусочную нелинейную функцию (см. рис. 2б), возведением ее в степень $k > 0$. Дополнительно для представления нелинейной функции полезности с перегибом в целевой точке c_j и областью значений [–1, 1] можно использовать логистическую функцию следующего вида:

$$f_{\text{онл}}(y_j) = m \cdot \left(1 + \exp\left(-t \cdot \left(y_j - c_j\right)\right)\right)^{-1} + b. \quad (6)$$

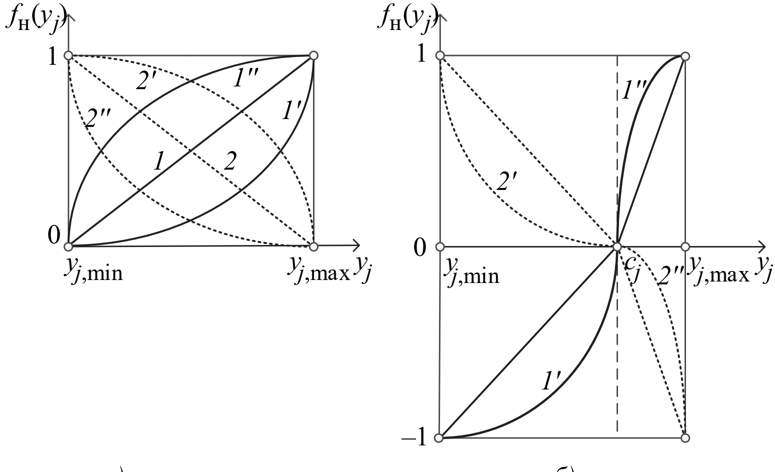


Рис. 2. Нелинейные оценочные функции:
а) – функции ценности; *б)* – функции полезности

Здесь c_j соответствует целевой точке, параметр t определяет степень нелинейности функции (6) и ее направление: при $t > 0$ функция возрастает (соответствует кривой 1'–1'' на рис. 2б), а при $t < 0$ – убывает (соответствует кривой 2'–2'' на рис. 2б). Масштабирующие параметры m и b определяют разброс области значений функции: при $m = 1$ и

$b = 0$ функция имеет своей областью значений отрезок [0, 1], стандартный для логистических функций, а при $m = 2$, $b = -1$ отрезок [–1, 1], характерный для функций полезности.

Заметим, что переход от задания предпочтений от двух к бесконечному числу интервалов увеличивает информативность ФП при условии соответствия параметров ее нелинейности предпочтениям ЛПР. Один из способов решения проблемы параметризации типовых ФП в многомерной модели предпочтений предложен в [26].

5. Оценочные функции, реализующие отношение соответствия. В отношении соответствия за достижение цели следует принять истинность предикатов $Pr_{=}(y_j, c_j) = 1$ при точечном соответствии и $Pr_{[\,]}(y_j, [c_{j,\text{н}}, c_{j,\text{в}}]) = 1$ – при интервальном соответствии. Применительно к отношению соответствия больше подходит понятие *нормы*. Истинность указанных предикатов означает соответствия значения y_j норме c_j ($y_j = c_j$) или $[c_{j,\text{н}}, c_{j,\text{в}}]$ ($y_j \in [c_{j,\text{н}}, c_{j,\text{в}}]$).

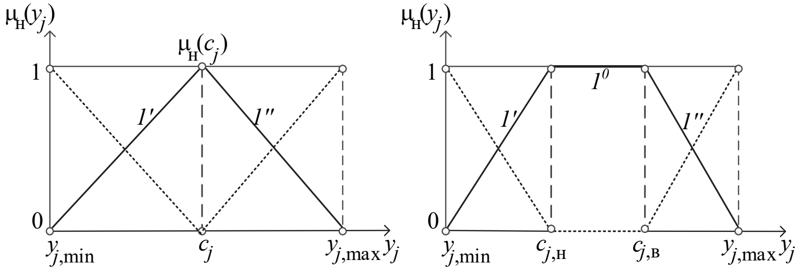
Задание нормы через точку c_j и отрезок $[c_{j,\text{н}}, c_{j,\text{в}}]$ на шкале j-го показателя можно рассматривать как *класс* его допустимых значений, а выявление принадлежности классу – как задачу классификации по принципу «годен/не годен». В этом смысле ОцФ соответствия значения y_j норме c_j или отрезку $[c_{j,\text{н}}, c_{j,\text{в}}]$ примем за функцию принадлежности $\mu_\text{н}(y_j)$.

Стопроцентная принадлежность объекта x норме по j-му показателю имеет место в точке c_j для $Pr_{=}(y_j, c_j) = 1$ и на отрезке $[c_{j,\text{н}}, c_{j,\text{в}}]$ для $Pr_{[\,]}(y_j, [c_{j,\text{н}}, c_{j,\text{в}}]) = 1$. На рисунке 3а точечная принадлежность представлена точкой $\mu_\text{н}(c_j) = 1$. На рисунке 3б интервальная принадлежность представлена горизонтальной линией 1^0.

Вертикальные штриховые линии выделяют подобласти прообразов отображения $\mu_\text{н}$, принадлежащие области его определения $[y_{j,\min}, y_{j,\max}]$. Для практических задач представляет интерес не только принадлежность значения показателя норме, но и степень приближения к ней. В простейшем случае примем линейный закон приближения к норме от границ шкалы $[y_{j,\min}, y_{j,\max}]$.

Степень приближения к норме от левой границы шкалы до $\mu_\text{н}(c_j) = 1$ вычисляется так же, как и для левой нормирующей функции ограничительного критерия $f'_{\text{н},\max}(y_j)$ по формуле (1) с $b = 0$. Степень приближения к норме от правой границы шкалы до $\mu_\text{н}(c_j) = 1$ вычисляется по формуле (7):

$$f''_{\text{н},\max}(y_j) = \frac{y_{j,\max} - y_j}{y_{j,\max} - c_j}. \qquad (7)$$

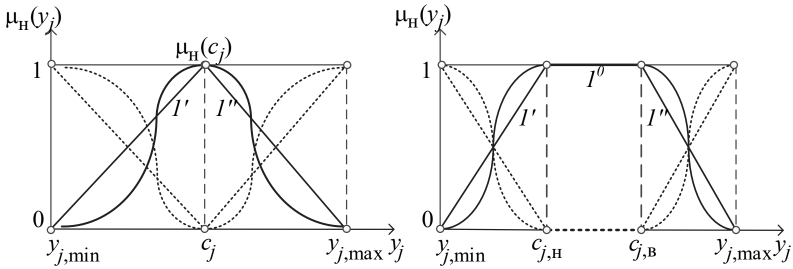


а) *б)*

Рис. 3. Немонотонные оценочные функции:
а) – треугольная; *б)* – трапецеидальная

На рисунке 3а левый фронт функции принадлежности $\mu_н(y_j)$ точечного соответствия норме представлен линией 1', а правый ее фронт – линией 1''. Для вычисления фронтов функции принадлежности $\mu_н(y_j)$ интервального соответствия в формуле (4) c_j заменяется на $c_{j,н}$, а в формуле (6) – на $c_{j,в}$. Полученные функции соответствуют треугольной и трапецеидальной функциям принадлежности, применяемым в нечёткой классификации.

В работах [27, 28] утверждается, что «на практике гораздо лучшие результаты получаются, когда используются простейшие функции принадлежности: треугольные и трапециевидные». Тем не менее по аналогии с линейными функциями, реализующими отношение превосходства, для линейных функций соответствия норме также могут быть введены нелинейные аналоги, как показано на рисунке 4.



а) *б)*

Рис. 4. Немонотонные нелинейные оценочные функции: *а)* – точечная норма; *б)* – интервальная норма

Нелинейная ОцФ соответствия точечной норме c_j задается следующим образом:

$$\mu_{\text{н}}^{\text{р}}(y_j; c_j, t) = \exp\left(-t \cdot \left(c_j - y_j\right)^2\right). \quad (8)$$

Здесь параметр c_j, собственно, значение нормы, а параметр $t_j > 0$ регулирует степень крутизны функции, то есть скорость ее убывания по мере удаления значения показателя y_j от нормы c_j. Это выражение определяет колоколообразную кривую, подобную функции плотности нормального распределения, при этом норма c_j аналогична математическому ожиданию, а t – дисперсии случайной величины.

ОцФ соответствия интервальной норме $[c_{j,\text{н}}, c_{j,\text{в}}]$, как и соответствующая функция на рисунке 3, является составной: поскольку интервальная норма представляет собой комбинацию двух ограничений $y_j \geq c_{j,\text{н}}$, и $y_j \leq c_{j,\text{в}}$ соответственно. Соответствие цели, определяемой ограничением «снизу» или «сверху» может быть описано функцией, которой соответствует логистическая кривая (6) с параметрами при $m = 1$ и $b = 0$. Таким образом, ОцФ соответствия интервальной норме $[c_{j,\text{н}}, c_{j,\text{в}}]$, изображенная кривой на рисунке 4б, представляется следующим выражением:

$$\mu_{\text{н}}^{\text{и}}(y_j; c_{\text{н},j}, t_1, c_{\text{в},j}, t_2) = f_{\text{онл}}^{\text{н}}(y_j; c_{\text{н},j}, t_1) \cdot f_{\text{онл}}^{\text{в}}(y_j; c_{\text{в},j}, t_2). \quad (9)$$

Здесь функции $f^{\text{н}}{}_{\text{онл}}$ и $f^{\text{в}}{}_{\text{онл}}$ соответствуют левому и правому фронтам, а параметры t_1 и t_2 регулируют раздельно их нелинейность, причем $t_1 > 0$, а $t_2 < 0$.

По сравнению с линейными и кусочно-линейными ОцФ нелинейные функции обладают такими преимуществами, как большая информативность за счет нелинейности и простота аналитического описания, позволяющая учесть склонность ЛПР к риску на разных участках шкалы относительно заданной цели.

6. Функция отклонения от цели. В [4] функция отклонения от цели трактовалась как мера недостижимости цели. В настоящей работе понятие отклонения от цели расширено в направлении превышения цели и применено к функциям ценности/полезности. Согласно принципу «от противного» функции отклонения дополняют функции достижения и соответствия цели до 1. На графиках ОцФ этот принцип выражается через симметрию соответствующих функций. На рисунках 1-4 ОцФ отклонения от цели представлены пунктирными линиями. Отсюда следует, что принцип дополнительности позволяет применять функции отклонения от цели для решения задач упорядочения и классификации объектов наряду с функциями достижения и соответствия цели.

Мера несоответствия цели (норме) отображается функцией отклонения $d(y_j)$. Чем дальше в любую сторону от цели c_j или от границ нормы $[c_{j,\text{н}}, c_{j,\text{в}}]$ отстоит значение y_j j-го показателя, тем больше значение функции $d(y_j)$. Функция $d(y_j) = 0$ в том случае, когда имеет место либо точное соответствие цели ($y_j = c_j$), либо принадлежность y_j отрезку $[c_{j,\min}, c_{j,\max}]$. Таким образом, объекты, оцениваемые по степени недостижения цели или несоответствия норме, упорядочиваются относительно критерия $d(y_j) \to \min$.

Особый интерес представляет раздельное рассмотрение вариантов недостижимости и превышения цели, свойственного отношению превосходства с реальными целями. В [23] предложено степень недостижимости цели оценивать штрафами, измеряемыми на положительной полуоси графика функции отклонения от цели. Степень превышения цели измеряется областью поощрений на отрицательной полуоси графика. На рисунке 5а изображена кусочно-линейная функция отклонения от целевого значения c_j для ограничения «≥» («не менее» или «снизу»), а на рисунке 5б – для ограничения «≤» («не более» или «сверху»).

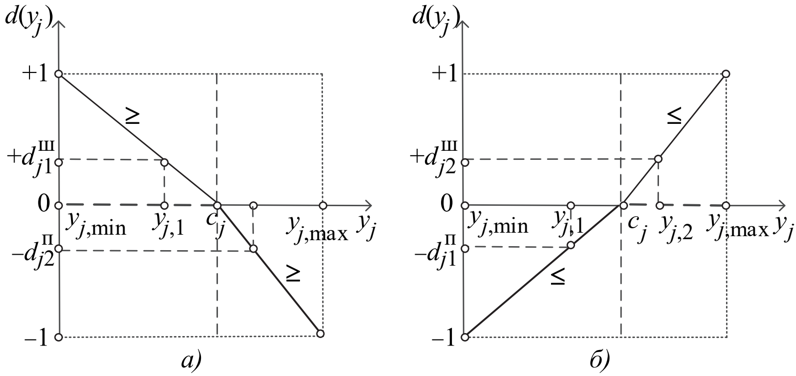


Рис. 5. Функции отклонения: *а)* – снизу (не менее); *б)* – сверху (не более)

На рисунке 5а значению $y_{j1} < c_j$ сопоставляется штраф $d^{\text{ш}}_{j1}$, а на рисунке 5б – поощрение $-d^{\text{п}}_{j1}$. Аналогичным образом значению $y_{j2} > c_j$ на рисунке 5а сопоставляется поощрение $-d^{\text{п}}_{j2}$, а на рисунке 5б – штраф $d^{\text{ш}}_{j2}$.

Относительные отклонения от цели для ограничения «снизу» вычисляется по формуле:

$$d^{\text{н}}(y_j) = \begin{cases} d^{\text{н}}_{\text{п}}(y_j) = \dfrac{c_j - y_j}{y_{j,\max} - c_j}, \text{ если } y_j > c_j, \\ d^{\text{н}}_{\text{ш}}(y_j) = \dfrac{c_j - y_j}{c_j - y_{j,\min}}, \text{ если } y_j < c_j. \end{cases} \tag{10}$$

Верхняя формула в выражении (10), отражающая превышение цели, представляет функцию поощрений $d_{\text{п}}$ на отрицательной полуоси графика, а нижняя формула – функцию штрафов $d_{\text{ш}}$ на положительной полуоси графика (см. рис. 5а).

Функции поощрений и штрафов для ограничения «сверху» (см. рис. 5б) представлены соответственно в выражении:

$$d^{\text{в}}(y_j)=\begin{cases} d^{\text{в}}_{\text{п}}(y_j)=\dfrac{y_j-c_j}{c_j-y_{j,\min}}, \text{ если } y_j<c_j, \\ d^{\text{в}}_{\text{ш}}(y_j)=\dfrac{y_j-c_j}{y_{j,\max}-c_j}, \text{ если } y_j>c_j. \end{cases} \tag{11}$$

Как следует из изложенного, функция отклонения $d(y_j)$ обобщает две функции – штрафов $d_{\text{ш}}(y_j)$ и поощрений $d_{\text{п}}(y_j)$, определенных на противоположных полуосях функции $d(y_j)$: $d(y_j) = d_{\text{ш}}(y_j) + d_{\text{п}}(y_j)$, при этом на тех участках шкалы, где $d_{\text{ш}}(y_j) \neq 0$, $d_{\text{п}}(y_j) = 0$ и наоборот. Эта особенность предоставляет дополнительные возможности в оценивании объектов.

В отличие от функций отклонения $d(y_j)$, образуемых на основе предикатов превосходства, функции, образуемые на основе предикатов соответствия, симметричны относительно цели (нормы), следовательно, отклонения от нормы в любую сторону оцениваются только функцией штрафов $d_{\text{ш}}(y_j)$. При линейной трактовке отклонений от нормы на рисунке 6а,б изображены треугольная и трапецеидальная функции отклонения от нормы, подобные функциям принадлежности норме (см. рис. 3а,б).

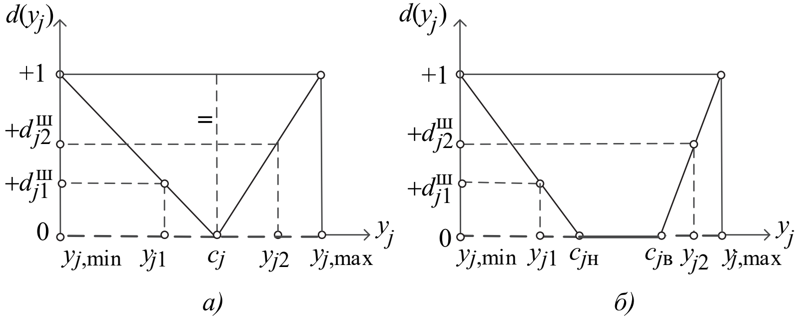


Рис. 6. Функции отклонения: *а)* – для ограничения «равно»; *б)* – для ограничения «интервал»

Пунктиром на оси абсцисс показаны участки шкалы, не удовлетворяющие соответствующему ограничению. Значению показателя на этом участке начисляется штраф, пропорциональный величине отклонения.

Для точечного (равно) и интервального ограничений относительное отклонение значения $y_j = f_j(x)$ объекта $x \in X$ по j-му показателю от цели c_j или отрезка $[c_{н,j}, c_{в,j}]$ всегда положительно (см. рис. 6а,б).

Относительное отклонение значения j-го показателя для точечного ограничения определяется выражением (12), состоящим из двух функций штрафов – нижней $d_{ш,н}$ и верхней $d_{ш,в}$:

$$d^{р}(y_j) = \begin{cases} d^{р}_{ш,н}(y_j) = \dfrac{|y_j - c_j|}{c_j - y_{j,\min}}, \text{ если } y_j < c_j, \\ d^{р}_{ш,в}(y_j) = \dfrac{|y_j - c_j|}{y_{j,\max} - c_j}, \text{ если } y_j > c_j. \end{cases} \quad (12)$$

При использовании интервального ограничения $y_j \in [c_{н,j}, c_{в,j}]$ относительное отклонение внутри отрезка равно 0 ($d^{и}(y_j) = 0$), если все точки внутри него равноценны. При выходе значения y_j за любую границу отрезка $[c_{н,j}, c_{в,j}]$ относительное отклонение определяется по формуле (12), где в верхнюю формулу вместо c_j подставляется нижняя $c_{н,j}$, а нижнюю формулу – верхняя граница $c_{в,j}$ отрезка $[c_{н,j}, c_{в,j}]$.

Следует отметить, что функции отклонения от нормы также могут быть преобразованы в нелинейные варианты подобно функциям достижения цели, изображенным на рисунках 2 и 4, дополнением до единицы соответствующих нелинейных функций соответствия.

В [4] требованию максимизации полезности показателя противопоставлялась минимизация расстояния до заданной точки в многомерном пространстве, а аддитивной обобщающей функции — минимаксный критерий для выбора объекта с наименьшим из максимальных отклонений от цели. Отсюда делался вывод о ненужности весовых коэффициентов, используемых в АОФ. Однако АОФ может использоваться и для нахождения обобщенного отклонения от вектора целей в тех случаях, когда необходимо учитывать важность показателей. Результирующее отклонение $d^{*}(x)$ объекта $x \in X$ от цели по всем видам ограничений вычисляется по формуле:

$$d^{*}(x) = \sum_{j=1}^{l} w_j \cdot d^{н}_j(y_j) + \sum_{j=1}^{u} w_j \cdot d^{в}_j(y_j) + \sum_{j=1}^{s} w_j \cdot d^{р}_j(y_j) + \sum_{j=1}^{e} w_j \cdot d^{и}_j(y_j). \quad (13)$$

Здесь $d_j^{\Theta}(y_j)$ — функция отклонения, заданная для j-го показателя в соответствии с критерием, сформулированным для этого показателя, $\Theta \in \{н, в, р, и\}$, а $y_j = f_j(x)$ – значение объекта $x \in X$ по j-му показателю. Верхние индексы сумм соответствуют количеству показателей с заданным типом ограничения, причем $l + u + s + e = n$, а n – общее количество показателей. Веса показателей удовлетворяют условию нормировки: $\sum_{j=1}^{k} w_j = 1$.

Для оценивания суммарного штрафа $d^*_{ш}(x)$ для объекта $x \in X$ в сомножителях первых двух сумм обобщающей функции отклонения (10) используются только соответствующие функции штрафов из формул (10-12), а для оценивания суммарной премии $d^*_{п}(x)$ – соответствующие функции штрафов из формул (7, 8). При этом используются только 2 первых члена выражения (13), так как только отклонения для ограничений «снизу» и «сверху» могут иметь ненулевые значения функции поощрения $d_{п}(y_j)$:

$$d^*_{п}(x_i) = \sum_{j=1}^{l} w_j \cdot d^{н}_{п,j}(x_i) + \sum_{j=1}^{u} w_j \cdot d^{в}_{п,j}(x_i). \tag{14}$$

Требованию минимизации отклонения от цели соответствует целевая функция: $d^*(x) \to \min$.

Рассмотрим типовые задачи упорядочения по функциям отклонения.

1. *Соответствие норме.* Объект x удовлетворяет всем ограничениям, если $d^*_{ш}(x) = 0$, что соответствует решению задачи *отбора* или положительному результату *контроля.*

2. *Отклонение от цели.*

a. *Средневзвешенное отклонение*. Вычисляется по формуле (13) с сомножителями в первых двух суммах, вычисляемых по формулам (10) и (11) – и по штрафам, и по премиям (алгебраические суммы первых двух членов формулы).

b. *Лучший из худших*. Отклонение вычисляется по формуле:

$$d^*_{ммх}(x_i) = \min_{i=1,N} \max_{j=1,n} (d_j^{\Theta}(y_j)). \tag{15}$$

3. *Упорядочение*

a. *По штрафам. Общий штраф* вычисляется по формуле (13) с сомножителями в первых двух суммах, в которых используются только штрафы из формул (10-12) – отклонение *только по штра-*

фам, $d^{*}_{ш}(x) \to \min$.

b. *По премиям. Общая премия* вычисляется по формуле (14) с сомножителями в первых двух суммах, вычисляемых по премиям из формул (10, 11) – отклонение *только по премиям*, $d^{*}_{п}(x) \to \min$.

Упорядочение по штрафам и премиям можно использовать для реализации метода ДИЦ, если цель c_j ставить на границах шкал ($c_j = y_{j,\min}$ для $y_j \ge c_j$) и ($c_j = y_{j,\max}$ для $y_j \le c_j$) для штрафов и на противоположных границах – для премий.

7. Методы функционального выбора. Применим рассмотренные выше свойства ОцФ для систематизации использующих их методов. По отношению к форме задания предпочтения ЛПР разделим ОцФ на две группы: по заданию критерия или функции полезности. Первая группа характеризуется заданием целевого значения показателя – на границах или внутри его шкалы. По отношению к цели разделим первую группу на две подгруппы: по функции достижения цели (ДЦ) и функции отклонения от цели (ОЦ). В первую подгруппу входят методы (см. рис. 7):

1. Метод достижения идеальной цели (ДИЦ).
2. Метод достижения реальной цели (ДРЦ).
3. Плановый метод.

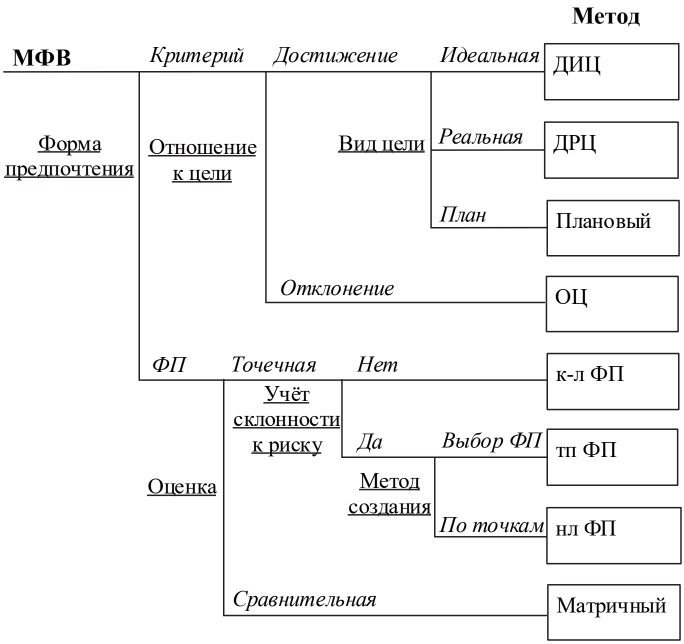


Рис. 7. Классификация методов ФВ

Модели предпочтений первых двух методов формируются путем задания целевых и ограничительных критериев соответственно. Плановый метод отличается от метода ДРЦ отображением значений показателей на шкалу [0%, 200%] с $s_j(c_{ji}) = 100\%$ и заданием *индивидуального* планового значения c_{ji} по j-му показателю для каждого i-го оцениваемого объекта, $i = \overline{1, N}$.

ОцФ, применяемые в методах достижения цели, подлежат максимизации. Значения обратных по форме функций отклонения от цели, наоборот, подлежат минимизации. По форме и знаку они дополнительны по отношению к функциям ДЦ и образуют *семейство методов*, использующих различные варианты функции отклонения от цели. Целевые значения показателей задаются в методах ДИЦ, ДРЦ и плановом методе. В методе ДИЦ целевое значение совпадает с одной из границ шкалы показателя. По отношению к цели методы достижения цели и отклонения от цели решают противоположные задачи и, следовательно, дополнительны друг к другу.

Вторую группу методов образуют методы теории многомерной полезности:

1. Метод с кусочно-линейной функцией полезности (к-л НП).
2. Метод с типовыми функциями полезности (тп ФП).
3. Метод с нелинейной функцией полезности (нл ФП).

Они различаются способами создания функций полезности. Функции полезности в методах 2 и 3 строятся с учетом склонности/несклонности ЛПР к риску. Модель предпочтений метода 2 проще модели метода 3 по построению, поскольку создание ФП показателя заменяется выбором типовой функции полезности. Однако усредненные значения нелинейности типовых функций требуют уточнений, выполняемых в процессе отладки [9].

Характеристики моделей предпочтений, используемых перечисленными методами, представлены в таблице 1.

Принцип дополнительности отклонения от полезности имеет место и для методов многомерной теории полезности по отношению ко всем точкам функций полезности. В расширенной трактовке полезности к методам, использующим функцию полезности, относится матричный метод [3]. Он использует для вычисления дискретной функции приоритетов матрицу парных сравнений. К значениям, вычисляемым на основе МПС, по умолчанию предъявляется требование максимизации. Эти значения используются и как весовые коэффициенты обобщающей функции, и как полезность сопоставляемых объектов.

Таблица 1. Характеристики моделей предпочтений рейтинговых методов

№ п/п	Число интервалов	Цель	Склонность к риску	Функция полезности	Метод оценивания
1	1	ИЦ	–	линейная	ДИЦ
2	2	РЦ	–	к-л с целью	ДРЦ
3	2	план	–	плановая	Плановый
4	>2	max	–	к-л ФП	к-л ФП
5	≥1	max	+	типовая	тп ФП
6	>2	max	+	нелинейная	нл ФП

Все методы, представленные на рисунке 7, были реализованы в системе выбора и ранжирования СВИРЬ, разработанной в Петербургском государственном университете путей сообщения [29]. Эта система допускает применение совместного задания предпочтений как в форме критериев, так и в форме функций полезности, получаемых различными способами. Пример комплексного применения методов при решении задачи выбора жилья был продемонстрирован в [30].

8. Методика обоснования вариантов использования методов ФВ. На выбор метода оценивания объектов влияет размерность решаемой задачи, пропорциональная числу объектов N и числу характеризующих их показателей n. Для определения границы ее сложности примем $N = n = 7$. Это число характеризует усредненную способность человека к умозрительному решению задач. Согласно формуле (1) трудоемкость решения такой задачи составит $Q = 147$ (≈ 150). Таким образом, при превышении этой величины целесообразно для оценивания объектов применять рейтинговые методы. Из рейтинговых методов в настоящей работе выделены методы функционального выбора, ориентированные на упорядочение объектов, характеризуемых неоднородными показателями.

Помимо размерности задачи на выбор метода ФВ влияет компетенция ЛПР в оцениваемой предметной области. Она проявляется в его способности задать целевое значение показателя и определить полезность на шкалах показателей на основе склонности/несклонности к риску [1]. Из этих соображений может быть предложен следующий подход к выбору метода ФВ для решения задачи упорядочения объектов высокой размерности.

1. Если ЛПР не обладает информацией о целевых значениях показателей или они не имеют значения в решаемой задаче, выбирается метод ДИЦ. Этот метод отражает «жадный» подход, заключающийся в желании достичь граничных значений всех показателей.

2. Если ЛПР может задать целевые значения показателей и их приемлемую полезность (от $>0{,}5$ до 1,0), выбирается метод ДРЦ. Этот

метод отражает рациональный подход к оцениванию объектов, заключающийся в формулировании разумных требований к показателям.

3. В случае несравнимости оцениваемых объектов по ресурсным показателям применяется плановый метод, как отображение метода ДРЦ на процентную шкалу [0%, 100%] с $s_j(c_{ji}) = 100\%$. Поскольку необходимо задать целевое значение c_{ji} для i-го оцениваемого объекта $i = \overline{1, N}$, трудоёмкость построения иерархической модели этого метода оценивается по формуле (3).

4. Если ЛПР способен задать приемлемую полезность для нескольких промежуточных точек на шкале показателя, выбирается метод с кусочно-линейной функцией полезности (к-л ФП).

5. Если ЛПР способен определить свою склонность/несклонность к риску на двух интервалах шкалы j-го показателя по обе стороны от целевого значения c_j, он выбирает одну из типовых функций метода тп ФП.

6. Если ЛПР способен определить свою склонность/несклонность к риску на нескольких интервалах шкалы показателя, выбирается метод с нелинейными ФП (нл ФП).

Из семейства методов отклонения от цели практический интерес представляют методы с явно выраженной целью, дополнительные по отношению к методам ДИЦ, ДРЦ и плановому методу.

При наличии интервальных целей $[c_{j,\text{н}}, c_{j,\text{в}}]$, $j = \overline{1, n}$, принадлежность фактических значений показателей заданным интервалам позволяет выполнить параметрический контроль оцениваемых объектов по принципу «годен/не годен». Практический интерес представляет также упорядочение объектов по невыполнению и перевыполнению заданного плана (цели). Для этой цели используются полуоси функции отклонений по штрафам и отклонениям. Эта задача имеет многочисленные применения, такие, как оценка результатов клинических анализов (например – крови) в медицине, параметрический контроль в технике, непрерывное наблюдение (мониторинг) за объектами любой природы и пр.

Подытоживая рекомендации, следует подчеркнуть, что в основу рекомендаций по применению рейтинговых методов положены компетенции ЛПР в оцениваемой предметной области. Более того, компетенции ЛПР могут быть различными в отношении разных свойств оцениваемого объекта. А это означает, что в рамках одной модели ММО ЛПР может применять различные оценочные функции для разных показателей в зависимости от степени исследования оцениваемого свойства объекта. В целом, чем более глубоким является знание предметной области и чем больше времени имеется для создания модели оценивания, тем большее доверие должны вызывать результаты оценивания. Другим способом повышения доверия к результатам является комплексное применение рейтинговых методов для решения поставленной задачи, что позволяет сравнивать результаты, полученные разными методами.

9. Пример. Рассмотрим следующий пример использования функций отклонения для задач параметрического контроля, решаемых в медицине. Одной из задач такого типа является задача проверки состояния здоровья пациента на основе результатов различных лабораторных исследований, например, клинического или биохимического анализа крови. Соответствие состояния пациента клинической норме задается набором референсных значений измеряемых показателей.

Под референсным значением показателя понимается медицинский термин, употребляемый при проведении и оценке лабораторных исследований, который определяется на основе *среднего* значения определенного лабораторного показателя, полученного в результате массовых обследований здорового населения.

Клинический анализ крови позволяет оценить содержание гемоглобина в системе красной крови, количество эритроцитов, цветовой показатель, количество лейкоцитов и тромбоцитов, рассмотреть лейкограмму и измерить скорость оседания эритроцитов (СОЭ). С помощью данного анализа можно выявить анемии, воспалительные процессы и так далее.

В упрощенном примере оценим отклонение состояния здоровья от клинической нормы для пяти условных пациентов по таким основным показателям, как количественное содержание кровяных телец в венозной крови, а также содержанию гемоглобина и СОЭ. Исходные данные приведены в таблице 2.

Таблица 2. Результаты клинического анализа крови пяти пациентов

Пациенты	Лейкоциты, 10^9 кл/л	Эритроциты, 10^12 кл/л	Гемоглобин, г/л	Гематокрит, %	Тромбоциты, 10^9 кл/л	Лимфоциты, %	СОЭ, мм/ч
Пациент 1	3,9	4,4	100	40	160	35	9,0
Пациент 2	4,2	5,0	36	42	152	26	7,0
Пациент 3	7,7	2,7	18	50	390	41	6,5
Пациент 4	9,4	5,3	120	27	100	30	8,0
Пациент 5	6,6	7,2	143	41	400	25	8,3
Референсные значения показателей крови							
	[4, 9]	[4,3, 5,5]	[20, 140]	[39, 49]	[150, 400]	[25, 40]	[0, 8]
Шкалы показателей							
	[0, 10]	[0, 10]	[0, 200]	[0, 100]	[0, 500]	[0, 100]	[0, 50]

В нижней части таблицы приведены референсные значения, соответствующие нормальному (здоровому) состоянию пациента, и шкалы показателей, указывающие на теоретически возможный разброс значений каждого из показателей.

Учитывая разные шкалы и единицы измерения показателей крови, вычислим относительные отклонения от нормы. С учетом того, что все требования заданы только интервальными нормами, для вычисления отклонений будем использовать функцию, представленную на рисунке 6б, и формулу (12) для нижней и верхней границ нормы. Отклонение от нормы $d(y_j) = 0$ отсутствует при соответствии норме $[c_{j,\text{н}}, c_{j,\text{в}}]$, заданной соответствующими референсными значениями.

Эксперимент 1. Оценим состояние здоровья пациентов по всем показателям, применив к частным отклонениям от нормы обобщающую функцию (15). Максимальное отклонение от нормы у каждого пациента помечено жирным шрифтом в таблице 3. Они дублированы в столбце $d^*_{\text{mm}}(x)$.

Таблица 3. Ранжирование пациентов по минимаксному отклонению от нормы

	$d(y_1)$	$d(y_2)$	$d(y_3)$	$d(y_4)$	$d(y_5)$	$d(y_6)$	$d(y_7)$	$d^*_{\text{mm}}(x)$	*Ранг*
Пациент 1	0,03	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,02	**0,03**	2
Пациент 2	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	**0,00**	1
Пациент 3	0,00	0,37	0,10	0,02	0,00	0,02	0,00	**0,37**	3
Пациент 4	0,40	0,00	0,00	0,31	0,33	0,00	0,00	**0,40**	5
Пациент 5	0,00	0,38	0,05	0,00	0,00	0,00	0,01	**0,38**	4

В последнем столбце таблицы 3 пациенты упорядочены в направлении увеличения максимальных отклонений от нормы. Соответствие норме по всем показателям обнаружено только у пациента 2. Достоинством применения обобщающей функции (15) является акцентирование внимания ЛПР на наихудшем показателе у каждого объекта.

Эксперимент 2. Оценим состояние здоровья пациентов по всем показателям, применив к частным отклонениям от нормы обобщающую функцию (13). С учетом того, что все требования заданы только интервальными нормами, в этой формуле используется только последняя сумма частных отклонений от нормы. В отсутствие экспертной информации о важности показателей для оценивания состояния здоровья пациентов, весовые коэффициенты всех показателей в формуле (13) приняты равными: $w_j = 1/7$, $j = 1, \ldots, 7$. Результаты оценивания приведены в таблице 4. Результаты упорядочения пациентов по минимаксной и усредняющей обобщающей функциям различаются в местах пациентов 3 и 5.

Таблица 4. Ранжирование пациентов по усредненному отклонению от нормы

	$d(y_1)$	$d(y_2)$	$d(y_3)$	$d(y_4)$	$d(y_5)$	$d(y_6)$	$d(y_7)$	$d^*(x)$	*Ранг*
Пациент 1	0,03	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,02	0,007	2
Пациент 2	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,000	1
Пациент 3	0,00	0,37	0,10	0,02	0,00	0,02	0,00	0,073	4
Пациент 4	0,40	0,00	0,00	0,31	0,33	0,00	0,00	0,149	5
Пациент 5	0,00	0,38	0,05	0,00	0,00	0,00	0,01	0,062	3

Небольшое различие в полученных рейтингах пациентов позволяет в принципе согласиться с утверждением автора [4] о приемлемости замены обобщающих функций с весовыми коэффициентами минимаксной обобщающей функцией. Однако исключение из рассмотрения показателей, у которых отклонения от нормы не максимальны, влияет на обобщенную оценку их здоровья. Это тем более следует учитывать при диагностике болезни, зависящей от разной важности показателей.

Эксперимент 3. Упорядочим пациентов по степени сопротивляемости организма инфекциям. Из принятых для экспериментов показателей для определения иммунитета организма к инфекциям врач обращает внимание прежде всего на соответствие нормам лейкоцитов и лимфоцитов. Назначим весовые коэффициенты для них соответственно $w_1 = 0{,}5$ и $w_6 = 0{,}4$, оставив весовые коэффициенты прочих факторов равными, $w_j = 0{,}02$.

Результаты упорядочения пациентов по состоянию их иммунитета с применением средневзвешенных оценок, вычисленных по формуле (13), приведено в таблице 5.

При указанных условиях пациент 5 переместился с третьего на второе место, а пациент 1 – со второго на третье в силу того, что у пациента 1 большее отклонение от нормы по наиболее важному фактору «уровень лейкоцитов», а у пациента 5, несмотря на наличие отклонений от нормы по менее важным факторам, наблюдается нулевое отклонение от нормы по обоим наиболее важным факторам.

Таблица 5. Ранжирование пациентов по средневзвешенному отклонению от нормы

	$d(y_1)$	$d(y_2)$	$d(y_3)$	$d(y_4)$	$d(y_5)$	$d(y_6)$	$d(y_7)$	$d^*(x)$	*Ранг*
Пациент 1	0,03	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,02	0,013	3
Пациент 2	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,000	1
Пациент 3	0,00	0,37	0,10	0,02	0,00	0,02	0,00	0,017	4
Пациент 4	0,40	0,00	0,00	0,31	0,33	0,00	0,00	0,213	5
Пациент 5	0,00	0,38	0,05	0,00	0,00	0,00	0,01	0,009	2

Рассмотрение этого примера показывает широкие возможности практического применения методов отклонения от цели в отличие от утверждений автора работы [4]. Во-первых, методы отклонения от цели не ограничиваются применением отношения превосходства. Во-вторых, минимаксная обобщенная оценка не исключает, а дополняет усредняющую и средневзвешенную обобщающие функции.

Таким образом, применение методов отклонения от цели расширяет диапазон задач, решаемых с применением методов многомерного оценивания объектов любой природы и назначения. При трактовке объектов временными интервалами с применением методов отклонения решается, в частности, задача идентификации аритмии.

10. Заключение. В основу систематизации методов многомерного оценивания положено понятие *цели*, присущее как формальной модели критерия, так и оценивающим функциям показателей. Из многообразия методов ММО для систематизации выделены рейтинговые методы, использующие для упорядочения объектов частные и обобщенные ОцФ показателей.

Показано соотношение методов достижения цели и отклонения от цели для отношений превосходства и соответствия. Отмечена особенность функций отклонения от реальной цели с областью значений [–1, 1], которая позволяет выполнять как совместное, так и раздельное упорядочение объектов по штрафам и поощрениям.

Сходство ОцФ по областям определения и значений дало основание для систематизации рейтинговых методов ММО относительно разновидностей и способов задания целевых значений показателей. Линейная нормирующая функция критерия признана за частный случай нелинейной функции ценности, а функция ценности — за частный случай функции полезности. Показано влияние степени склонности/не склонности ЛПР к риску на нелинейность ОцФ. Предложены общие рекомендации по выбору рейтинговых методов относительно трудоемкости создания модели ММО. На конкретном примере показана правомерность применения наряду с минимаксным способом обобщения частных функций отклонения от цели усредняющей и средневзвешенной обобщающих функций. Показано, что варьирование весовыми коэффициентами средневзвешенной обобщающей функции расширяет спектр задач, решаемых с применением функций отклонения от цели.

Авторы выражают благодарность д.т.н., профессору Б. В. Соколову за поддержку исследований и полезные советы, данные при подготовке работы к публикации.

Литература

1. *Neumann J.V., Morgenstern O.* Theory of Games and Economic Behavior // Princeton University Press. 1953. 586 p.
2. *Keeney R.L., Raiffa H.* Decisions with Multiple Objectives: Preferences and Value Tradeoffs // Wiley. 1976. 452 p.
3. *Saaty T.L.* The Analytic Hierarchy Process: Planning, Priority Setting, Resources Allocation // Mcgraw-Hill. 1980. 586 p.

4. *Wierzbicki A.P.* The Use of Reference Objectives in Multiobjective Optimization // Multiple Criteria Decision Making Theory and Application. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. 1980. vol. 177. pp. 468–486.
5. *Hwang S.L, Yoon K.* Multiple Attributes Decision Making Methods and Applications // Berlin Heidelberg. 1981. 269 p.
6. *Семенов С.С.* Оценка качества и технического уровня сложных систем: практика применения метода экспертных оценок // М.: Ленанд. 2015. 350 с.
7. *Abastante F. et al.* Choice architecture for architecture choices: evaluating social housing initiatives putting together a parsimonious AHP methodology and the Choquet integral // Land Use Policy. 2018. vol. 78. pp. 748–762.
8. *De Boni A., Roma R., Ottomano Palmisano G.* Fishery Policy in the European Union: A Multiple Criteria approach for assessing sustainable management of Coastal Development Plans in Southern Italy // Ocean and Coastal Management. 2018. vol. 163. pp. 11–21.
9. *Greco S., Ishizaka A., Matarazzo B., Torrisi G.* Stochastic multiattribute acceptability analysis: an application to the ranking of Italian regions // Regional Studies. 2018. vol. 52.n. 4. pp. 585–600.
10. *Бураков Н.А., Бухвальд Е.М., Кольчугина А.В.* Ранжирование субъектов российской федерации на основе регионального индекса экономического развития // Федерализм. 2019. № 3. С. 149–171.
11. *Ogryszak W. et al.* Large-scale periodic routing problems for supporting planning of mobile personnel tasks // Advances in Intelligent Systems and Computing. 2018. vol. 559. pp. 205–216.
12. *Vergara-Solana F., Araneda M., Ponce-Díaz G.* Opportunities for strengthening aquaculture industry through multicriteria decision-making // Reviews in Aquaculture. 2019. vol. 11. no. 1. pp. 105–118.
13. *Хабарова Д.С.* Обзор программных комплексов многокритериальной оптимизации // Прикладная информатика. 2013. № 2(44). С. 102–112.
14. *Velasquez M., Hester P.T.* An Analysis of Multi-Criteria Decision Making Methods // International Journal of Operations Research. 2013. vol. 10. no. 2. pp. 56–66.
15. *Микони С.В., Соколов Б.В., Юсупов Р.М.* Квалиметрия моделей и полимодельных комплексов // М.: РАН. 2018. 314 с.
16. *Saaty T.L.* The analytic hierarchy and analytic network measurement processes: Applications to decisions under Risk // European Journal of Pure and Applied Mathematics. 2008. vol. 1. no. 1. pp. 122–196.
17. *Roy B.* Classement et choix en présence de points de vue multiples (la méthode ELECTRE) // La Revue d'Informatique et de Recherche Opérationelle (RIRO). 1968. vol. 8. pp. 57–75.
18. *Brans J.P., Vincke P.* A preference ranking organisation method: The PROMETHEE method for MCDM // Management Science. 1985. vol. 31. no. 6. pp. 647–656.
19. *Ларичев О.И.* Вербальный анализ решений // М.: Наука. 2006. 181 с.
20. *Шакиров В.А., Панкратьев П.С.* Методика многокритериального двухуровневого анализа пунктов размещения электростанций // Искусственный интеллект и принятие решений. 2017. № 1. С. 69–83.
21. *Микони С.В.* Теория принятия управленческих решений // СПб.: Лань. 2015. 448 с.
22. *Bordley R., LiCalzi M.* Decision Analysis with Targets instead of Utilities // Decisions in Economics and Finance. 2000. vol. 23. no. 1. pp. 53–74.
23. *Mikoni S.V.* Method of choice by approximation to a pattern // Proceedings of the 4th International Conference NITE'2000. 2000. vol. 1. pp. 156–159.
24. *Перегудов Ф.И., Тарасенко Ф.П.* Основы системного анализа: Учеб. 2-е изд., доп. // НТЛ. 1997. 396 с.

25. *Микони С. В.* Аксиоматика методов многокритериальной оптимизации на конечном множестве альтернатив. // Труды СПИИРАН. 2016. Вып. 44. С. 198–214.
26. *Микони С.В., Бураков Д.П.* Отладка типовых одномерных функций полезности в модели многомерной полезности // Известия Петербургского университета путей сообщения. 2019. Т. 16(2). С. 131–144.
27. *Kosheleva O., Kreinovich V., Shahbazova S.* Type-2 Fuzzy Analysis Explains Ubiquity of Triangular and Trapezoid Membership Functions // Recent Developments and the New Direction in Soft-Computing Foundations and Applications. Studies in Fuzziness and Soft Computing. 2018. vol. 393. pp. 63–75.
28. *Gholamy A., Kosheleva O., Kreinovich V.* How to explain the efficiency of triangular and trapezoid membership functions in applications to design // Онтология проектирования. 2019. Т. 9. № 2(32). С. 253–260.
29. Сайт научной школы «Многокритериальный выбор на конечном множестве альтернатив». URL: http://mcd-svir.ru/ (дата обращения: 26.08.2020).
30. *Mikoni S.V.* Application of the Universal Decision Support System SVIR to Solving Urban Problems // Digital Transformation and Global Society. DTGS 2016. Communications in Computer and Information Science. 2016. vol. 674. 016. pp. 1–14.

Микони Станислав Витальевич – д-р техн. наук, профессор, ведущий научный сотрудник, лаборатория информационных технологий в системном анализе и моделировании, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Санкт-Петербургский Федеральный исследовательский центр Российской академии наук» (СПб ФИЦ РАН). Область научных интересов: системный анализ, принятие решений, интеллектуальные технологии. Число научных публикаций – 320. smikoni@mail.ru; 14-я линия В.О., 39, 199178, Санкт-Петербург, Россия; р.т.: +7 (812) 328-01-03.

Бураков Дмитрий Петрович – канд. техн. наук, старший научный сотрудник, лаборатория информационных технологий в системном анализе и моделировании, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Санкт-Петербургский Федеральный исследовательский центр Российской академии наук» (СПб ФИЦ РАН). Область научных интересов: системный анализ, теория принятия решений. Число научных публикаций – 35. burakovdmitry8@gmail.com; 14-я линия В.О., 39, 199178, Санкт-Петербург, Россия; р.т.: +7 (812) 328-0103.

Поддержка исследований. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 19-08-00989-а, № 20-08-01046) в рамках бюджетной темы № 0073–2019–0004.

DOI 10.15622/ia.2020.19.6.1

S. MIKONI, D. BURAKOV

JUSTIFICATION AND CLASSIFICATION OF EVALUATION FUNCTIONS USED IN RATING METHODS OF MULTI-CRITERIA CHOICE

Mikoni S., Burakov D. **Justification and Classification of Evaluation Functions used in Rating Methods of Multi-criteria Choice.**

Abstract. The recommendations on the application of methods of multidimensional estimation (MDE) of objects, proposed in the paper Velasquez M., Hester P.T. «An Analysis of Multi-Criteria Decision Making Methods», are analyzed. The weak substantiation of these recommendations, resulting from the superficial systematization of MDE methods, is noted. The recommendations are focused not on the classes of MDE methods, but on various areas of activity. However, in each area of activity there is a wide range of tasks for evaluating objects of various nature. In this regard, the urgency of a more thorough systematization of MDE methods is recognized.

Taking into account the diversity of MDE methods, it was decided to limit ourselves to the systematization of methods that use evaluation functions (EF), and on this basis to offer general recommendations for their application.

The review of MDE methods from a unified position required clarification of the terminology used in them. On the basis of the formal model of the criterion, the relationship between the concepts of "preference", "criterion" and "indicator" is established. To highlight the methods that use evaluation functions, the concept of the target value of the indicator is introduced. Regarding its location on the indicator scale, the concepts of ideal and real goals are introduced. The criteria corresponding to these goals are divided into target and restrictive ones. Using the proposed terminology, a review of the most well-known MDE methods was carried out. Of these, a group of methods using evaluation functions is distinguished.

Variants of evaluation functions created on the basis of the criterion and postulates of the theory of value and utility are considered. On the basis of the similarity of the domains of definition and the meanings of EFs, the relationship between them is established. Regarding the target value of the indicator, they are divided into the functions of achieving the goal and functions of deviation from the goal. The mutual complementarity of these functions is shown. A group of functions of deviation from the goal is highlighted, which allows us to order objects separately according to penalties and rewards in relation to achieving a real goal. The concept of norm is introduced for the correspondence relation. On the example of medical analyzes, the practical application of deviation functions from the norm is shown using both the minimax and the weighted average generalizing function to establish a rating on a set of objects.

The similarities and differences of the EFs revealed in the course of the study form the basis for the classification of the MDE methods that use them. The difference in EFs in terms of the complexity of creation is reflected in the proposed methodology for their application.

Keywords: Preference, Indicator, Criterion, Target Value, Evaluation Function, Value Function, Utility Function, Goal Achievement, Deviation from the Goal, Functional Choice, Multidimensional Evaluation of Objects, Rating Method

Mikoni Stanislav – Ph.D., Dr.Sci., Professor, Leading Researcher, Laboratory of Information Technologies in the System Analysis and Modeling, St.-Petersburg Federal Research Center of the Russian Academy of Sciences (SPb FRC RAS). Research interests: system analyses, decision making, intellect technologies. The number of publications – 320. smikoni@mail.ru; 39, 14-th Line V.O., 199178, St. Petersburg, Russia; office phone: +7 (812) 328-01-03.

Burakov Dmitry – Ph.D., Senior Researcher, Laboratory of Information Technologies in System Analysis and Modeling, St.-Petersburg Federal Research Center of the Russian Academy of Sciences (SPb FRC RAS). Research interests: system analysis, decision-making theory. The number of publications – 35. burakovdmitry8@gmail.com; 39, 14-th Line V.O., 199178, St. Petersburg, Russia; office phone: +7 (812) 328-0103.

Acknowledgements. This research is supported by RFBR (grants No 19–08–00989–a, No 20–08–01046) within the budgetary theme No 0073–2019–0004.

References

1. Neumann J.V., Morgenstern O. Theory of Games and Economic Behavior. Princeton University Press. 1953. 586 p.
2. Keeney R.L., Raiffa H. Decisions with Multiple Objectives: Preferences and Value Tradeoffs. Wiley. 1976. 452 p.
3. Saaty T.L. The Analytic Hierarchy Process: Planning, Priority Setting, Re-sources Allocation. Mcgraw-Hill. 1980. 586 p.
4. Wierzbicki A.P. The Use of Reference Objectives in Multiobjective Optimization. Multiple Criteria Decision Making Theory and Application. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. 1980. vol. 177. pp. 468–486.
5. Hwang S.L, Yoon K. Multiple Attributes Decision Making Methods and Applications. Berlin Heidelberg. 1981. 269 p.
6. Semenov S.S. *Ocenka kachestva i tekhnicheskogo urovnya slozhnyh sistem: praktika primeneniya metoda ekspertnyh ocenok* [Assessment of the quality and technical level of complex systems: the practice of applying the method of expert assessments]. M.: Lenand. 2015. 350 p. (In Russ.).
7. Abastante F. et al. Choice architecture for architecture choices: evaluating social housing initiatives putting together a parsimonious AHP methodology and the Choquet integral. *Land Use Policy*. 2018. vol. 78. pp. 748–762.
8. De Boni A., Roma R., Ottomano Palmisano G. Fishery Policy in the European Union: A Multiple Criteria approach for assessing sustainable management of Coastal Development Plans in Southern Italy. *Ocean and Coastal Management*. 2018. vol. 163. pp. 11–21.
9. Greco S., Ishizaka A., Matarazzo B., Torrisi G. Stochastic multiattribute accept-ability analysis: an application to the ranking of Italian regions. *Regional Studies*. 2018. vol. 52. no. 4. pp. 585–600.
10. Burakov N.A., Buhval'd E.M., Kol'chugina A.V. [Ranking of the subjects of the Russian Federation based on the regional index of economic development]. *Federalizm – Federalism*. 2019. vol. 3. pp. 149–171. (In Russ.).
11. Ogryszak W. et al. Large-scale periodic routing problems for supporting planning of mobile personnel tasks. *Advances in Intelligent Systems and Computing*. 2018. vol. 559. pp. 205–216.
12. Vergara-Solana F., Araneda M., Ponce-Díaz G. Opportunities for strengthening aquaculture industry through multicriteria decision-making. *Reviews in Aquaculture*. 2019. vol. 11. no. 1. pp. 105–118.
13. Habarova D.S. [Review of software packages for multicriteria optimization]. *Prikladnaya informatika – Applied Informatics*. 2013. vol. 2(44). pp. 102–112. (In Russ.).
14. Velasquez M., Hester P.T. An Analysis of Multi-Criteria Decision Making Methods. *International Journal of Operations Research*. 2013. vol. 10. no. 2. pp. 56–66.
15. Mikoni S.V., Sokolov B.V., Yusupov R.M. *Kvalimetriya modelej i polimodel'nyh kompleksov* [Qualimetry of models and polymodel complexes]. M.: RAN. 2018. 314 p. (In Russ.).
16. Saaty T.L. The analytic hierarchy and analytic network measurement processes: Ap-

plications to decisions under Risk. *European Journal of Pure and Applied Mathematics*. 2008. vol. 1. no. 1. pp. 122–196.
17. Roy B. Classement et choix en présence de points de vue multiples (la méthode ELECTRE). La Revue d'Informatique et de Recherche Opérationelle (RIRO). 1968. vol. 8. pp. 57–75.
18. Brans J.P., Vincke P. A preference ranking organisation method: The PROMETHEE method for MCDM. *Management Science*. 1985. vol. 31. no. 6. pp. 647–656.
19. Larichev O.I. *Verbal'nyj analiz reshenij* [Verbal decision analysis]. M.: Nauka. 2006. 181 p. (In Russ.).
20. Shakirov V.A., Pankrat'ev P.S. [Technique of multi-attribute two-level analysis of power plant sites]. *Iskusstvennyj intellekt i prinyatie reshenij – Artificial intelligence and decision making*. 2017. vol. 1. pp. 69–83. (In Russ.).
21. Mikoni S.V. *Teoriya prinyatiya upravlencheskih reshenij* [Management decision making theory]. SPb.: Lan'. 2015. 448 p. (In Russ.).
22. Bordley R., LiCalzi M. Decision Analysis with Targets instead of Utilities. *Decisions in Economics and Finance*. 2000. vol. 23. no. 1. pp. 53–74.
23. Mikoni S.V. Method of choice by approximation to a pattern. Proceedings of the 4th International Conference NITE'2000. 2000. vol. 1. pp. 156–159.
24. Peregudov F.I., Tarasenko F.P. *Osnovy sistemnogo analiza: Ucheb. 2-e izd., dop.* [Fundamentals of Systems Analysis: A Textbook. 2nd edition, revised.]. NTL. 1997. 396 p. (In Russ.).
25. Mikoni S.V. [Axioms of multicriteria optimization methods on a finite set of alternatives]. *Trudy SPIIRAN – SPIIRAS Proceedings*. 2016. vol. 1(44). pp. 198–214.
26. Mikoni S.V., Burakov D.P. [Setting up the typical one-dimensional utility functions in a multi-dimensional utility model]. *Izvestiya Peterburgskogo universiteta putej soobshcheniya – Proceedings of Petersburg Transport University*. 2019. Issue 16(2). pp. 131–144. (In Russ.).
27. Kosheleva O., Kreinovich V., Shahbazova S. Type-2 Fuzzy Analysis Explains Ubiquity of Triangular and Trapezoid Membership Functions. Recent Developments and the New Direction in Soft-Computing Foundations and Applications. Studies in Fuzziness and Soft Computing. 2018. vol. 393. pp. 63–75.
28. Gholamy A., Kosheleva O., Kreinovich V. How to explain the efficiency of triangular and trapezoid membership functions in applications to design. *Ontologiya proektirovaniya – Ontology of designing*. 2019. vol. 9. no. 2(32). pp. 253–260.
29. Sajt nauchnoj shkoly "Mnogokriterial'nyj vybor na konechnom mnozhestve al'ternativ" [Website of the scientific school "Multi-criteria choice on a finite set of alternatives"]. Available at: http://mcd-svir.ru/ (accessed: 26.08.2020). (In Russ.).
30. Mikoni S.V. Application of the Universal Decision Support System SVIR to Solving Urban Problems. Digital Transformation and Global Society. DTGS 2016. Communications in Computer and Information Science. 2016. vol. 674. pp. 1–14.