ВАРИАЦИОННЫЙ ПОДХОД К АДАПТИВНОМУ ОЦЕНИВАНИЮ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В. И. Миронов[1], Ю. В. Миронов[2]

Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН

СПИИРАН, 14-я линия ВО, д. 39, Санкт-Петербург, 199178

[1]<ipi@iias.spb.ru>, [2]<mironuv@yandex.ru>

УДК 629.191

Миронов В. И, Миронов Ю. В. **Вариационный подход к адаптивному оцениванию нелинейных динамических систем** // Труды СПИИРАН. Вып. 5. — СПб.: Наука, 2007.

Аннотация. *Рассматривается применение вариационного подхода для решения комплексных задач адаптивного оценивания параметров состояния нелинейных динамических систем по критерию максимального правдоподобия.* — Библ. 16 назв.

UDC 629.191

Mironov V. I., Mironov Y. V. **The variation approach towards adaptive estimation of non-linear dynamic systems** // SPIIRAS Proceedings. Issue 5. — SPb.: Nauka, 2007.

Abstract. *One considers the application of variation approach for solution of complex problems of adaptive estimation of non-linear dynamic systems meeting the criterion of maximum verisimilitude.* — Bibl. 16 items.

1. Введение

Решение задач статистического оценивания параметров состояния нелинейных динамических систем на практике часто приходится решать в условиях неопределенности в отношении некоторых параметров моделей измерений и статистических характеристик ошибок измерений [1–7, 12–16 и др.]. Такая ситуация, как правило, имеет место, например, в задачах определения параметров орбитального движения космических аппаратов по результатам траекторных измерений. Поэтому в процессе статистической обработки выборочных данных необходимо предусматривать возможность определения указанных параметров.

Вместе с тем ставить и решать задачу уточнения всех характеристик ошибок измерений не всегда желательно и возможно. С одной стороны, расширение состава и размерности подлежащих оценке векторов приводит к существенному усложнению вычислительных процессов и к возможному появлению нежелательных особенностей при их реализации. Кроме того, объем и точность измерений должны при этом удовлетворять определенным требованиям с позиций наблюдаемости и обусловленности вычислений. С другой стороны, многие важные и сложные задачи не требуют существенного расширения состава рассматриваемых характеристик и успешно решаются при определении лишь одного параметра – среднеквадратического отклонения единицы веса измерений [1, 3, 5, 7 и др.]. Эта величина является параметром адаптации процесса навигационного оценивания по результатам траекторных измерений. Он играет важную роль при отбраковке аномальных измерений и в вопросах оценки точности навигационных определений.

В более общей постановке необходимо предусматривать определение некоторого вектора параметров моделей ошибок измерений в рамках задачи комплексного оценивания параметров состояния нелинейных динамических систем. Задачи такого рода достаточно сложны и имеют широкое распространение на практике.

Принятая в указанных выше работах методология базируется на непосредственном применении в динамических задачах оценивания условий метода максимального правдоподобия (ММП). По смыслу они представляют собой необходимые условия оптимальности, характерные для прямых методов оптимизации.

В работах [8–11] предложен новый вариационный подход к задачам статистического оценивания нелинейных динамических систем. Проведенный в этих работах анализ особенностей вычислительных процессов оптимального оценивания, связанных с применением каждого из рассматриваемых подходов, позволяет сделать вывод о наличии определенных вычислительных преимуществ вариационного варианта ММП по сравнению с прямым вариантом его применения. Это объясняется, прежде всего, тем, что при его численной реализации исключается необходимость вычисления матриц частных производных от измеряемых по оцениваемым параметрам.

Данная статья посвящена вопросам применения указанного вариационного подхода к решению комплексных задач адаптивного оценивания нелинейных динамических систем. При этом определяются необходимые условия оптимальности адаптивных оценок вариационного типа применительно к моделям дискретных измерений для класса унимодальных законов распределения ошибок измерений, а также дается их конкретизация применительно к определению среднеквадратического отклонения единицы веса измерений в рамках многомерного нормального закона распределения ошибок измерений.

2. Постановка задачи

Достаточно общая задача оценивания параметров движения динамического объекта заключается в наилучшем в некотором смысле определении n-мерного вектора его исходного состояния $\bar{x}_0$ на заданный начальный момент времени $t = t_0$ по результатам измерений, проводимых в N точках t_i, заданных на интервале измерений $\tau = T - t_0$. В более широкой постановке одновременно требуется также оценить некоторый l-мерный вектор $\bar{c}$ параметров модели движения, а также p-мерный вектор $\bar{c}_1$ параметров модели измерений и m-мерный вектор $\bar{c}_2$ параметров модели ошибок измерений.

Определение векторов $\bar{c}_1$ и $\bar{c}_2$ обеспечивает адаптацию процесса оценивания параметров состояния динамической системы в условиях их статистической неопределенности.

В соответствии с этим, в качестве базовой рассмотрим следующую нелинейную задачу оптимального оценивания.

Задача 1. Пусть динамика объекта описывается векторным дифференциальным уравнением

$$\dot{\bar{x}} = \bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{c}, t), \quad \bar{x}(t_0) = \bar{x}_0, \quad t \in [t_0, T]. \tag{1}$$

Измерениям подвергается m-мерный вектор

$$\bar{\psi}(t) = \bar{\psi}[\bar{x}(t), \bar{c}_1].$$

Измеренное значение вектора $\bar{\psi}$ в момент t_i обозначим, как $\bar{y}(t_i) = \bar{y}_i$ и представим модель измерений в виде

$$\bar{y}(t_i) = \bar{\psi}[\bar{x}(t_i), \bar{c}_1] + \bar{\delta}_i; \tag{2}$$

$$i = \overline{1, N}; \quad t_i \in [t_0, T].$$

Здесь $\bar{\delta}_i$ — m-мерный вектор случайных ошибок измерений, стохастическое изменение которого зададим некоторым многомерным непрерывным дифференцируемым распределением $f(\bar{\delta}_i, \bar{\alpha}_i, \bar{c}_2)$ с параметрами $\bar{\alpha}_i, \bar{c}_2$, отличающемся в общем случае от нормального распределения.

Требуется найти такие оценки векторов $\bar{x}_0$, $\bar{c}$, $\bar{c}_1$ и $\bar{c}_2$, которые обеспечивают минимальное значение функционала

$$I = \sum_{i=1}^{N} \rho_i \{\bar{y}(t_i), \bar{\psi}[\bar{x}(t_i), \bar{c}_1], \bar{\alpha}_\mathrm{i}, \bar{c}_2\}, \tag{3}$$

где

$$\rho_i = \ln f_i \{\bar{y}(t_i) - \bar{\psi}[\bar{x}(t_i), \bar{c}_1], \bar{\alpha}_i, \bar{c}_2\}; \tag{4}$$

$$i = \overline{1, N}.$$

Функции $\bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{c}, t)$ и $\bar{\psi}[\bar{x}(t_i), \bar{c}_1]$ будем считать однозначными, ограниченными, непрерывными и дифференцируемыми по всем своим аргументам во всей области их определения.

Нетрудно видеть, что функционал (3) есть не что иное, как логарифмическая функция правдоподобия.

Предполагается выполнение известных условий наблюдаемости.

3. Вариационные условия оптимальности оценок

Для решения поставленной задачи представим функционал (3) в эквивалентной интегральной форме. Для этого введем функцию

$$\rho\{\bar{y}(t), \bar{\psi}[\bar{x}(t), \bar{c}_1], \bar{\alpha}(t), \bar{c}_2\} = \ln f\{\bar{y}(t) - \bar{\psi}[\bar{x}(t), \bar{c}_1], \bar{\alpha}(t), \bar{c}_2\}, \tag{5}$$

где $\bar{y}(t)$ и $\bar{\alpha}(t)$ — произвольные непрерывные дифференцируемые вектор-функции, принимающие в моменты t_i, соответственно, значения $\bar{y}_i$ и $\bar{\alpha}_i$ (например, полиномы Лагранжа).

Тогда для функционала (3) получим выражение

$$I = \int_{t_0}^{T} \rho\{\bar{y}(t), \bar{\psi}[\bar{x}(t), \bar{c}_1, \bar{c}_2]\} \sum_{i=1}^{N} \delta(t - t_i) dt, \tag{6}$$

где $\delta(t - t_i)$ — импульсная дельта-функция.

Расширим затем пространство состояний путем введения дополнительных векторов $\bar{x}_1(t) = \bar{c}$, $\bar{x}_2(t) = \bar{c}_1$, $\bar{x}_2(t) = \bar{c}_2$ и систем

$$\dot{\bar{x}}_1(t) = \bar{\varphi}_{x_1}(\bar{x}_1, t) \equiv 0; \quad \dot{\bar{x}}_2(t) = \bar{\varphi}_{x_2}(\bar{x}_2, t) \equiv 0; \quad \dot{\bar{x}}_3(t) = \bar{\varphi}_{x_3}(\bar{x}_3, t) \equiv 0; \tag{7}$$

$$\bar{x}_1(t_0) = \bar{c}; \quad \bar{x}_2(t_0) = \bar{c}_1; \quad \bar{x}_3(t_0) = \bar{c}_2.$$

Применяя далее стандартную процедуру вариационного исчисления, по аналогии с [7] приходим к следующему утверждению.

***Теорема* 1.** Оптимальные оценки векторов $\bar{x}_0, \bar{c}, \bar{c}_1, \bar{c}_2$ и порождаемая ими оптимальная траектория доставляют решение краевой задаче для следующей системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{c}, t); \\ \dot{\bar{\lambda}} = -\dfrac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{x}}^T \bar{\lambda} + \dfrac{\partial \rho}{\partial \bar{x}} [\bar{y}, \bar{\psi}(\bar{x}, \bar{c}_1, \bar{c}_2), t] \sum\limits_{i=1}^{n} \delta(t - t_i); \\ \dot{\bar{\mu}}_c = -\dfrac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{c}}^T (\bar{x}, \bar{c}, t) \bar{\lambda}; \\ \dot{\bar{\mu}}_{c_1} = \dfrac{\partial \rho}{\partial \bar{c}_1} [\bar{y}, \bar{\psi}(\bar{x}), \bar{c}_1, \bar{c}_2, t] \sum\limits_{i=1}^{n} \delta(t - t_i); \\ \dot{\bar{\mu}}_{c_2} = \dfrac{\partial \rho}{\partial \bar{c}_2} [\bar{y}, \bar{\psi}(\bar{x}), \bar{c}_1, \bar{c}_2, t] \sum\limits_{i=1}^{n} \delta(t - t_i), \end{cases} \tag{8}$$

при граничных условиях

$$\bar{\lambda}(t_0) = \bar{\lambda}(T) = 0; \qquad \bar{\mu}_c(t_0) = \bar{\mu}_c(T) = 0;$$
$$\bar{\mu}_{c_1}(t_0) = \bar{\mu}_{c_1}(T) = 0; \qquad \bar{\mu}_{c_2}(t_0) = \bar{\mu}_{c_2}(T) = 0.$$

Эта краевая задача выражает необходимые условия оптимальности вариационного типа метода максимального правдоподобия при комплексном оценивании нелинейной динамической системы.

Отметим особенность интегрирования сопряженной системы, которая определяется наличием в правых частях дифференциальных уравнений импульсных дельта-функций. Это вызывает в моменты t_i скачкообразное изменение соответствующих сопряженных переменных на величину производной от критериальной функции ρ по вектору текущего состояния динамического процесса

$$\bar{\lambda}(t_i^+) = \bar{\lambda}(t_i^-) + \Delta\bar{\lambda}(t_i); \tag{9}$$
$$\bar{\mu}_{c_1}(t_i^+) = \bar{\mu}_{c_1}(t_i^-) + \Delta\bar{\mu}_{c_1}(t_i);$$
$$\bar{\mu}_{c_2}(t_i^+) = \bar{\mu}_{c_2}(t_i^-) + \Delta\bar{\mu}_{c_2}(t_i),$$

где

$$\Delta\bar{\lambda}(t_i) = \frac{\partial \rho}{\partial \bar{z}} \{\bar{y}_i, \bar{\psi}[\bar{z}(t_i), \bar{c}_1, \bar{c}_2]\};$$
$$\Delta\bar{\mu}_{c_1}(t_i) = \frac{\partial \rho}{\partial \bar{c}_1} [\bar{y}_i, \bar{\psi}(\bar{x}_i, \bar{c}_1, \bar{c}_2), t_i];$$
$$\Delta\bar{\mu}_{c_2}(t_i) = \frac{\partial \rho}{\partial \bar{c}_2} [\bar{y}_i, \bar{\psi}(\bar{x}_i, \bar{c}_1, \bar{c}_2), t_i]; \qquad i = \overline{1, N}.$$

С учетом скачков сопряженных переменных теорему 1 можно переформулировать в следующем эквивалентном виде.

***Теорема* 2.** Оптимальные оценки векторов $\bar{x}_0, \bar{c}, \bar{c}_1, \bar{c}_2$ и порождаемая ими оптимальная траектория доставляют решение краевой задаче для следующей системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \bar{\varphi}(\bar{x},\bar{c},t); \\ \dot{\bar{\lambda}} = -\dfrac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\bar{x}}^{T}\bar{\lambda}; \\ \dot{\bar{\mu}}_c = -\dfrac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\bar{c}}^{T}(\bar{x},\bar{c},t)\bar{\lambda}; \\ \dot{\bar{\mu}}_{c_1} = 0; \\ \dot{\bar{\mu}}_{c_2} = 0, \end{cases} \tag{10}$$

при граничных условиях

$$\begin{gathered} \bar{\lambda}(t_0) = \bar{\lambda}(T) = 0;\ \bar{\mu}_c(t_0) = \bar{\mu}_c(T) = 0; \\ \bar{\mu}_{c_1}(t_0) = \bar{\mu}_{c_1}(T) = 0;\ \bar{\mu}_{c_2}(t_0) = \bar{\mu}_{c_2}(T) = 0; \\ \bar{\lambda}(t_i^+) = \bar{\lambda}(t_i^-) + \frac{\partial\rho}{\partial\bar{x}}[\bar{y}_i,\bar{\psi}(\bar{x}_i,\bar{c}_1,\bar{c}_2),t_i]; \\ \bar{\mu}_{c_1}(t_i^+) = \bar{\mu}_{c_1}(t_i^-) + \frac{\partial\rho}{\partial\bar{c}_1}[\bar{y}_i,\bar{\psi}(\bar{x}_i,\bar{c}_1,\bar{c}_2),t_i]; \\ \bar{\mu}_{c_2}(t_i^+) = \bar{\mu}_{c_2}(t_i^-) + \frac{\partial\rho}{\partial\bar{c}_2}[\bar{y}_i,\bar{\psi}(\bar{x}_i,\bar{c}_1,\bar{c}_2),t_i]. \end{gathered} \tag{11}$$

В этих выражениях функция $\rho[\cdot]$ является логарифмической функцией правдоподобия (4).

Приведенные выше условия оптимального оценивания нетрудно конкретизировать применительно к заданному виду распределения вектора случайных ошибок измерений.

4. Определение и учет среднеквадратического отклонения единицы веса измерений

В качестве примера рассмотрим особенности применения полученных в п.2 обобщенных вариационных условий адаптивного оценивания для определения и учета среднеквадратического отклонения (СКО) единицы веса измерений σ_0 при комплексной оценке параметров состояния динамической системы. При этом будем считать, что постановка общей задачи оценивания соответствует условиям задачи 1, в которой векторы ошибок измерений $\bar{\delta}_i$ задаются многомерными нормальными распределениями, имеющими нулевые векторы математических ожиданий и корреляционные матрицы $\sigma_0 K_{\bar{\delta}_i}$, так что

$$f(\bar{\delta}_i,\sigma_0) = (2\pi\sigma_0^2)^{-\frac{m}{2}}\left|K_{\bar{\delta}_i}^{-1}\right|^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_0^2}\bar{\delta}_i^{\,T}K_{\bar{\delta}_i}^{-1}\bar{\delta}_i\right\}.$$

Отсюда при проведении N измерений следует функция правдоподобия

$$L(\bar{y},\bar{x}_0,\bar{c},\sigma_0) = (2\pi\sigma_0^2)^{-\frac{mN}{2}}\prod_{i=1}^{N}\left|K_{\bar{\delta}_i}^{-1}\right|^{-\frac{1}{2}}\times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{N}\left(\bar{y}_i - \bar{\psi}[\bar{x}(t_i),\bar{c}_1]\right)^T K_{\bar{\delta}_i}^{-1}\left(\bar{y}_i - \bar{\psi}[\bar{x}(t_i),\bar{c}_1]\right)\right\}.$$

Логарифм функции L имеет вид

$$\ln L = -\frac{mN}{2}\ln(2\pi\sigma_0^2) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\left|K_{\bar{\delta}_i}^{-1}\right| -$$

$$-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{N}\left(\bar{y}_i - \bar{\psi}[\bar{x}(t_i)]\right)^T K_{\bar{\delta}_i}^{-1}\left(\bar{y}_i - \bar{\psi}[\bar{x}(t_i)]\right).$$

Из этого выражения видно, что при любом заданном значении σ_0^2 максимум L достигается при таком выборе векторов $\bar{x}_0$, $\bar{c}$ и $\bar{c}_1$, которым соответствует минимум положительно определенной формы

$$S(\bar{x}_0,\bar{c},\sigma_0) = -\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{N}\left(\bar{y}_i - \bar{\psi}[\bar{x}(t_i)]\right)^T K_{\bar{\delta}_i}^{-1}\left(\bar{y}_i - \bar{\psi}[\bar{x}(t_i)]\right).$$

В свою очередь оптимальное значение параметров σ_0^2 можно найти из условия

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma_0^2} = -\frac{mN}{2\sigma_0^2} + \frac{1}{2\sigma_0^4}\sum_{i=1}^{N}\left(\bar{y}_i - \bar{\psi}[\bar{x}(t_i)]\right)^T K_{\bar{\delta}_i}^{-1}\left(\bar{y}_i - \bar{\psi}[\bar{x}(t_i)]\right) = 0 . \qquad (12)$$

На основании изложенного можно заключить, что в данном случае задача совместного оценивания начального вектора $\bar{x}_0$ параметров модели движения $\bar{c}$, модели измерений $\bar{c}_1$ и дисперсии эталонного измерения σ_0^2 сводится к решению следующей двухточечной краевой задачи

$$\dot{\bar{x}} = \bar{\varphi}(\bar{x},\bar{c},t); \qquad \dot{\bar{\lambda}} = -\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\bar{x}}^T\bar{\lambda};$$

$$\dot{\bar{\mu}}_c = -\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\bar{c}}^T\bar{\lambda}; \qquad \dot{\bar{\mu}}_{c_1} = 0; \qquad \dot{\bar{\mu}}_{\sigma_0} = 0;$$

с граничными условиями

$$\bar{\lambda}(t_0) = \bar{\lambda}(T) = 0; \quad \bar{\mu}_c(t_0) = \bar{\mu}_c(T) = 0; \quad \bar{\mu}_{c_1}(t_0) = \bar{\mu}_{c_1}(T) = 0;$$

$$\bar{\mu}_{\sigma_0}(t_0) = -\frac{mN}{2\sigma_0^2}; \qquad \bar{\mu}_{\sigma_0}(T) = 0,$$

при

$$\bar{\lambda}(t_i^+) = \bar{\lambda}(t_i^-) + \frac{1}{2\sigma_0^2}\frac{\partial\bar{\psi}^T(t_i)}{\partial\bar{x}_i}K_{\delta_i}^{-1}\left\{\bar{y}_i - \bar{\psi}[\bar{x}(t_i),\bar{c}_1]\right\};$$

$$\bar{\mu}_{c_1}(t_i^+) = \bar{\mu}_{c_1}(t_i^-) + \frac{1}{2\sigma_0^2}\frac{\partial\bar{\psi}^T(t_i)}{\partial\bar{c}_1}K_{\delta_i}^{-1}\left\{\bar{y}_i - \bar{\psi}[\bar{x}(t_i),\bar{c}_1]\right\};$$

$$\bar{\mu}_{\sigma_0}(t_i^+) = \bar{\mu}_{\sigma_0}(t_i^-) + \frac{1}{2\sigma_0^4}K_{\delta_i}^{-1}\left\{\bar{y}_i - \bar{\psi}[\bar{x}(t_i),\bar{c}_1]\right\}; \qquad i = \overline{1,N}.$$

В общем случае эта задача должна решаться совместно. Вместе с тем, анализ показывает, что данная система условий оптимальности по параметру σ_0^2 соответствует уравнению (12). Оно позволяет явно выразить значения σ_0^2 в зависимости от других элементов задачи оценивания

$$\sigma_0^2 = -\frac{1}{mN}\sum_{i=1}^{N}[\bar{y}_i - \bar{\psi}(\bar{x}_i, \bar{c}_1)]^T K_{\delta_i}^{-1}[\bar{y}_i - \bar{\psi}(\bar{x}_i, \bar{c}_1)]. \quad (13)$$

Это дает возможность реализовать процедуру решения краевой задачи по двухэтапной схеме. Согласно этой процедуре, на каждой конкретной итерации для фиксированного значения $\sigma_{0_k}^2$ решается усеченная задача по определению векторов $\bar{x}_{0s+1}$, $\bar{c}_{s+1}$ и $\bar{c}_{1_{s+1}}$ (s — номер итерации)

$$\dot{\bar{x}} = \bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{c}, t); \qquad \dot{\bar{\lambda}} = -\frac{\partial \bar{\varphi}^T}{\partial \bar{x}}\bar{\lambda};$$

$$\dot{\bar{\mu}}_c = -\frac{\partial \bar{\varphi}^T}{\partial \bar{c}}\bar{\lambda}; \qquad \dot{\bar{\mu}}_{c_1} = 0;$$

с граничными и промежуточными условиями

$$\bar{\lambda}(t_0) = \bar{\lambda}(T) = 0\,; \qquad \bar{\mu}_c(t_0) = \bar{\mu}_c(T) = 0\,;$$

$$\bar{\mu}_{c_1}(t_0) = \bar{\mu}_{c_1}(T) = 0\,;$$

$$\bar{\lambda}(t_i^+) = \bar{\lambda}(t_i^-) + \frac{1}{2\sigma_0^2}\frac{\partial \bar{\psi}^T(t_i)}{\partial \bar{x}_i} K_{\delta_i}^{-1}\{\bar{y}_i - \bar{\psi}[\bar{x}(t_i), \bar{c}_1]\};$$

$$\bar{\mu}_{c_1}(t_i^+) = \bar{\mu}_{c_1}(t_i^-) + \frac{1}{2\sigma_0^2}\frac{\partial \bar{\psi}^T(t_i)}{\partial \bar{c}_1} K_{\delta_i}^{-1}\{\bar{y}_i - \bar{\psi}[\bar{x}(t_i), \bar{c}_1]\};$$

$$i = \overline{1, N}\,.$$

После вычисления значений $\bar{x}_{0s+1}$, $\bar{c}_{s+1}$ и $\bar{c}_{1_{s+1}}$ дисперсия $\sigma_{0_{k+1}}^2$ находится согласно (13). Далее итерационный процесс повторяется. На первой итерации полагаем $\sigma_0^2 = 1$.

При малой выборке вместо (13) следует использовать выражение

$$\sigma_0^2 = -\frac{1}{mN-k}\sum_{i=1}^{N}[\bar{y}_i - \bar{\psi}(\bar{x}_i), \bar{c}_1]^T K_{\delta_i}^{-1}[\bar{y}_i - \bar{\psi}(\bar{x}_i), \bar{c}_1]\,,$$

где $k = n + l + p$ — общее число компонент оцениваемых векторов $\bar{x}_0, \bar{c}, \bar{c}_1$.

В заключении отметим, что предлагаемые методические средства могут быть использованы при разработке и модернизации алгоритмов оптимального статистического оценивания нелинейных динамических объектов различных типов в составе автоматизированных комплексов обработки наблюдений. Они могут также применяться для решения задач тестирования приближенных алгоритмов навигационного оценивания, для выбора эффективного состава и программы измерений. Статья подготовлена при поддержке РФФИ (Проект № 06-07-89242) и при финансовой поддержке за счет грантов Санкт-Петербурга в сфере научной и научно-технической деятельности.

Литература

1. *Аким Э. Л., Энеев Т. М.* Определение параметров движения космических аппаратов по данным траекторных измерений // Космические исследования. 1963. Т. 1, № 1. С. 5–50.
2. *Бажинов И. К., Алешин В. И., Почукаев В. Н., Поляков В. С.* Космическая навигация. М.: Машиностроение, 1975. 352 с.
3. *Брандин Н. К., Разоренов Г. Н.* Определение траекторий КА. М.: Машиностроение, 1978. 216 с.
4. *Егорова Н. Ю., Фарбер В. Е.* Анализ точностных характеристик и устойчивости нелинейных алгоритмов оценки параметров движения КА при наличии аномальных измерений // Космические исследования. 1994. Т. 32, № 4–5, С. 3–12.
5. Космические траекторные измерения / Под ред. Агаджанова П. А., Дулевича В. Е., Коростелева А. А. М.: Сов. радио, 1969. 504 с.
6. *Линник Ю. В.* Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений. М.: Физматгиз, 1958. 350 с.
7. *Ломако Г. И.* Экспериментальная баллистика космических аппаратов. СПб.: ВИККА им. А. Ф. Можайского, 1997. 454 с.
8. *Миронов В. И., Миронов Ю. В.* Вариационный вариант метода максимального правдоподобия в задачах статистического оценивания параметров состояния нелинейных динамических систем. СПб.: СПИИРАН, 2002. 70 с.
9. *Миронов В. И., Миронов Ю. В.* Вариационный метод максимального правдоподобия // Труды СПИИРАН. 2003. Вып. 1, т. 3. СПб.: СПИИРАН, 2003. С. 148–176.
10. *Миронов В. И., Миронов Ю. В.* Вариационный подход к статистическому оцениванию параметров орбитального движения космических аппаратов. СПб: ВИКУ им. А. Ф. Можайского, 2002. 166 с.
11. *Миронов В. И., Миронов Ю. В.* Вариационный подход к комплексному оцениванию параметров состояния нелинейных динамических систем // Труды СПИИРАН. 2005. Вып. 2, т. 2. СПб.: Наука, 2005. С. 298–307.
12. *Мудров В. И., Кушко В. П.* Методы обработки измерений. М.: Сов. радио, 1976. 190 с.
13. *Репин В. Г., Тартаковский Г. П.* Статистический синтез при априорной неопределенности и адаптация информационных систем. М.: Сов. радио, 1977. 432 с.
14. Статистические методы обработки результатов наблюдений / Под ред. Р. М. Юсупова. МО СССР, 1984. 563 с.
15. *Степанов М. Г.* Введение в теорию смещенного оценивания параметров движения космических аппаратов по ограниченным данным. СПб.: ВИККА им. А. Ф. Можайского, 1993. 135 с.
16. *Эльясберг П. Е.* Определение движения по результатам измерений. М.: Наука, 1976. 416 с.