МЕТОД УСЛОВНОГО ПОКАЗАТЕЛЯ В ЗАДАЧАХ СРАВНЕНИЯ СИСТЕМ

В. П. Иванов

Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН

СПИИРАН, 14-я линия ВО, д. 39, Санкт-Петербург, 199178

УДК 681.3

Иванов В. П. **Метод условного показателя в задачах сравнения систем** // Труды СПИИРАН. Вып. 3, т. 2. — СПб: СПИИРАН, 2006.

Аннотация. *В статье изложен метод условного показателя — метод нахождения коэффициентов линейной свертки показателя сравнения систем относительно некоторой условной единицы. Рассмотрен способ взаимного пересчета результатов при сравнении двух систем (групп объектов).* — Библ. 6 назв.

UDC 681.3

Ivanov V. P. **A Method of Comparative Indicators in System Comparison Problems** // SPIIRAS Proceedings. Issue 3, vol. 2. — SPb.: Nauka, 2006.

Abstract. *We present here a method of comparative indicators that is a method for computation of the linear convolition in comparison to the selected unit. We describe and then consider a way to mutual expression of results, calculated for a comparison of two systems (groups of objects).* — Bibl. 6 items.

1. Обоснование метода

Очень часто при выборе систем, при проектировании и выборе их вариантов и др. возникает задача сравнения систем (вариантов системы) в рамках заданного показателя сравнения.

В общем случае можно поставить указанную задачу следующим образом.

Пусть каждый j-тый вариант системы ($j = 1, 2, \ldots, n$) характеризуется вектором исходных характеристик $\mathbf{x}_j = (x_{j1}, \ldots, x_{jk})$, $k < n$. Введем вектор-функции $\varphi_j(\mathbf{x}_j) = (\varphi_{j1}(\mathbf{x}_j), \ldots, \varphi_{jm}(\mathbf{x}_j))$, $m < n$ и вектор весовых коэффициентов $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_m)$.

Используем в качестве показателя сравнения каждого j-того варианта линейную свертку вида:

$$J_j = \sum_{i=1}^{m} c_i \varphi_{ji}(x_j). \tag{1}$$

При такой постановке задачи весовые коэффициенты обычно определяются методами экспертных оценок, многоцелевой оптимизации, теорией квалиметрических шкал качества Н.В. Хованова и др. [1–4]. Возможен и иной подход — использование метода условного показателя. Его суть состоит в следующем.

Введем в рассмотрение некоторую отличную от нуля величину J_0 — условное значение показателя сравнения (условную единицу) о определим евклидову меру невязок:

$$r^2 = \sum_{j=1}^{n} (J_j - J_0)^2. \tag{2}$$

Труды СПИИРАН. 2006. Вып. 3. Т. 2. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2006. Issue 3. V. 2. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

Тогда весовые коэффициенты c_i, $i=1,...,m$ можно найти из условия минимизации r^2, для чего потребуем, чтобы

$$\frac{\partial r^2}{\partial c_i}=0, \quad i=1,\ldots,m. \tag{3}$$

Из этих необходимых условий следует выражение:

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} c_i \varphi_{ji}(x_j)-J_0\right)\varphi_{jk}(x_j)=0, \quad k=1,\ldots,m. \tag{4}$$

Изменяя порядок суммирования, после преобразований получим:

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}\varphi_{ji}(x_j)\,\varphi_{jk}(x_j)\right)c_i=n\,J_0\,\varphi_{0k}(x_j), \quad k=1,\ldots,m, \tag{5}$$

где $\varphi_{0k}(x_j)=\frac{\sum_{j=1}^{n}\varphi_{jk}(x_j)}{n}$ — среднеарифметическое значение функций $\varphi_{jk}(x_j)$.

Решая систему линейных уравнений (5), находим m неизвестных c_i, после чего для каждого из вариантов получаем конкретное значение линейной свертки (1).

Полученный набор коэффициентов c_i, $i=1,...,m$ может быть необязательно единственным. Если функции $\varphi_{ji}(x_j)$ линейно зависимы, то это означает существование коэффициентов $\gamma_1,...,\gamma_m$ (среди которых есть ненулевые), таких что $\sum_{i=1}^{m}\gamma_i\,\varphi_{ji}=0$. Тогда к коэффициентам c_i, $i=1,...,m$ можно прибавить любое кратное коэффициентов γ_i, $i=1,...,m$, не изменяя евклидову норму невязок. Из многих значений мы выбираем вектор c минимального модуля (т.е. без γ_i, $i=1,...,m$), который и будем в дальнейшем использовать.

Отметим, что особенность вычисления коэффициентов при неизвестных часто приводит к появлению большого числа обусловленности, поэтому ошибки исходной информации и ошибки округлений, внесенные в процессе решения уравнений, при использовании некоторых методов решения систем линейных уравнений (в частности, метода Гаусса) могут вызвать большую погрешность вычисления неизвестных c_i, $i=1,...,m$. Поэтому, для надежного вычисления коэффициентов c_i, $i=1,...,m$ рекомендуется применять метод сингулярного разложения.

Запишем систему линейных уравнений (5) в матричной форме [5, 6]:

$$\mathbf{P}\,\mathbf{c}=\mathbf{Q}, \tag{6}$$

где

Труды СПИИРАН. 2006. Вып. 3. Т. 2. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2006. Issue 3. V. 2. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

$$\mathbf{P} = \begin{vmatrix} P_{11}, \dots, P_{1m} \\ \dots\dots\dots\dots \\ P_{m1}, \dots, P_{mm} \end{vmatrix}, \ \mathbf{Q} = (q_1, \dots, q_m), \ P_{ki} = \sum_{j=1}^{n} \varphi_{ji}(\mathbf{x}_j)\, \varphi_{jk}(\mathbf{x}_j), \quad k, i = 1, \dots, m,$$

$$q_k = n\, J_0\, \varphi_{0k}(\mathbf{x}_j), \quad k = 1, \dots, m.$$

После сингулярного разложения матрица $\mathbf{P}$ запишется в виде: $\mathbf{P} = \mathbf{USV}^T$, где $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ — ортогональные матрицы со свойствами:

$$\mathbf{U}^T\mathbf{U} = \mathbf{UU}^T = \mathbf{V}^T\mathbf{V} = \mathbf{VV}^T = \mathbf{I},$$

$\mathbf{I}$ — единичная матрица, $\mathbf{S}$ — диагональная матрица.

Тогда систему уравнений (6) можно преобразовать к виду: $\mathbf{USV}^T\mathbf{c} = \mathbf{Q}$. Домножим уравнение на $\mathbf{U}^T$. Если обозначить $\mathbf{z} = \mathbf{V}^T\mathbf{c}$, $\mathbf{D} = \mathbf{U}^T\mathbf{Q} = (d_1, \dots, d_m)$, то система уравнений (6) преобразуется в следующую систему:

$$\mathbf{Sz} = \mathbf{D}. \tag{7}$$

Формально это означает, что система из m уравнений с m неизвестными $c_1, \dots, c_m$ преобразовалась к системе из m уравнений с одной неизвестной $z_1, \dots, z_m$. Компоненты вектора $\mathbf{z}$ найдем из соотношений:

$$z_i = \begin{cases} \dfrac{d_i}{\sigma_i}, & \text{если} \quad \sigma_i \neq 0, \\ 0, & \text{если} \quad \sigma_i = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Обратное преобразование $\mathbf{c} = \mathbf{Vz}$ решает задачу нахождения весовых коэффициентов.

Если теперь параметры каждой системы (объекта, варианта) домножить на соответствующее значение весового коэффициента, а затем сложить, то можно получить квалиметрическую шкалу качества, сформированной по данному показателю, и на ней решать задачи выбора наилучшего (наихудшего) варианта. Отметим, что при необходимости шкалу можно растянуть или преобразовать к другой системе отсчета.

Рассмотрим следующий иллюстрирующий пример.

Имеются 11 объектов, каждый из которых описывается определенным вектором состояний x_j. В качестве показателя сравнения примем линейную свертку вида $J_j = \sum_{i=1}^{4} c_i\, x_{ji}$. Таким образом, в рамках данного примера $\varphi_{ji} = x_{ji}$. Условное значение показателя сравнения J_0 примем равным единице. Требуется выбрать объект с максимальным значением J.

Исходные значения компонентов вектора состояния каждого объекта представлены в таблице 1.

После проведения вычислений с использованием сингулярного разложения получены следующие значения весовых коэффициентов c_i, $i = 1, \dots, 4$: 0.00524388, 12.81753887, -0.83767837, -0.13320216. Используя их, найдем условные показатели: $J_1 = 0.9200$, $J_2 = 0.9993$, $J_3 = 0.9659$, $J_4 = 1.0693$,

Труды СПИИРАН. 2006. Вып. 3. Т. 2. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2006. Issue 3. V. 2. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

$J_5 = 0.9754$, $J_6 = 0.9811$, $J_7 = 1.0166$, $J_8 = 1.0473$, $J_9 = 1.0018$, $J_{10} = 1.0079$, $J_{11} = 0.9996$.

Как видно из представленных результатов, четвертый объект имеет наибольшее значение показателя сравнения 1,0693. Поэтому в рамках заданного показателя сравнения объект с номером 4 можно считать наилучшим.

Таблица 1

Значения компонентов вектора состояния группы объектов

Номер объекта	x_{j1}	x_{j2}	x_{j3}	x_{j4}
1	131	0.02857	0.14286	0.1014
2	165	0.02157	0.15686	0.0823
3	127	0.03231	0.12308	0.0833
4	144	0.03537	0.15291	0.0833
5	112	0.03817	0.10753	0.0833
6	152	0.02473	0.14545	0.0833
7	129	0.03407	0.08889	0.1666
8	154	0.03030	0.16418	0.0833
9	146	0.02853	0.14139	0.0833
10	120	0.04132	0.13889	0.2600
11	120	0.03757	0.11834	0.0912

2. Пересчет результатов

Пусть имеется две группы объектов. Для сравнения в рамках заданного показателя их можно объединить в одну группу, найти значения весовых коэффициентов, после чего для каждого объекта найти значение показателя сравнения. В ряде случаев такой путь не всегда удобен, так как приходится работать с массивами данных увеличенной размерности.

Поэтому рассмотрим и иной подход.

Так как каждый показатель сравнения представляет собой линейную свертку вида (1), то для некоторого j-того объекта его можно представить в виде:

$$J_j = J_j(\varphi_{j1}, \ldots, \varphi_{jm}; J_0). \tag{9}$$

Определим линейный дифференциал функции:

$$dJ_j = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial J_j}{\partial \varphi_{ji}} d\varphi_{ji} + \frac{\partial J_j}{\partial J_0} dJ_0 .$$

Если обозначить верхними индексами 1 и 11 переменные, относящиеся, соответственно, к первой и второй группам объектов, то, заменяя дифференциал конечными разностями, получим:

$$J_j - J_0^1 = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial J_j}{\partial \varphi_{ji}} \left(\varphi_{ji} - \varphi_{0i}\right) + \frac{\partial J_j}{\partial J_0} (J_0^{11} - J_0^1). \tag{10}$$

Или:

Труды СПИИРАН. 2006. Вып. 3. Т. 2. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2006. Issue 3. V. 2. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

$$J_j = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial J_j}{\partial \varphi_{ji}} \varphi_{ji} + \left(J_0^1 + \frac{\partial J_j}{\partial J_0} (J_0^{11} - J_0^1) - \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial J_j}{\partial \varphi_{ji}} \varphi_{0i} \right). \quad (11)$$

Сопоставим выражения (1) и (11). Из сравнения следует, что для того, чтобы выражение (11) имело вид (1), необходимо, чтобы

$$c_i^1 = \frac{\partial J_j}{\partial \varphi_{ji}}, \quad (12)$$

$$J_0^1 + \frac{\partial J_j}{\partial J_0} (J_0^{11} - J_0^1) - \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial J_j}{\partial \varphi_{ji}} \varphi_{0i} = 0. \quad (13)$$

Так как весовые коэффициенты определялись из условия минимизации квадрата невязок, то можно положить $\frac{\partial J_j}{\partial J_0} \approx 1$. Тогда из выражения (13) получим:

$$J_0^{11} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial J_j}{\partial \varphi_{ji}} \varphi_{0i} = \sum_{i=1}^{m} c_i^1 \varphi_{0i}. \quad (14)$$

Из выражений (14) мы получим следующий алгоритм пересчета показателей сравнения одной группы объектов относительно другой:

1) Задаем значение условного показателя сравнения первой группы объектов J_0^1.

2) Определяем значения функций φ_0^1 и составляем систему уравнений (5) для первой группы объектов.

3) Решая линейную систему уравнений (5), находим значения весовых коэффициентов $c_1^1, \dots, c_m^1$ для первой группы объектов и, соответственно, $J_1^1, \dots, J_m^1$.

4) Используя выражение (14) и полученные значения, $c_1^1, \dots, c_m^1$; $\varphi_{01}^1, \dots, \varphi_{0m}^1$ для первой группы объектов, находим для второй группы объектов значение условного показателя.

5) Повторяя пункты 2, 3, но уже для второй группы объектов, находим для второй группы $J_1^{11}, \dots, J_m^{11}$. Их можно сравнивать и между собой, и со значениями первой группы.

Пример 2. К объектам из предыдущего примера, при использовании аналогичной линейной свертки добавим еще одну группу объектов, исходные значения вектора состояния которых представлены в таблице 2.

Используя вычисленные в первом примере весовые коэффициенты, получим для второй группы объектов $J_0^{11} = 1.0780$, а затем определим относительно этого значения показатели сравнения: $J_1^{11} = 1.2197$, $J_2^{11} = 0.9352$, $J_3^{11} = 1.0852$, $J_4^{11} = 1.1201$, $J_5^{11} = 1.1160$, $J_6^{11} = 1.1042$, $J_7^{11} = 1.0983$, $J_8^{11} = 1.0717$, $J_9^{11} = 1.0022$, $J_{10}^{11} = 1.0399$, $J_{11}^{11} = 1.0578$, $J_{12}^{11} = 1.1550$, $J_{13}^{11} = 1.2563$,

$J_{14}^{11} = 1.1770$, $J_{15}^{11} = 1.1371$, $J_{16}^{11} = 1.0254$, $J_{17}^{11} = 1.0073$, $J_{18}^{11} = 0.9515$,
$J_{19}^{11} = 1.1827$, $J_{20}^{11} = 1.1391$, $J_{21}^{11} = 1.0507$, $J_{22}^{11} = 1.1050$, $J_{23}^{11} = 1.1601$,
$J_{24}^{11} = 0.8917$, $J_{25}^{11} = 1.0732$, $J_{26}^{11} = 0.9624$, $J_{27}^{11} = 0.9625$, $J_{28}^{11} = 1.1594$,
$J_{29}^{11} = 1.0422$, $J_{30}^{11} = 0.9495$, $J_{31}^{11} = 1.0246$, $J_{32}^{11} = 1.2302$, $J_{33}^{11} = 1.0106$,
$J_{34}^{11} = 1.1488$.

Таблица 2

Значения компонентов вектора состояния второй группы объектов

Номер объекта	x_{j1}	x_{j2}	x_{j3}	x_{j4}
1	179	0.04252	0.14414	0.0792
2	140	0.02525	0.16393	0.1014
3	160	0.02264	0.22222	0.2017
4	183	0.02975	0.18182	0.0792
5	186	0.03064	0.15714	0.0792
6	170	0.02623	0.19366	0.1625
7	191	0.02405	0.20270	0.0792
8	160	0.03211	0.17544	0.0792
9	138	0.03313	0.10430	0.1625
10	164	0.02933	0.16296	0.0792
11	168	0.03160	0.14151	0.0792
12	194	0.02625	0.17045	0.1625
13	193	0.03308	0.20000	0.1583
14	190	0.02982	0.21053	0.0912
15	175	0.02759	0.16892	0.2017
16	158	0.02953	0.14953	0.1014
17	145	0.03087	0.15564	0.1014
18	170	0.01653	0.12397	0.2017
19	200	0.02800	0.20000	0.1014
20	175	0.02570	0.19399	0.2017
21	135	0.03960	0.14192	0.0792
22	173	0.02757	0.22430	0.0792
23	171	0.02742	0.23766	0.1583
24	130	0.02464	0.16427	0.0912
25	170	0.02731	0.19231	0.0960
26	152	0.02571	0.15238	0.0960
27	150	0.02697	0.14679	0.0912
28	190	0.02732	0.17760	0.1583
29	144	0.03537	0.15291	0.0833
30	165	0.02157	0.15686	0.0890
31	154	0.03030	0.16418	0.0833
32	160	0.04581	0.16779	0.0912
33	139	0.03125	0.17361	0.1014
34	175	0.02765	0.18059	0.2017

Полученные показатели сравнения сопоставимы с показателями сравнения первой группы и из них можно составить общую квалиметрическую шкалу качества.

Литература

1. *Хоменюк В.В*. Элементы теории многоцелевой оптимизации. М.: Наука, 1983. 124 с.
2. *Хованов Н.В.* Стохастические модели теории квалиметрических шкал. Л.: ЛГУ, 1986. 80 с.
3. *Хованов Н.В*. Математические основы теории измерения шкал качества. Л.: ЛГУ, 1982. 185 с.
4. *Трухаев Р.И.* Модели принятия решений в условиях неопределенности. М.: Наука, 1981. 257 с.
5. *Форсайт Д., Малькольм М., Моулер К.* Машинные методы математических вычислений. М.:, Мир, 1980. 279 с.
6. *Лоусон Ч., Хенсон Р*. Численное решение задач метода наименьших квадратов. М.: Наука, 1986. 230 с.