

КОМБИНИРОВАННЫЙ МЕТОД ОПТИМИЗАЦИИ УПРАВЛЕНИЯ В МНОГОТОЧЕЧНЫХ ЗАДАЧАХ О ВСТРЕЧЕ ДВИЖЕНИЙ

В. И. МИРОНОВ¹, Ю. В. МИРОНОВ²

¹Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН, ²Военно-космическая академия им. А. Ф. Можайского

¹СПИИРАН, 14-я линия ВО, д. 39, Санкт-Петербург; 199178, ²ВКА им. А. Ф. Можайского, П-82, Ждановская наб., д. 13, Санкт-Петербург, 197082

¹<ipi@iias.spb.ru>, ²<miroNov@yandex.ru>

УДК 629.191

Миронов В. И., Миронов Ю. В. **Комбинированный метод оптимизации управления в многоточечных задачах о встрече движений** // Труды СПИИРАН. Вып. 3, т. 2. — СПб.: Наука, 2006.

Аннотация. Рассматривается задача оптимального управления движением активным объектом при его последовательной встрече с системой подвижных целевых объектов. Предлагается комбинированный метод численного решения. Приводится пример. — Библ.9 назв.

UDC 629.191

Mironov V. I., Mironov Y. V. **The Composite Method for Optimum Control in Multipointed Problems on Meeting Points Motions** // SPIIRAS Proceedings. Issue 3, vol. 2. — SPb.: Nauka, 2006.

Abstract. One considers the task of optimum control of active objects movement at its consecutive meeting with a system of mobile objects for special targets. The composite method of numeric solution and example is suggested. — Bibl.9 items.

1. Введение

Задача оптимизации управления активным объектом (АО) при его последовательном сближении с группой подвижных целевых объектов (ЦО) относится к сложному и сравнительно мало изученному классу нелинейных многоточечных вариационных задач и, кроме того, связана с большим объемом вычислений. Задача такого рода рассматривалась, в частности, в [2,3] для импульсной постановки применительно к условиям космического полета к астероидам, где определялся оптимальный маршрут облета нескольких небесных тел. Аналогичные задачи возникают и при маневрировании космических аппаратов в околоземном пространстве и др.

Особенно трудоемкими являются многоточечные задачи оптимального управления с конечным управлением, и поэтому для них особенно обостряется проблема разработки высокоточных, надежных (устойчивых) и экономичных методов численного решения, пригодных для использования в контурах оперативного управления.

Разработку таких методов принципиально можно вести на основе двух известных подходов: прямого и вариационного.

Прямые методы, в принципе, позволяют строить достаточно надежные вычислительные схемы решения сложных оптимизационных задач. Однако они весьма громоздки и требуют большого объема вычислений. Кроме того, в рамках прямого подхода трудно определить оптимальную структуру управления и оценить близость получаемых решений к строго оптимальным [9].

По этой причине в большинстве известных работ, посвященных оптимизационным двухточечным задачам встречи на орбите, используется вариацион-

ный подход, базирующийся на применении принципа максимума Л.С.Понтрягина [7].

Однако на пути реализации этих методов имеются свои, достаточно серьезные проблемы. Это, прежде всего, определение хорошего начального приближения для сопряженного вектора, множителей Лагранжа в условиях трансверсальности и других параметров, а также обеспечение надежной сходимости вычислительного процесса. Для многоточечных задач оптимального управления эти проблемы еще более обостряются. Поэтому при разработке численных методов решения многоточечных задач желательно соединить высокую точность методов, основанных на применении принципа максимума, с надежностью вычислительных схем, свойственной прямым методам. Этого можно достигнуть на пути создания специальных комбинированных методов. Такой подход предлагается в данной работе. Он обеспечивает декомпозицию вычислительного процесса и позволяет свести исходную многоточечную задачу оптимизации к решению последовательности более простых задач оптимального управления.

2. Постановка задачи и необходимые условия оптимальности

Пусть динамика АО на интервале $t \in [t_0, T]$ описывается системой уравнений

$$\dot{\bar{x}} = \bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{u}, t), \quad (1)$$

а движение N ЦО — системами

$$\dot{\bar{y}}_i = \bar{f}_i(\bar{y}_i, t); \quad t \in [t_0, T_i]; \quad i = \overline{1, N}, \quad (2)$$

где

$$\bar{x} = [\bar{r}, \bar{V}]^T; \quad \bar{y} = [\bar{r}_y, \bar{V}_y]^T; \quad \bar{\varphi} = [\bar{\varphi}_r, \bar{\varphi}_V]^T; \quad \bar{f} = [\bar{f}_r, \bar{f}_V]^T;$$

В начальный момент t_0 исходное положение каждого ЦО определяется как

$$\bar{y}_i(t_0) = \bar{y}_{i0}, \quad i = \overline{1, N}, \quad (3)$$

а начальное $\bar{x}(t_0)$ и конечное $\bar{x}(T)$ положение управляемого объекта связаны зависимостями

$$\bar{z} = \bar{z}[\bar{x}(t_0), t_0, \bar{x}(T), T] = 0. \quad (4)$$

Требуется найти траекторию $\bar{x}(t)$, управление и параметры сближения

$$\bar{u}(t) \in \Omega_u, t_0, T_1, \dots, T_N, T,$$

обеспечивающие в моменты T_i выполнение заданных условий встречи с каждым i -м целевым объектом

$$\bar{\psi} = \bar{\psi}[\bar{x}(T_i), \bar{y}_i(T_i)] = 0; \quad (5)$$

$$i = \overline{1, N}; \quad (t_0 < T_1 < T_2 < \dots < T_N \leq T),$$

и при этом функционал:

$$I = \int_{t_0}^T \varphi_0(\bar{x}, \bar{u}, t) dt, \quad (6)$$

должен принимать минимальное значение, т.е.

$$\{\bar{u}(t), t_0, T_1, \dots, T_N, T\} \rightarrow \min_{\bar{u} \in \Omega_u} I.$$

В работе авторов [6] для такой задачи получены необходимые условия оптимальности управления, которые сформулированы следующим образом.

Для оптимальности $\bar{u}(t)$, \bar{T}_N и $\bar{x}(t)$ необходимо выполнение следующих условий:

1). Векторы $\bar{x}(t)$ и $\bar{\lambda}(t)$ удовлетворяют сопряженной системе

$$\dot{\bar{x}} = \frac{\partial H(\bar{x}, \bar{u}, \bar{\lambda}, t)}{\partial \bar{\lambda}}; \quad \dot{\bar{\lambda}} = -\frac{\partial H(\bar{x}, \bar{u}, \bar{\lambda}, t)}{\partial \bar{x}}. \quad (7)$$

2). Вектор управления обеспечивает максимум гамильтониана

$$\bar{u}(t) \rightarrow \max_{\bar{u} \in \Omega_u} \left\{ H(\bar{x}, \bar{u}, \bar{\lambda}, t) = \bar{\lambda}^T \bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{u}, t) - \varphi_0(\bar{x}, \bar{u}, t) \right\}; \quad t_0 \leq t \leq T. \quad (8)$$

3). Выполняются условия трансверсальности для $\bar{x}(t_0)$, $\bar{\lambda}(t_0)$, $\bar{x}(T)$, $\bar{\lambda}(T)$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \bar{x}(t_0)} - \bar{\lambda}(t_0) = 0; \quad \frac{\partial \gamma}{\partial \bar{x}(T)} - \bar{\lambda}(T) = 0; \quad (9)$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t_0} + (H_\lambda)_{t_0} = 0; \quad \frac{\partial \gamma}{\partial T} - (H_\lambda)_T = 0, \quad (10)$$

где

$$\gamma = \bar{\rho}^T \bar{z}[\bar{x}(t_0), t_0, \bar{x}(T), T];$$

$$H_\lambda = -\varphi_0(\bar{x}, \bar{u}, t) + \bar{\lambda}^T \bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{u}, t).$$

4). При $t = t_j$ выполняются условия Эрдмана–Вейерштрасса

$$\bar{\lambda}_{i+1}(T_i) - \bar{\lambda}_i(T_i) + \bar{\vartheta}_i^T \frac{\partial \bar{\psi}_i}{\partial \bar{x}(T_i)} = 0; \quad (11)$$

$$H_{i+1}(T_i) - H_i(T_i) + \bar{\vartheta}_i^T \left[\frac{\partial \bar{\psi}_i}{\partial \bar{x}_i(T_i)} \bar{\varphi}(T_i) + \frac{\partial \bar{\psi}_i}{\partial \bar{y}_i(T_i)} \bar{f}(\bar{y}_i, T_i) \right] = 0; \quad i = \overline{1, N}; \quad (12)$$

$$\bar{\lambda} = [\bar{\lambda}_r, \bar{\lambda}_v]^T,$$

где $\bar{\lambda}(t)$, $\bar{\rho}$, $\bar{\vartheta}_i$ — неопределенные множители Лагранжа.

Как видно из условий 4, сопряженные переменные имеют скачки в моменты времени T_j , что является особенностью данного класса задач, которую необходимо учитывать при решении. Уравнения (2)–(5) с условиями (7)–(12) и условиями непрерывности вектора $\bar{x}(t)$ дают достаточное число условий для определения всех неизвестных параметров и функций.

3. Комбинированный метод

Решение данной многоточечной краевой задачи оптимизации управления принципиально можно проводить, например, с помощью методов Ньютона, его модификаций и др. [9]. Однако для обеспечения устойчивой сходимости и сокращения общего объема вычислительных затрат при численном решении необходимо предварительно определить достаточно хорошее начальное приближение для всех элементов неизвестного вектора параметров. Этот вектор имеет в общем случае большую размерность. В его состав входят неоднородные по физическому смыслу компоненты. Кроме того, начальный вектор сопряжен-

ных переменных $\bar{\lambda}_0$ и векторы множителей Лагранжа $\bar{\vartheta}_i$, $\bar{\rho}$ не имеют ясной динамической интерпретации. Поэтому выбор подходящего начального приближения для вектора неизвестных параметров представляет самостоятельную достаточно сложную проблему. Желательно построить такой комбинированный метод решения задачи, в котором бы объединялись высокая точность методов, основанных на применении принципа максимума, с надежностью вычислительных схем, свойственных прямым методам.

На наш взгляд, этим требованиям удовлетворяет следующий метод, в котором комбинационно используются вариационный и прямой принципы построения вычислительных алгоритмов на основе декомпозиции вычислительного процесса. Он включает два цикла или этапа.

1. На первом (внутреннем) цикле исходная задача решается при фиксированных значениях вектора временных параметров \bar{T}_N в соответствии с принятым начальным приближением на основе принципа максимума.

2. На втором (внешнем) цикле осуществляется построение аппроксимационных моделей зависимости основного критерия оптимальности $I(\bar{T}_N)$ и изопериметрических условий $L(\bar{T}_N)$ от вектора временных параметров \bar{T}_N и производится его уточнение.

Далее организуется итерационное повторение операций 1 и 2 циклов для окончательного определения $\bar{u}^{opt}(t)$ и \bar{T}_N^{opt} .

Задача оптимального управления, решаемая на первом этапе данного метода значительно упрощается по сравнению с исходной, так как временные параметры движения фиксированы. По-существу, это задача с промежуточными условиями статического типа [1, 8, 9]. Однако она остается достаточно сложной и трудоемкой, что приводит к необходимости введения некоторых упрощений и, в частности, к поиску квазиоптимального управления. Один из наиболее удобных в этом отношении подходов состоит в параметрическом задании структуры управляющих функций. Вместе с тем, выбор такой структуры не может быть произвольным и должен вытекать из содержания решаемой задачи. Промежуточный вариант аппроксимации заключается в том, чтобы структуру управления принять соответствующей локально-оптимальным управлениям, получаемым при декомпозиции процесса решения многоточечной вариационной задачи первого этапа на последовательность двухточечных задач. В этом случае на каждой i -ой фазе движения осуществляется переход из состояния $\bar{x}(t_i)$ в состояние $\bar{x}(t_{i+1})$ по критерию минимума функционала

$$I_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \varphi_0(\bar{x}, \bar{u}, t) dt. \quad (13)$$

Для решения задач второго этапа были рассмотрены две вычислительные схемы, основанные на построении как полных, так и локальных аппроксимирующих моделей. Оба метода дают одинаковый результат и примерно равноценны по трудоемкости. Однако второй вариант является более гибким в применении и позволяет в ходе итераций корректировать базовую сетку вариаций элементов вектора \bar{T}_N в интересах обеспечения устойчивости и надежной сходимости вычислительного процесса.

В первом варианте с помощью стандартных методов численной аппрокси-

мации осуществляется построение аппроксимирующих моделей критерия $I(\bar{T}_N)$ и ограничений $L(\bar{T}_N)$ по заданной сетке $\bar{T}_{N,j}$ ($j = \overline{1, m}; m > N$) на множестве падающих траекторий:

$$I(\bar{T}_N) = a_0 + \bar{a}^T \bar{T}_N + \bar{T}_N^T A \bar{T}_N; \quad L(\bar{T}_N) = b_0 + \bar{b}^T \bar{T}_N, \quad (14)$$

где \bar{a}, \bar{b}, A - постоянные векторы и симметрическая матрица;

Тогда решение задачи второго этапа находится по формуле

$$\bar{T}_N = \frac{1}{2}(A)^{-1} \left\{ \left[\bar{b}^T A^{-1} \bar{b} \right]^{-1} \left[2(L_{\text{зад}} + b_0) + \bar{b}^T A^{-1} \bar{a} \right] \bar{b} + \bar{a} \right\}, \quad (15)$$

которая выражает условный экстремум функционала $I(\bar{T}_N)$. Это соответствует процедуре применения метода проекции градиента.

Существо *второго* варианта решения задач внешнего цикла комбинированного метода, связанного с построением локальных аппроксимирующих моделей, иллюстрируется рис. 1, где дана геометрическая интерпретация процесса определения оптимальных значений вектора $\bar{T}_N = [T_1, T_2 = T]^T$ для задачи последовательного сближения с двумя объектами ($N=2$) при минимизации энергетических затрат, определяемых соответствующим значением характеристической скорости $I = \Delta V$.

Минимальный объем вычислений соответствует условиям параболической аппроксимации в трех сечениях критериальной поверхности полиномами второй степени. Поэтому для решения данной задачи (1×2) на 2-м этапе необходимо предварительно получить как минимум 9 значений функционала, соответствующих 9 различным сочетаниям фиксированных параметров T_1 и $T_2 = T$. Для этого требуется 9 раз решить последовательность двух декомпозированных задач оптимального управления 1-го этапа, что соответствует 18 локальным двухточечным задачам оптимального управления типа 1×1 .

При сближении с тремя объектами ($N=3$) объем вычислений возрастает и уже требуется решить 81 двухточечную задачу типа 1×1 . Для произвольного N число таких локальных задач M_N можно оценить по формуле $M_N = 3^N N$.

Так, при $N=4$ имеем $M_N = 324$ и т.д.

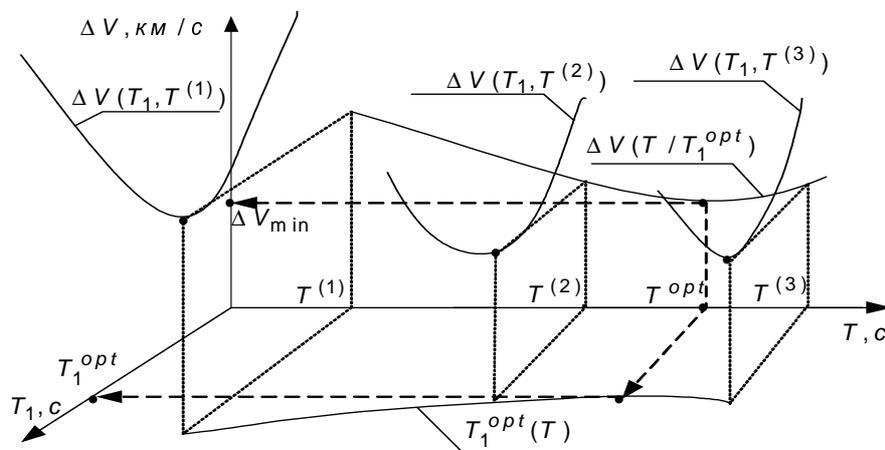


Рис. 1. Геометрическая интерпретация метода построения локальных аппроксимационных моделей.

3. Пример

Рассмотрим задачу жесткого сближения космического аппарата при последовательном обходе N целевых объектов. Для этого конкретизируем исходную постановку задачи.

Будем полагать, что движение объектов происходит в нормальном гравитационном поле, учитывающем полярное сжатие Земли. Запишем соответствующие уравнения в абсолютной геоцентрической экваториальной системе отсчета для управляемого объекта

$$\dot{\bar{r}} = \bar{V}; \quad \dot{\bar{V}} = \bar{g}(\bar{r}, t) + \bar{u}(t); \quad \dot{m} = -\beta, \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} g_x &= ax; & g_y &= ay; & g_z &= (2bc + a)z, \\ a &= -b[\alpha_{00} + c(d-1)]; & b &= R_0 r^{-3}; & c &= 1.5\alpha_{20} R_0^2 r^{-2}; & d &= 5z^2 r^{-2}; \\ J_{20} &= -0.001082627; & \alpha_{00} &= 62564951 \text{ м}^2 / \text{с}^2; \\ \alpha_{20} &= -67889,273 \text{ м}^2 / \text{с}^2; & R_0 &= 6371 \text{ км}; & r &= (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}. \end{aligned}$$

$$\bar{u}(t) = u(t)\bar{\alpha}(t); \quad u(t) = \frac{W\beta(t)}{m(t)};$$

$$\beta(t) = \frac{\dot{m}(t)}{m_0}; \quad 0 \leq \beta \leq \beta_{\max};$$

$$\bar{\alpha}(t) = [\cos \nu(t) \cos \psi(t), \sin \nu(t) \cos \psi(t), \sin \psi(t)]^T;$$

W — скорость истечения газов;

β, m — относительные секундный расход топлива и масса;

ν, ψ — углы тангажа и рыскания;

\bar{g} — вектор гравитационного ускорения..

Движение N пассивных ЦО описываются системами уравнений

$$\dot{\bar{r}}_i = \bar{V}_i; \quad \dot{\bar{V}}_i = \bar{g}(\bar{r}_i, t); \quad i = \overline{1, N}. \quad (17)$$

Требуется найти программу управления, доставляющую минимум функционалу

$$I = \int_0^T \varphi_0(\bar{x}, \bar{u}, t) dt,$$

при заданных ограничениях (15).

Если минимизируются энергетические затраты, то

$$\varphi_0 = \beta(t),$$

а в случае минимизации времени сближения:

$$\varphi_0 = 1,$$

при этом должно учитываться изопериметрическое ограничение по имеющимся энергетическим запасам АО, в частности, по запасам характеристической скорости $V_{\text{хар}} = V_{\text{зад}}$.

Решение при $\varphi_0 = \beta(t)$ сводится к соответствующей многоточечной краевой задаче, которая формируется условиями оптимальности управления

$$\varphi_0 = 1,$$

$$\bar{\alpha} = -\frac{\bar{\lambda}_V}{\|\bar{\lambda}_V\|}; \quad \beta = \begin{cases} \beta_{max}, & \text{при } \Delta_{\Gamma} \geq 0; \\ 0, & \text{при } \Delta_{\Gamma} < 0; \end{cases}$$

$$\Delta_{\Gamma} = -\|\bar{\lambda}_V\| \cdot \frac{m(t)}{W} - \lambda_m - 1,$$

где Δ_{Γ} — функция переключения, т.е. системами дифференциальных уравнений движения (35) и (37), сопряженной системой

$$\dot{\bar{\lambda}}_r = \frac{\pi_0}{r^3} [\bar{\lambda}_V - \frac{3}{r^2} (\bar{\lambda}_V^T \bar{r}) \bar{r}]; \quad \dot{\bar{\lambda}}_V = -\bar{\lambda}_r;$$

$$\dot{\lambda}_m = \frac{W\beta}{m^2} \bar{\lambda}_V^T \bar{\alpha};$$

а также краевыми и промежуточными условиями:

$$\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0; \quad \bar{y}_i(t_0) = \bar{y}_{i0};$$

$$\bar{\psi}_i = \bar{r}(T_i) - \bar{r}_i(T_i) = 0;$$

$$\bar{\lambda}_{r,i+1}(T_i) - \bar{\lambda}_{r,i}(T_i) + \bar{\vartheta}_{r,i} = 0;$$

$$\bar{\lambda}_{V,i+1}(t_j) - \bar{\lambda}_{V,i}(t_j) = 0; \quad \bar{\lambda}_{V,N}(t_N) = 0; \quad \lambda_m(T) = 0;$$

$$R_i = H_{i+1}(T_i) - H_i(T_i) + \bar{\vartheta}_{r,i}^T [\bar{\varphi}_r(T_i) - \bar{f}_r(T_i)] = 0; \quad i = \overline{1, N}.$$

Неизвестными являются векторы параметров:

$$\bar{q} = [\bar{\rho}_{\lambda}, \bar{T}_N]^T;$$

$$\bar{\rho}_{\lambda} = [\bar{\lambda}_0, \bar{\vartheta}_1, \bar{\vartheta}_2, \dots, \bar{\vartheta}_{N-1}]^T; \quad \bar{T}_N = [T_1, T_2, \dots, T_N]^T,$$

где $\bar{\lambda}_0$ — начальный вектор сопряженных переменных;

$\bar{\vartheta}_i$ — векторы множителей Лагранжа;

\bar{T}_N — вектор неизвестных моментов встречи.

Оптимальные значения вектора параметров управления $\bar{q} = [\bar{\rho}_{\lambda}, \bar{T}_N]^T$ являются решением краевого уравнения

$$\bar{S}(\bar{q}) = 0,$$

$$\bar{S} = [\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \dots, \bar{\psi}_N, \bar{R}, \bar{\lambda}_{V_N}]^T; \quad \bar{R} = [\bar{R}_1, \bar{R}_2, \dots, \bar{R}_N]^T.$$

Для численного решения этой многоточечной задачи о встрече движений применялся комбинированный метод. При этом осуществлялась декомпозиция задачи первого этапа на N локальных двухточечных задач оптимального управления. В свою очередь, в интересах решения локальных задач оптимизации авторами были получены аналитические решения ряда приближенных задач для модели движения в однородном центральном поле [4] при постоянном реактивном ускорении и при постоянном секундном расходе топлива. Это позволило аналитически определить начальные приближения для всех сопряженных переменных.

Построение аппроксимирующих моделей проводилось методом локальной аппроксимации. В качестве изопериметрического ограничения L рассматривались располагаемые запасы характеристической скорости АО. В ходе решения задачи дополнительно учитывалось, что в моменты встречи с i -ым ЦО, масса АО изменялась на некоторую постоянную величину, так что учитывалась разрывность модели динамики по этой переменной.

Численные исследования проводились для облета двух и трех ЦО как при минимизации энергетических затрат, так и при минимизации общего времени маневрирования АО. Движение рассматривалось в нецентральной гравитационном поле с учетом переменности массы АО. В исходном состоянии АО и ЦО располагались в диапазоне относительных дальностей до 2000 км. Общее время движения ограничивалось периодом обращения АО на опорной орбите. Некоторые результаты расчетов приведены на рис. 2–7. На рис. 2 и 3 изображены критериальные поверхности, отражающие характерную зависимость оптимизируемого функционала от временных параметров встречи. Они получены на множестве попадающих траекторий. На рис. 4 и 5 приводятся результаты минимизации энергетических затрат при встрече с двумя и тремя ЦО, соответственно. На рис. 6 даны результаты минимизации временных параметров встречи с тремя ЦО при заданных запасах характеристической скорости АО. Графики на рис. 7 иллюстрируют точность квадратичной аппроксимации суммарных энергетических затрат при построении локальных аппроксимационных моделей.

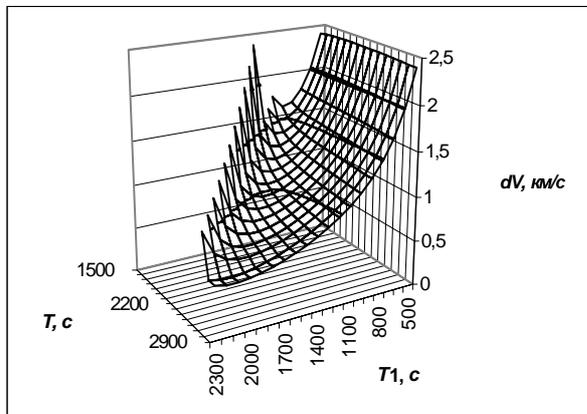


Рис. 2. $\Delta V_{\Sigma}(T_1, T)$ при $N = 2$.

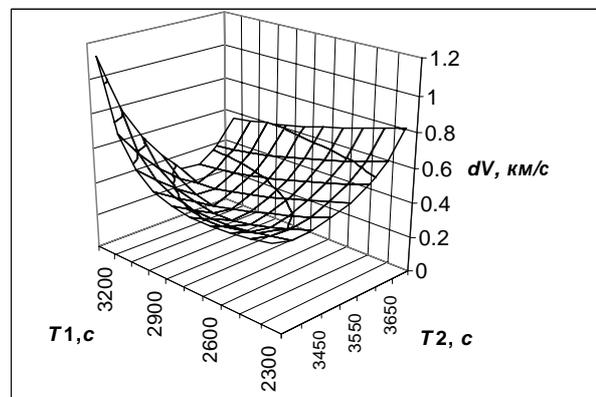


Рис. 3. $\Delta V_{\Sigma}(T_1, T_2 / T_{зад})$ при $N = 3$.

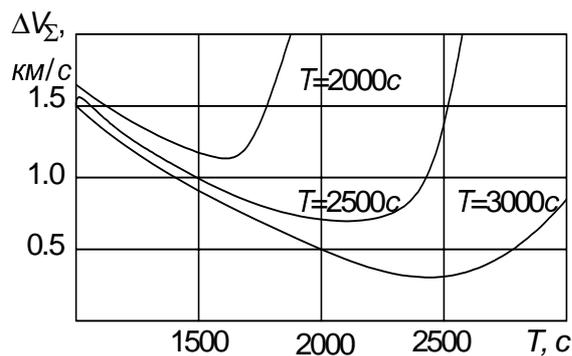


Рис. 4. $\Delta V_{\Sigma}(T_1)$ при $N = 2$.

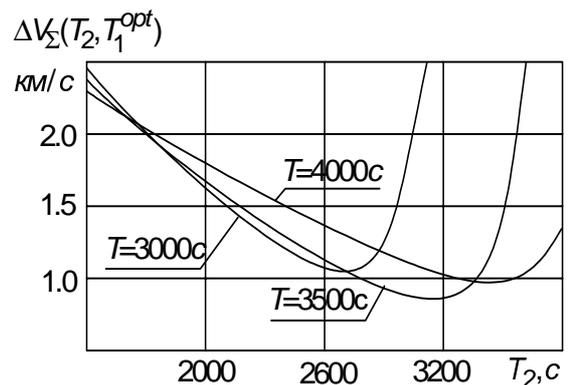


Рис. 5. $\Delta V_{\Sigma}(T_2, T)$ при T_1^{opt} при $N = 3$.

В целом, расчеты показали, что разработанные методические и алгоритмические средства обеспечивают решение рассматриваемой многоточечной задачи оптимального управления с приемлемыми быстродействием и точностью.

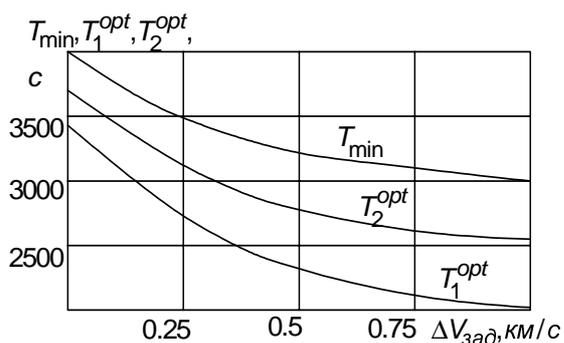


Рис. 6. Оптимальные интервалы полета при $N = 2$.

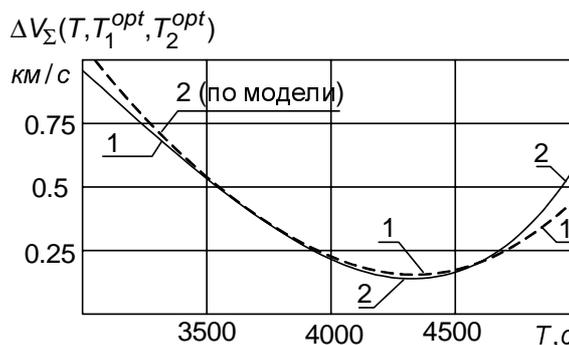


Рис. 7. $\Delta V_{\min}(T)$ при T_1^{opt}, T_2^{opt} при $N = 2$.

Для ускорения вычислений, связанных с решениями краевых задач на внешних и внутренних циклах комбинированного метода, применялся метод приближенного корректирующего оператора [5]. За счет этого удалось повысить оперативность базового алгоритма в 10 и более раз. Сходимость вычислительного процесса обеспечивалась за 3–4 итерации внутреннего и 2–3 итерации внешнего циклов расчета. Работа выполнена при поддержке РФФИ (Проект № 06-07-89242) и при финансовой поддержке за счет грантов Санкт-Петербурга в сфере научной и научно-технической деятельности в 2006 году.

Литература

1. Величенко В. В. Условия оптимальности в задачах управления с промежуточными условиями значений координат // ДАН СССР. 1967. Т. 174, № 5. С. 1011–1013.
2. Жирнов В. А., Лидов М. Л. К задаче сближения с несколькими астероидами // Космические исследования. 1989. Т. XXVII, № 1. С. 3–8.
3. Жирнов В. А., Лидов М. Л. Решение задачи сближения с несколькими астероидами алгоритмом оптимальной коррекции // Космические исследования. 1988. Т. XXVI, № 4. С. 508–518.
4. Ильин В. А., Кузмак Г. Е. Оптимальные перелеты космических аппаратов. М.: Наука, 1976. 744 с.
5. Миронов В. И. Конструктивный метод решения краевых задач управляемого движения // Алгоритмы и программы исследования систем управления. 1980. Вып. 6. Л.: ВИКИ им. А. Ф. Можайского, 1980. С. 70–74 с.
6. Миронов В. И., Миронов Ю. В. Необходимые условия оптимальности управления в многоточечных задачах о встрече движений // Труды СПИИРАН. 2005. Вып. 2, т. 2. СПб.: Наука, 2005. С. 308–316.
7. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1969. 369 с.
8. Троицкий В. А. Вариационные задачи оптимизации процессов управления с функционалами, зависящими от промежуточных значений координат // ДАН СССР. 1963. Т. 149, № 5. С. 268–271.
9. Федоренко Р. П. Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978. 488 с.