

# СИНТЕЗ ИНВАРИАНТНОЙ МЕРЫ ИНФОРМАТИВНОСТИ ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ С ЗЕРКАЛЬНОЙ СИММЕТРИЕЙ

О. И. Смоктий, Г. А. Гусейнов

Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН  
199178, Санкт-Петербург, 14-я линия ВО, д. 39  
<soi@iias.spb.su>

---

УДК 528.8 : 519 .6 + 551.521

О. И. Смоктий, Г. А. Гусейнов. **Синтез инвариантной меры информативности для операторов переноса излучения с зеркальной симметрией** // Труды СПИИРАН, Вып. 2, т. 2. — СПб.: Наука, 2005.

**Аннотация.** Рассматриваются проблемы информационной калибровки данных дистанционного спектрометрирования Земли на основе фундаментальных решений уравнения переноса излучения. Формулируются задачи поиска инвариантов информативности в пространстве решений оператора переноса излучения с зеркальной симметрией. Предлагаемый подход является естественным развитием формализованных процедур получения информационно-динамических моделей полей излучения природных сред, позволяющих с единых методологических позиций проводить планирование, сопоставление и оценку аэрокосмической информации, инвариантной к пространственно-временной и спектральной изменчивости относительно условий дистанционного зондирования. — Библ. 6 назв.

UDC 528.8 : 519 .6 + 551.521

O. I. Smokty, G. A. Guseynov. **Synthesis of an invariant measure of informativeness for radiative transfer operators with a mirror symmetry** // SPIIRAS Proceedings. Issue 2, vol. 2. — SPb.: Nauka, 2005.

**Abstract.** The informational calibration problems of remote sensing Earth's spectrometry data are considered on the basis of fundamental solutions of the radiative transfer equation. The invariants' searching problems in a solution's space of a basic value problems of radiative transfer theory with mirror symmetry are stated. The elaborated approach is being the development of the formalized models' deriving routines for planning, comparison and evaluation of the remote information, being invariant to time, spatial and spectral variability with aerospace survey conditions to be conducted from uniform statements. — Bibl. 6 items.

---

В исследованиях оптических свойств природных образований Земли широко используется формализованный подход анализа спектральной яркости системы «атмосфера - земная поверхность», включающий методы теории переноса излучения — инструмента моделирования спектральной пространственно-временной трансформации оптических характеристик, спектрально-радиационных образов распознаваемых экосистем и параметров радиационного состояния контролируемых природных процессов.

Результаты моделирования, получаемые в рамках численных и аналитических схем решений уравнения переноса, обладают очевидным преимуществом единства, сопоставимости и калибровки по сравнению с эвристическими регрессионными моделями, в основном разрозненного характера, используемыми для решения частных задач дистанционного зондирования (ДЗ).

Проблема разработки и практического использования единого подхода в широком спектре задач ДЗ, основанного на применении теории переноса излучения, сейчас особенно актуальна, во первых, в связи с прогрессивно возрастающим потоком аэрокосмической информации, получаемой из разных несопоставимых источников, во вторых, в связи с отсутствием единой информационной метрики сопоставления для аэрокосмических данных, получаемых в раз-

ных условиях съемки и солнечного освещения. Между тем для решения подобных задач разработан аппарат теории оптимального эксперимента с большим разнообразием конкретных схем приложений [1-3].

Классические схемы оптимального эксперимента сформулированы, в частности, для обратных задач оценки температуры поверхности и Z-профиля атмосферы по спектрально-радиометрическим данным в работах [2]. Не касаясь конкретных схем вычислений по оценке параметров системы «атмосфера – земная поверхность», затронем вопросы информативности, тесно связанные с оптимальным планированием дистанционных спектрофотометрических измерений.

В случае косвенных измерений задача сводится к следующей постановке. В спектральных диапазонах  $(\lambda - \lambda_j)$ ,  $i, j = N$  составляется оптимальный план с частотой измерения  $\nu_i$  N-линейных функционалов от правой части интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода

$$\int_Z K(\lambda, z) I(z) dz = R(\lambda), \quad (1)$$

$$Y_i = \int_{\Lambda} A(\lambda - \lambda_j) R(\lambda) d\lambda + \varepsilon_i, \quad E[\varepsilon_i] = 0, \quad E[\varepsilon_i \varepsilon_j] = \delta_{ij} \sigma^2(A_i) \nu_i. \quad (2)$$

В соотношении (2)  $A_i = A(\lambda_i - \lambda)$  — аппаратная функция, определяющая спектральное разрешение в диапазонах, выбираемых согласно плану  $P = \{A, \tau_i\}_{i=1}^N$ ,

где  $\tau_i = \nu_i T^{-1}$  — часть общего времени измерений  $T = \sum_{i=1}^N \nu_i^{-1}$  на одно измерение в спектральном канале  $x_i$ ,  $\varepsilon_i$  — ошибка эксперимента. Информационная метрика  $M(P)$  задается функционалом от дисперсионной матрицы, вычисляемой по информационной матрице Фишера согласно известным соотношениям

$$M(P) = \sum_{i=1}^N \tau_i \sigma^2(A_i) \psi_{\alpha}(A_i) \psi_{\beta}^T(A_i), \quad (\alpha, \beta = \overline{1, M}), \quad (3)$$

$$\psi_{\alpha}(A_i) = \int_{\Lambda} A(\lambda_i - \lambda) F_{\alpha}(\lambda) d\lambda, \quad F_{\alpha}(\lambda) = \int_Z K(\lambda, z) V_{\alpha}(z) dz. \quad (4)$$

Дисперсионная матрица строится на вектор – функциях  $\{\psi_{\alpha}\}$ , вычисляемых в результате подстановки в основное уравнение переноса излучения линейной параметризации искомой функции температурного профиля (в случае решения задачи температурного зондирования)

$$I(z) = \sum_{\alpha=1}^M Q_{\alpha} V_{\alpha}(z). \quad (5)$$

Заметим, что элементы информационной матрицы  $M(P)$ , а значит и информативность, не зависят от оцениваемых параметров  $Q_{\alpha}$  профиля, поскольку вектор-функции, составляющие элементы этой матрицы, являются функциями чувствительности (первыми производными) измеряемого функционала  $R[I(z)]$  к параметрам состояния природной среды. Однако они сильно зависят от выбранного плана, определяющего распределение частоты измерений и спектрального разрешения (аппаратной функции) по спектру восходящей радиации, т.е. по сути, определяются оптимизируемыми условиями спектральной

съемки. Очевидно, точность априорной информации, определяющая исходную параметризацию профиля, также сильно влияет на информативность плана.

Задачи теории переноса, включающие адекватную интерпретацию в видимом диапазоне (400–800 нм) спектральных и пространственно-временных распределений оптических характеристик природных образований на основе единых информационных метрик, требуют более широкой постановки, учитывающей свойства «пространственно-угловой» симметрии и инвариантности функционалов в пространстве решений операторов переноса излучения.

Рассмотрим классическое уравнение переноса для неоднородного плоского слоя, ограниченного снизу отражающей ламбертовой поверхностью [4]:

$$(\vec{r} \times \vec{\nabla}) = -\alpha(z)I + \frac{\sigma(z)}{4\pi} \int I \cdot \rho(\cos \gamma, z) d\omega + \frac{\sigma(z)}{4} \cdot \rho(\gamma_1, z) \cdot \exp\left\{-\frac{1}{\zeta} \int_0^z \sigma(z') dz'\right\} \quad (6)$$

с граничными условиями

$$I(\infty, x, y, \eta, \zeta, \varphi) = 0, \quad \eta > 0, \quad (7)$$

$$I(0, x, y, \eta, \zeta, \varphi) = \frac{A(x, y)}{\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^1 I \eta' d\eta' + A(x, y) S \zeta \exp\left\{-\frac{1}{\zeta} \int_0^\infty \alpha(z') dz'\right\}, \quad \eta < 0. \quad (8)$$

В (6)-(8)  $\vec{r} \{\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta\}$  — направление распространения потока излучения, интенсивность которого  $I$  регистрируется на уровне  $z$ , а индикатриса рассеяния  $\rho(\cos \gamma, z)$ , коэффициенты ослабления и рассеяния диффузно-отражающей атмосферы  $\alpha(z)$  и  $\sigma(z)$  соответственно рассчитываются для принятых моделей земной атмосферы; угловые переменные  $\eta = \cos \theta$  и  $\zeta = \cos \vartheta_0$  — косинусы углов регистрации и падения излучения,  $\varphi$  — азимутальный угол, соответственно;  $\gamma$  — угол рассеяния,  $d\omega$  — элемент телесного угла,  $\nabla$  — вектор градиента,  $A(x, y)$  — альбеда горизонтально-неоднородной подстилающей поверхности, требующее параметризации для законченного представления системы с целью оптимального планирования измерений и информационной калибровки

В работе [5] для случая анализа распределения спектральной яркости по строке изображения вдоль трассы сканирования оптически неоднородной поверхности Земли используется следующее модельное представление связей дистанционно регистрируемых спектрально-яркостных характеристик со спектрально-отражательными и структурно-геометрическими параметрами рельефа земной поверхности:

$$\begin{aligned} \bar{I}_{R,\lambda}^m &= \hat{I}_{пов,\lambda}^m \mu_\lambda(\tau - \tau_0, \eta, \tau_0) + \bar{I}_{атм,\lambda}^m(\tau, -\eta, \zeta, \tau_0) = \\ &= \frac{R_\lambda^m(x - \Delta x, \eta, \zeta) S_\lambda \zeta \bar{\mu}_\lambda(\tau_0 - \tau, \eta, \tau_0)}{1 - \bar{A}c(\tau_0)} \left[ \exp(-\tau_0(\lambda)/\zeta) + 2 \int_0^1 \sigma_\lambda^0(\eta', \zeta') \eta' d\eta' \right] + \bar{I}_{атм,\lambda}^m \quad (9) \end{aligned}$$

$$(1 - \bar{A}c(\tau_0))^{-1} \rightarrow 1, \quad n \geq 0, \quad (10)$$

$$\rho_{R,\lambda}^m(\tau, x, -\eta, \zeta) = \frac{\bar{I}_{R,\lambda}^m}{S_\lambda \zeta \mu} = R_\lambda^m(x - \Delta x, \eta, \zeta) \left[ \exp(-\tau_0(\lambda)/\zeta) + 2 \int_0^1 \sigma_\lambda^0(\eta', \zeta') \eta' d\eta' \right] + \bar{I}_{атр}^m \quad (11)$$

$$\langle \bar{\rho}_{R,\lambda}^m \rangle_x - \rho_{atm,\lambda}^m = \langle R_\lambda^m \rangle_x \cdot \mu_\lambda, \quad (12)$$

$$D[\bar{\rho}_{R,\lambda}^m]_x = D[R_\lambda^m]_x \cdot \mu_\lambda^2, \quad (13)$$

$$\frac{\langle \bar{\rho}_{R,\lambda}^m \rangle_x - \rho_{atm,\lambda}^m}{\langle R_\lambda^m \rangle_x} = \frac{D^{1/2}[\bar{\rho}_{R,\lambda}^m]}{D^{1/2}[R_\lambda^m]} = \mu_\lambda(\tau_0, \zeta, \tau_0), \quad (14)$$

$$R_\lambda^m(\eta, \zeta) = r(\lambda) \cdot R^m(\eta, \zeta), \quad (15)$$

$$r(\lambda) = B \cdot L(\lambda) - v. \quad (16)$$

Приведенные соотношения (9–16) представляют некоторую последовательность преобразований дистанционно измеряемых спектральных яркостей, позволяющих получить спектральные и геометрические характеристики оптически неоднородной поверхности, инвариантные относительно изменений условий съемки. Иными словами, выбираются соотношения для калибровки дистанционных данных.

1. Первое соотношение моделирует регистрируемую интенсивность излучения, складывающуюся из интенсивностей отраженной поверхностью и диффузно отраженной атмосферным слоем радиации.
2. Переход ко второму соотношению для спектрально-яркостных характеристик ни что иное, как нормировка первого соотношения на поток падающей радиации и этим преобразованием достигается первый этап энергетической калибровки.
3. Третье и четвертое соотношения дают переход к оценкам статистических (первого и второго) моментов искомых характеристик.
4. Пятое — инвариантное соотношение среднеквадратичных отклонений регистрируемой спектрально-яркостной характеристики и отражательной характеристики поверхности, которое не зависит от геометрии рельефа, но только — от спектрального и углового хода функции пропускания.
5. Соотношение шестое факторизует зависимость углового и спектрального хода натурно измеренной спектрально-отражательной характеристики поверхности
6. Последнее уравнение дает связь дистанционно регистрируемых спектров с лабораторными характеристиками спектров и влажности, очевидно, инвариантными относительно условий съемки.

Ниже наряду с приведенной последовательностью нелинейных преобразований полуэмпирического характера будут рассмотрены возможности группового подхода к синтезу информационных инвариантов калибровки дистанционных данных.

Основным достижением и новизной рассмотренной постановки использования нелинейных преобразований является возможность формулировки с единых позиций задачи оптимального планирования спектральной, угловой, и пространственной изменчивости регистрируемых характеристик. Это позволяет приблизиться к решению проблемы выбора единых информационных критериев калибровки данных дистанционного спектрофотометрирования системы «атмосфера – земная поверхность» в рамках формальной схемы: параметризация – оптимальные планы – измерения – оценки параметров.

При параметризации в случае отсутствия априорной информации выбираются полиномы. Здесь использовалась априорная информация о логнормальных распределениях оптических неоднородностей для параметризации функции рельефа и спектрально-отражательных свойств земной поверхности, для чего формировался оптимальный план при нелинейной функции отклика, при этом использовалось преобразования Фурье не самой функции, но функции рельефа поверхности в показателе экспоненты.

$$R_\lambda(\eta, \zeta, x) = r(\lambda)R(\eta, \zeta) \exp[-\beta(\lambda)\alpha(x - \Delta x)], \quad \alpha(x) = \sum_{k=1}^n A_k \cdot \exp(-ik\omega_0 \cdot x), \quad (17)$$

$$\langle R_\lambda \rangle_x = r(\lambda) \cdot \exp\left[-\beta_\lambda \cdot \langle \alpha \rangle + \frac{1}{2} \beta_\lambda^2 \cdot \sigma_\alpha^2\right] \quad \langle \alpha \rangle = \sum_{k=1}^n A_k \cdot \langle \exp(-ik\omega_0 \cdot x) \rangle_x, \quad (18)$$

$$\sigma_\alpha^2 = (H\Theta)^{-1} \int_0^{2H\Theta} \left(1 - \frac{\Delta x}{2H\Theta}\right) \cdot K_{\alpha\alpha}(\Delta x) d(\Delta x), \quad K_{\alpha\alpha}(\Delta x) = C_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n A_k^2 \cdot \cos(\omega_0 \cdot k \cdot \Delta x). \quad (19)$$

В такой постановке спектральные коэффициенты Фурье преобразования инвариантны относительно пространственных и спектральных преобразований ввиду прямой взаимосвязи с характеристиками рельефа.

Элементы информационной матрицы Фишера

$$M(p) = \sum_{i=0}^M P(i) \cdot f_k(\lambda_i) \cdot f_{k'}(\lambda_i), \quad f_k = \frac{\partial \langle R_\lambda \rangle}{\partial A_k} \quad (20)$$

используются для имитации плана в пространстве  $L$  спектральных каналов при выбранном функционале, задающем информационную метрику калибровки. Далее используется стандартная процедура. Обычно выбирается детерминант дисперсионной матрицы оценок параметров, выраженный через матрицу Фишера. Затем результат приводится к информационной мере.

Приведенная выше система нелинейных преобразований использовалась для параметризации решения уравнения переноса с целью поиска инвариантных относительно условий съемки параметров для обеспечения адекватной информационной калибровки дистанционных данных. Однако такой полуэвристический подход не обеспечивает полной формализации процедуры формирования искомого инвариантного соотношения. Используя более общие свойства уравнения переноса: зеркальной симметрии, а также вклада нелинейности при многократном переотражении, — можно применить группу непрерывных преобразований, допускаемых уравнением и сохраняющих инвариантные свойства оператора переноса [6].

$$x' = \Omega(x, \rho_R; \alpha), \quad \rho'_R = \Lambda(x, \rho_R; \alpha), \quad (21)$$

$$\xi(x, \rho_R) \frac{\partial L}{\partial x} + \chi(x, \rho_R) \frac{\partial L}{\partial \rho} = 0, \quad \xi = \frac{\partial \Omega}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0}, \quad \chi = \frac{\partial \Lambda}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} \quad (22)$$

$$L\{I^+, I^-\} = L(I^+ + I^-), \quad (23)$$

$$I^+(\tau_0 - \tau, -\eta, \zeta, \varphi, \tau_0, x, \lambda; \alpha) = I^+(\tau, \eta, \zeta, \varphi, \tau_0, x, \lambda; \alpha), \quad (24)$$

$$I^-(\tau_0 - \tau, -\eta, \zeta, \varphi, \tau_0, x, \lambda; \alpha) = -I^-(\tau, \eta, \zeta, \varphi, \tau_0, x, \lambda; \alpha). \quad (25)$$

Первые два соотношения в (21) представляют функции преобразования к новой системе, относительно которых инвариантен искомым функционал. Первое соотношение в (22) выражает действие оператора группы Ли непрерывных

преобразований с параметрами, соответствующими частным производным, аналогичным функции чувствительности. Если использовать в этом преобразовании параметрическое представление спектрально-яркостной характеристики подстилающей поверхности согласно соотношениям:

$$I_0 = \frac{S\zeta\bar{\mu} \sum_{v=1}^M \alpha_v \Psi_v(x, y)}{1 - c \sum_{v=1}^M \alpha_v \Phi_v}, \quad (26)$$

$$\rho_{\text{пов}}^\lambda = \frac{I_0(\lambda)}{S_\lambda \zeta(\theta_0) \mu(\lambda)} = \sum_{v=1}^M \alpha_v \Psi_v(x, y) \cdot \left[ 1 + \bar{c} \sum_{v=1}^M \alpha_v \Phi_v + c^2 \left( \sum_{v=1}^M \alpha_v \Phi_v \right)^2 + \dots \right], \quad (27)$$

$$\Phi_v = \iint_D \Psi_v(x, y) ds, \quad (28)$$

то с учетом приведенной параметризации приходим к следующей системе уравнений:

$$\left( \frac{\partial \Omega}{\partial \rho_R} \cdot \frac{\partial \rho_R}{\partial \alpha_K} \Big|_{\alpha_K=0} \right) \cdot \frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad K = \overline{1, M}, \quad (29)$$

$$\left( \frac{\partial \Lambda}{\partial \rho_R} \cdot \frac{\partial \rho_R}{\partial \alpha_K} \Big|_{\alpha_K=0} \right) \cdot \frac{\partial L}{\partial \rho_R} = 0. \quad (30)$$

В (23) величины  $I^+ + I^-$  являют фотометрическими инвариантами при линейных пространственных сдвигах и зеркальных преобразованиях исходного уравнения переноса.

Для каждого типа преобразования (вращения, трансляции, отражения, подобия), задаваемого  $\Omega(x, \rho; \alpha)$ ,  $\Lambda(x, \rho; \alpha)$ , из приведенной выше системы уравнений вычисляется соответствующий инвариант.

Таким образом, в настоящей работе впервые поставлена проблема поиска адекватных функционалов информационной калибровки дистанционного спектрометрирования Земли на основе фундаментальных решений уравнения переноса. Сформулирована задача поиска инвариантов информативности в пространстве решений основной краевой задачи теории переноса излучения с зеркальной симметрией на основе единых принципов синтеза с использованием группы непрерывных преобразований Ли. Предлагаемый подход является естественным развитием формализованных процедур получения моделей, позволяющих с единых позиций проводить планирование, сопоставление и оценку аэрокосмической информации, инвариантную к пространственно-временной и спектральной изменчивости относительно условий съемки.

## Литература

- [1] Математическая теория планирования эксперимента. Под редакцией С. М. Ермакова. М.: Наука, 1983. — 392 с.
- [2] Математические методы планирования эксперимента. Сборник статей под редакцией В. В. Пененко. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1981. — 255 с.
- [3] Кондратьев К. Я., Григорьев А. А., Покровский О. М. Информационное содержание данных космической дистанционной индикации параметров окружающей среды и природных ресурсов. Ленинград: ЛГУ, 1975. — 146 с.

- [4] *Смокий О. И.* Моделирование полей излучения в задачах космической спектрофотометрии. Ленинград: Наука, 1986. — 347 с.
- [5] *Смокий О. И., Гусейнов Г. А.* Информативность и оптимальные планы дистанционного спектрометрирования земной поверхности. Ленинград: СПИИРАН, 1992. — 73 с.
- [6] Математические методы исследования природных ресурсов Земли из космоса. Сборник статей. М.: Наука, 1984. — 176 с.