ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ В АПОСТЕРИОРНОМ ВЫВОДЕ НАД ИДЕАЛАМИ ЦЕПОЧЕК КОНЪЮНКЦИЙ

А.Л. Тулупьев♦ и Д.А. Никитин

Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН
199178, С.-Петербург, 14-я линия ВО, 39

<alt@iias.spb.su>

УДК 681.3
А. Л. Тулупьев и Д. А. Никитин. **Экстремальные задачи в апостериорном выводе над идеалами цепочек конъюнкций** // Труды СПИИРАН. Вып. 2, т. 2. — СПб.: Наука, 2005.
Аннотация. *Идеал цепочек конъюнкций с оценками вероятностей его элементов является одной из математических моделей фрагмента знаний с вероятностной неопределенностью. Цепи и сети таких идеалов являются математическим моделями баз фрагментов знаний и называются алгебраическим байесовскими сетями. В статье рассматриваются экстремальные задачи, возникающие при пропагации свидетельств и их кортежей (апостериорном выводе) в идеалах цепочек конъюнкций; предложено обобщение этого подхода на цепи и ациклические сети идеалов. Изначально возникающие задачи формулируются как задачи гиперболического программирования, но их удаётся свести к серии задач линейного программирования. В статье также описана индексация элементов идеала, позволяющая представить множество ограничений относительно оценок их вероятности на основе требований аксиоматики вероятностной логики, в виде, удобном для формальной записи рассматриваемых экстремальных задач.* — Библ. 16 назв.

UDC 681.3
*A. L. Tulupyev & D. A. Nikitin***. Extremal Tasks in à posteriori Inference over Conjunctions Chains Ideals** // SPIIRAS Proceedings. Issue 2, vol. 2. — SPb.: Nauka, 2005.
Abstract. *An ideal of conjunctions with a probabilistic estimates/assignment of its elements is one of the mathematical models of a knowledge pattern with probabilistic uncertainty. Chains and networks of such ideals are mathematical models of knowledge pattern bases; these models are referred to as algebraic Bayesian networks. We consider extremal tasks that appear in conjunction chains ideals when elementary evidence or a set of such evidence is propagated over them. This propagation is referred to as à posteriori inference. We also generalize our approach to evidence propagation onto chains of conjunctions ideals and acyclic networks of those ideals. Initially appearing extremal tasks are hyperbolic programming ones; but we manage to reduce them to linear programming tasks. We describe as well an indexation of ideal elements. This indexation allows to formally specify a set of constraints, originated from probabilistic logic axioms, over a conjunctions ideal. This formal specification allows a convenient notation of the extremal tasks under question.* — Bibl. 16 items.

---

1. Введение

Объектом настоящего исследования является особый вид математических моделей фрагментов знаний (ФЗ) и баз фрагментов знаний (БФЗ) с вероятностной неопределенностью — идеалы цепочек конъюнкций с оценками вероятностей истинности своих элементов и, соответственно, сети таких идеалов, которые называются алгебраическим байесовскими сетями (АБС).

Другим объектом исследования являются свидетельства: отдельные детерминированные свидетельства, их кортежи, недетерминированные свидетельства, кортежи недетерминированных свидетельств, кортежи недетерминированных свидетельств с неопределенностью. Отметим, во-первых, что оба вида кортежей недетерминированных свидетельств также представимы с по-

---

♦ Исследования, результаты которых представлены в настоящей работе, были частично поддержаны грантом Фонда содействия отечественным учёным за 2004 и 2005 гг.

мощью распределения оценок вероятностей над некоторым идеалом цепочек конъюнкций, а, во-вторых, рассматриваемый аппарат представления свидетельств позволяет учитывать их взаимную зависимость.

Процессы вывода в ФЗ и в АБС разделяются на:

- вывод непротиворечивых оценок истинности[1] (*поддержание непротиворечивости* ФЗ или АБС);
- вывод априорных оценок истинности новых элементов (*априорный вывод*)[2];
- вывод апостериорных оценок истинности при поступившем свидетельстве или их кортеже, а также оценка вероятности истинности этого свидетельства или кортежа над заданным ФЗ или АБС (*апостериорный вывод*);
- вывод эмпирических оценок показателей чувствительности (*анализ чувствительности*).

Предметом исследования настоящей работы будет являться апостериорный вывод в ФЗ и АБС при различных видах поступающих свидетельств и их кортежей, а *целью* исследования — описание возникающих в процессе вывода задач *гиперболического* (иначе — *дробно-линейного*) программирования (ЗГП) и способ их сведения к задачам *линейного* программирования (ЗЛП).

Ключевым моментом для данной работы явился частный результат, представленный в [7]. С помощью замены переменных в указанной публикации удалось свести задачу гиперболического программирования, возникающую при поступлении детерминированного свидетельства в ФЗ, построенный над двумя атомарными пропозициональными формулами, с интервальными оценками истинности элементов, к задаче линейного программирования. Этот же подход к замене переменных оказался применим и в иных случаях пропагации свидетельств и их кортежей; результаты применения этого подхода приводятся в настоящей работе.

Следует отметить, что полученные результаты было бы трудно изложить систематически без приводимого в начале статьи способа *«естественной» индексации* элементов идеала цепочек конъюнкций и *квантов*, задаваемых над некоторым множеством атомарных пропозициональных формул.

Отметим также, что настоящая работа развивает теорию алгебраических байесовских сетей, представленную, в частности, в ряде публикаций [1–10, 13]. Ключевые идеи апостериорного вывода в случае детерминированных свидетельств и точечных оценок истинности над идеалами цепочек конъюнкций и их сетями (т.е. над АБС) были даны впервые в [1]; затем переработаны, обобщены, формализованы и систематически изложены в [9].

Дальнейшее изложение состоит из нескольких разделов. В разделе 2 приводятся необходимые сведения из математической логики, вводится ряд обозначений и описывается способ индексации (перенумерации) цепочек конъюнк-

---

[1] Здесь речь идет о поиске *максимальных подпирающих интервальных оценок истинности*, которые были бы непротиворечивы. Ведутся также исследования в области формализации и изучения свойств *минимальных объемлющих интервальных оценок истинности*, которые были бы непротиворечивы. В последнем случае основной сложностью становится неединственность такого рода оценок.

[2] Отметим, что в силу большого сходства решаемых в процессе поддержания непротиворечивости и в процессе априорного вывода экстремальных задач, оба процесса объединяются под названием *синтез согласованных оценок истинности*.

ций. В разделе 3 вводится вероятность истинности пропозициональной формулы на основе подхода Н. Нильссона.

В разделе 4 вводится определение непротиворечивости оценок вероятности истинности над идеалом цепочек конъюнкций; рассматривается ряд примеров, связанных с формированием множества ограничений для выполнения процесса поддержания непротиворечивости. В разделе 5 с использованием индексации в формальном виде выписываются связи между вероятностными означиваниями различных классов цепочек конъюнкций; а в разделе 6 полученные результаты используются для представления в формальном виде множества ограничений, накладываемых аксиоматикой вероятностной логики на вероятности элементов идеалов.

В разделе 7 рассматривается особый случай работы с тензором условных вероятностей, когда его значение неопределенно, точнее, должно оцениваться интервалом [0;1].

В разделе 8 рассматриваются виды свидетельств и их кортежей, вводятся необходимые дополнительные обозначения. В разделе 9 разбираются ключевые примеры апостериорного вывода при детерминированных свидетельствах; а общий случай рассматривается в разделе 12. Раздел 10 содержит формулы для расчётов, необходимых в процессе апостериорного вывода, при кортеже недетерминированных свидетельств; а в разделе 11 рассматриваются экстремальные задачи апостериорного вывода, возникающие при наличии непоределенности в совокупности свидетельств. Раздел 13 содержит схематическое описание подхода к распростарнению свидетельств в цепях фрагментов знаний и ациклических алгебраических байесовских сетях.

Раздел 14 содержит выводы по настоящей работе, а также описание возможных направлений дальнейших исследований и развития программно-технологических разработок.

2. Основные обозначения и терминология

Пусть W — некоторое множество. Множество всех его подмножеств обозначаем 2^W.

Пусть l, m, n — некоторые целые числа. Запись $j = \overline{m(l)n}$ означает, что j пробегает множество целых чисел от m до n с шагом l. Например, $j = \overline{0(1)7}$ или $j = \overline{15(-1)0}$.

Правый нижний натуральный индекс после записи числа указывает систему счисления, в которой запись исполнена. Отсутствие индекса в записи числа означает использование десятичной системы счисления. Например, $5 = 101_2$, $111_2 = 7$, $1000_2 = 2^3 = 8$.

Далее используются следующие обозначения логических операций: $\wedge$ — конъюнкция, $\vee$ — дизъюнкция, $\oplus$ — исключающее или. Удвоение знака бинарной логической операции означает использование ее побитовой версии. Отрицание высказывания x обозначается чертой сверху: $\bar{x}$. Знак конъюнкции в цепочках конъюнкций может для краткости опускаться.

Пусть у нас имеется множество атомарных пропозициональных формул

$$A = \{x_1, \ldots, x_n\}.$$

С точки зрения нашей задачи мы считаем, что это — самые элементарные пропозициональные формулы; они представляют собой простейшие высказывания о предметной области, истинность которых нам удается оценить.
Введем обозначение аргументного места (или литерала, что является синонимом) $\tilde{x}$. Аргументное место может принимать одно из двух значений

$$\tilde{x} \in \{x, \bar{x}\},$$

где $x \in A$, а $\bar{x}$ – его логическое отрицание.

Набор всех возможных пропозициональных формул над A обозначим $F = F(A)$, а набор *квантов* — цепочек конъюнкций аргументных мест максимальной длины со всеми возможными означиваниями, обозначим как $Q = Q(A) = \{\tilde{x}_1 \tilde{x}_2 \ldots \tilde{x}_n\}$. Напомним, что символ операции конъюнкции $\wedge$ в цепочках, как правило, опускается.

Приведем формулировку теоремы о совершенной дизъюнктивной нормальной форме (СДНФ):

$$\forall (f \in F)\ \exists! (S_f \subseteq Q):\ f \equiv \bigvee_{q \in S_f} q.$$

Для удобства дальнейших рассуждений введем функцию

$$S : F \to 2^Q,$$

$$S(f) = S_f,$$

где S_f — множество квантов, участвующих в СДНФ пропозициональной формулы f.

Идеалом цепочек конъюнкций над заданным множеством атомарных формул назовем все непустые положительно-означенные цепочки конъюнкций атомарных пропозициональных формул:

$$C = C(A) = \left\{ x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k} : (i_1, i_2, \ldots, i_k) \in 2^{\{\overline{1(1)m}\}}, k = \overline{1(1)m} \right\}.$$

Отметим, что мы рассматриваем на самом деле *классы* цепочек конъюнкций: мы не различаем цепочки конъюнкций с одинаковым набором аргументных мест и/или атомарных пропозициональных формул. Отметим также, что определение идеала цепочек конъюнкций исключает из него пустую конъюнкцию.

По умолчанию считаем, что пустая конъюнкция эквивалентна тождественной истине: $e_\wedge \equiv \mathbf{T}$, а пустая дизъюнкция эквивалентна тождественной лжи: $e_\vee \equiv \mathbf{F}$.

Отметим, что для записи последовательности из n аргументных мест вида $\tilde{x}_i$ мы будем в допустимых случаях использовать обозначение

$$\tilde{X} = \tilde{X}_{[n]} = \tilde{x}_1 \ldots \tilde{x}_n.$$

Индекс в квадратных скобках опускается, если его значение в контексте очевидно. Аналогичное обозначение используется и для положительно-означенной цепочки конъюнкций:

$$X = X_{[n]} = x_1 \ldots x_n.$$

Индекс в квадратных скобках может быть опущен при тех же условиях.

Для упрощения понимания материала рассмотрим два примера.

<u>Пример 1</u> (два атома). Пусть

$$A = \{x_1, x_2\}.$$

ʊʦʫʜ ʳ ʉ ʽ ʀ ʀ ʈ ɸ ʅ . 2005. ʝ ʳ ʧ. 2. ʊ. 2. ISSN 2078-9181 (ʧʝʯ.), ISSN 2078-9599 (ʦʥʥʘʔʥ)
SPIIRAS Proceedings. 2005. Issue 2. V. 2. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

Тогда

$$Q = \{\tilde{x}_1\tilde{x}_2\} = \{x_1x_2, x_1\bar{x}_2, \bar{x}_1x_2, \bar{x}_1\bar{x}_2\};$$
$$C = \{x_1, x_2, x_1x_2\};$$
$$\tilde{X} = \tilde{x}_1\tilde{x}_2;$$
$$X = x_1x_2. \bullet$$

Пример 2 (три атома). Пусть

$$A = \{x_1, x_2, x_3\}.$$

Тогда

$$Q = \{\tilde{x}_1\tilde{x}_2\tilde{x}_3\} = \{x_1x_2x_3, x_1x_2\bar{x}_3, x_1\bar{x}_2x_3, x_1\bar{x}_2\bar{x}_3, \bar{x}_1x_2x_3, \bar{x}_1x_2\bar{x}_3, \bar{x}_1\bar{x}_2x_3, \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\};$$
$$C = \{x_1, x_2, x_3, x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3, x_1x_2x_3\};$$
$$\tilde{X} = \tilde{x}_1\tilde{x}_2\tilde{x}_3;$$
$$X = x_1x_2x_3. \bullet$$

3. Вероятность истинности пропозициональной формулы по Н. Нильссону

Заметим, что все множества элементарных событий (возможных миров) в нашей работе предполагаются конечными.

При введении вероятности истинности на пропозициональных формулах можно было бы ограничиться замечанием, что булева алгебра пропозициональных формул над заданным конечным множеством атомов изоморфна булевой алгебре над некоторым конечным множеством подмножеств некоторого заданного множества. Далее можно было бы утверждать, что поскольку вероятность может быть задана на булевой алгебре множества подмножеств некоторого множества, то она аналогично может быть задана на булевой алгебре пропозициональных формул. Однако этот подход не представляется нам достаточно конструктивным для достижения цели данной работы. Мы воспользуемся подходом Н. Нильссона [14, 15] (в [11, 12] содержится его более глубокая и строгая формализация), внесшего концепцию вероятностной логики в исследования по искусственному интеллекту.

Содержательно подход Н. Нильссона состоит в следующем. Дан конечный набор пропозициональных формул. Все возможные истинностные означивания этого набора назовем возможными мирами. Все непротиворечивые означивания назовем допустимыми мирами. Рассмотрим множество допустимых миров как множество элементарных событий. Зададим на нем распределение вероятностей, подчиняющихся двум требованиям: вероятности элементарных событий неотрицательны и сумма вероятностей всех элементарных событий равна единице. Тогда вероятностью истинности формулы будем считать сумму вероятностей тех допустимых миров, в которых она принимает значение «истина».

Коротко обратившись к работам [10, 11], следует заметить, что они дают не только более строгую формализацию подхода Нильссона, но также сравнивают вероятностные структуры на пропозициональных формулах со структурами, которые можно было бы построить в рамках теории Демпстера–Шеффера.

2005. ISSN 2078-9181, ISSN 2078-9599
SPIIRAS Proceedings. 2005. Issue 2. V. 2. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru