

# КАТЕГОРНАЯ МОДЕЛЬ КОМПЬЮТЕРНОЙ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ПРИКЛАДНЫХ ФОРМАЛИЗУЕМЫХ ТЕОРИЙ

Я.А. Ивакин

Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН

ivakin@mail.iias.spb.su

---

УДК 681.1.003

Я.А.Ивакин. Категорная модель компьютерной интерпретации прикладных формализуемых теорий // Труды СПИИРАН. Вып. 1, т. 3. — СПб: СПИИРАН, 2003.

**Аннотация.** В статье изложена концепция компьютерной интерпретации прикладных аксиоматических теорий, показаны возможности и ограничения в ее применении при создании наукоемкого программного обеспечения; разработана алгебраическая модель доказательства адекватности теории ее компьютерной интерпретации, сформулированы и доказаны необходимые и достаточные условия такой адекватности. — Библиограф. 7 назв.

UDK 681.1.003

Y.A. Ivakin. The categorical model of computer interpretation of applied formalized theories // SPIIRAS Proceedings. Issue 1, v. 3. — SPb: SPIIRAS, 2003.

**Abstract.** The state of the art review of bases for computer interpretation of applied formalized axiomatic theories; its advantages and restrictions when implemented in high-tech software for the information and management systems; development of the algebraic model of the theory adequacy evidence to its computer interpretation. — Bibl. 7 items.

---

## 1. Введение в проблему компьютерной интерпретации прикладных формализуемых теорий

Современное развитие научных исследований во всех областях практической деятельности человечества характеризуется повсеместным внедрением средств вычислительной техники. Возможность реализации прикладных задач на компьютере предопределяет прогресс в развитии практически любой сферы жизни общества. При этом все более возрастает необходимость сокращения времени между открытием, разработкой теоретических результатов и их внедрением в прикладное программное обеспечение. Не будет преувеличением считать, что при современном уровне автоматизации и информатизации общества прикладная теория ценна настолько - насколько она реализуема на компьютере.

Таким образом, наличие возможности скорейшего представления результатов любой прикладной формализуемой теории является определяющим фактором ее практической применимости, а как следствие и актуальности разработки самой теории. И наоборот: неотъемлемой частью технологического процесса создания любого вида программного обеспечения является формализация автоматизируемых задач, которая заключается в разработке и подборе математического аппарата из известных прикладных формализуемых теорий. За счет реализации такого подбора осуществляется переход от концептуальной модели предметной области прикладной задачи к модели ее решения. То есть, для каждой прикладной задачи соответствующая прикладная теория играет роль базисной основы ее формализации и разработки математического аппарата. Следовательно, компьютерная интерпретируемость теорий, как основа быстрого создания различных прикладных моделей программного обеспечения, на современном этапе развития информационных технологий, является важ-

нейшим показателем наличия возможности эффективной автоматизации соответствующих этим теориям предметных областей.

Необходимо конкретизировать, что в данном случае понимается под прикладными формализуемыми теориями. Под прикладными формализуемыми теориями в данной работе понимаются теории описывающие сущности, явления и зависимости соответствующих им предметных областей на количественном уровне (т.е. с введением количественной меры). Это означает, что из поля зрения этой работы выпадают сугубо алгебраические (не прикладные) теории (такие как, например, теория коммутативных колец с единицей, теория вещественно-замкнутых упорядоченных полей, теория полей характеристики нуль и др. [6]), а также гуманитарные, не формализуемые в принципе (Теории философского, медицинского, психолого-педагогического плана). При этом под аксиоматической теорией понимается некоторое непустое множество вида:

$$T = \langle L, A, H \rangle, \quad (1)$$

где: L — язык теории;  
A — аксиомы теории;  
H — теоремы теории.

Совокупность теорем представляет собой описание задач, решаемых в теории, укладываемых в рамки, сформулированные в виде системы аксиом, ограничений и допущений. Расширение (обобщение) теории возможно путем введения новых ограничений (аксиом) или заменой существующих общими.

Основная масса прикладных формализуемых теорий переживает несколько этапов своего становления [3]:

- разработка основ теории — этап обособления специфического научно-методического аппарата представления сущностей, явлений и зависимостей соответствующей предметной области;
- эволюция теории — этап характеризующийся бурным, зачастую не упорядоченным ростом теоретических результатов ;
- аксиоматизация теории — этап упорядоченного развития теории, с четким определением границ области применимости, ограничений и допущений.

Именно аксиоматическое представление теории является наиболее ценным для применения этой теории как основы разработки формального аппарата представления соответствующей предметной области. Это вытекает из возможности быстрого и однозначного соотнесения абстракций, системы ограничений и допущений математического аппарата, предлагаемого аксиоматической теорией с условиями предметной области. В силу этого в предлагаемой работе рассматриваются теории удовлетворяющие условию (1).

Типичным примером прикладной формализуемой теории является теория поиска подвижных объектов (ТППО), аксиоматическое представление которой дается в [1].

Дополнительно необходимо конкретизировать понятие “компьютерная интерпретация”. В широком смысле под интерпретацией [2] принято понимать истолкование, объяснение, перевод на более понятный, в содержательном плане, язык. В специальном смысле математической логики и теории моделей под термином “интерпретация “ принято понимать построение моделей для абстрактных, формальных систем (исчислений). [2] Опираясь на эти формулировки, представляется логичным определить компьютерную интерпретацию прикладной задачи как построение формальной модели задачи, которая может быть реализована на ЭВМ. Тогда, используя понимание прикладной формализуемой

теории, как основы моделирования соответствующих ей предметных областей, на основании понятия “модель” данное в работе [2] становится возможным дать следующее определение:

Компьютерная интерпретация прикладной формализуемой теории — совокупность программных реализаций основополагающих математических зависимостей и абстракций теории, позволяющих синтезировать заданное множество задач прикладной области.

Такое понимание компьютерной интерпретации теории определяет научно-методологический подход к решению рассматриваемой в данной работе задачи – таковым избран объектно-ориентированный подход, получивший в последние годы всеобщее признание при решении сложных задач автоматизации, компьютерного моделирования и изложенный, например, в [4].

Из приведенного определения виден двоякий смысл термина “интерпретация”: интерпретация как процесс и интерпретация как результат. В силу такой неоднозначности далее в работе процесс компьютерной интерпретации теории получил название — интерпретирование.

Практически интерпретирование прикладной теории, в рамках избранного подхода, представляет собой процессы декомпозиции ее логико-математического аппарата по основаниям прикладная математическая функция, класс, объект и дальнейшего сопоставления этим абстракциям адекватных программных моделей. Так, для избранной в качестве примера теории поиска подвижных объектов, можно привести такие варианты частных значений декомпозиции по указанным основаниям:

$$ТППО_{(прикл.мат.функция)} = \left\langle \text{поисковый потенциал; время обследования района; ...} \right\rangle$$

$$ТППО_{(класс)} = \left\langle \text{наблюдатель; цель; район; поисковая операция} \right\rangle;$$

$$ТППО_{(объект)} = \left\langle \text{поисковый вертолет МИ – 8; упавший самолет ИЛ – 62; Кадорское ущелье} \right\rangle.$$

Такое представление аналитического аппарата прикладных формализуемых теорий в совокупности с современными программными технологиями создания распределенных, кросс-платформенных приложений дает качественно новые технологические возможности по эффективному синтезу прикладного программного обеспечения. Обобщенно суть этой технологии показана на рис.1.

Она позволяет:

- решать принципиально более сложные, наукоемкие задачи, по сравнению с возможностями структурного подхода к разработке программного обеспечения;
- избежать многократного процесса кодирования сложных функций для наукоемких задач;
- обеспечить высокий уровень верификации программных средств, при относительном снижении трудозатрат на их разработку;
- резко сократить время разработки отдельных прикладных моделей, при обеспечении их междисциплинарного (т.е. базирующегося на нескольких

прикладных теориях) характера , при условии интерпретированности достаточного числа теорий;

- использовать все компоненты компьютерной интерпретации теории ( функции, классы, объекты) как в комплексе, так и по отдельности, в различных программных реализациях ( модули, DLL, агенты и пр.).

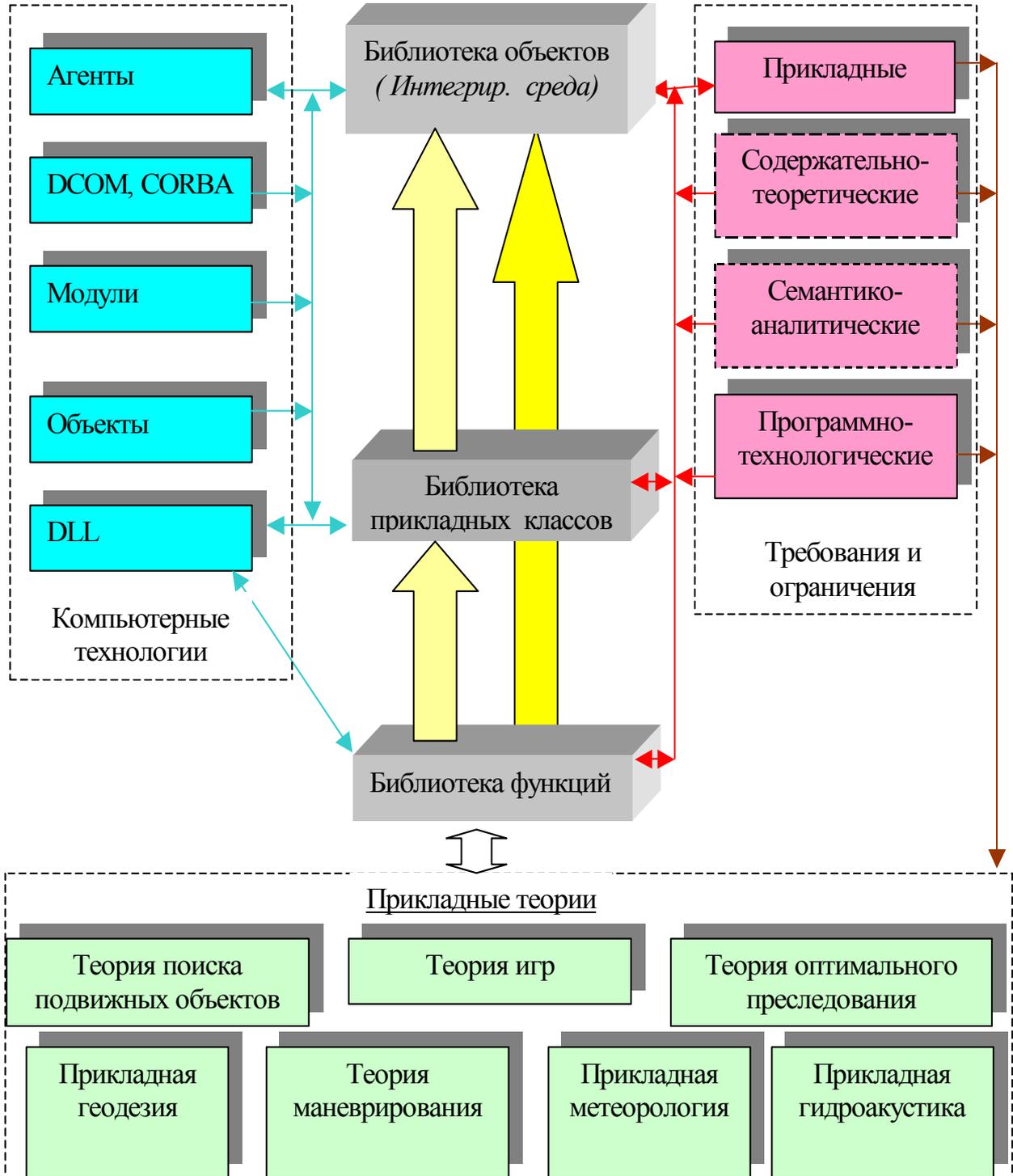


Рис.1. Технология моделирования на основе компьютерных интерпретаций прикладных теорий

Однако, широкое применение указанной технологии и, соответственно, методологии компьютерного интерпретирования на сегодняшний день, в научном плане, ограничено проблемой обоснования адекватности компьютерной интерпретации самой прикладной теории. Действительно, существуют принципиальные (теоретически значимые) ограничения в компьютерном (программном) представлении многих математических объектов. Наиболее характерными свойствами некоторых математических объектов, используемых в прикладных теориях, не имеющих прямой программной интерпретации или имеющих программную квазиинтерпретацию являются:

- непрерывность отрезков вещественной прямой ( $[a, b] \in \mathbb{R}$ ) или областей комплексной плоскости;
- бесконечность в назначении границ областей определения и значений различных функций ( $(-\infty, \infty); (-\infty, a], [b, \infty)$ );
- бесконечно малый характер шагов дифференцирования и численного интегрирования и другие.

Очевидно, что, имея объективно существующие погрешности в компьютерном представлении основополагающих математических объектов, при интерпретации сложных математических структур, с помощью которых в прикладных теориях описывают предметные связи и закономерности, разработчики программного обеспечения столкнутся с неконтролируемым ростом суперпозиции погрешности и несоответствия результатов программного и аналитического (т.е. "расчетного") моделирования. Именно в этом заключается проблема адекватности компьютерной интерпретации теории самой теории. При этом не существует определенной количественной меры, позволяющей анализировать и контролировать указанную неадекватность в компьютерном моделировании и представлении закономерностей предметной области по отношению к представлению этих закономерностей в самой теории.

То есть, на сегодняшний день видимое решение проблемы адекватности компьютерной интерпретации  $I(T)$  соответствующей прикладной аксиоматической теории  $T$  сводится к:

- 1).Необходимости теоретического доказательства принципиальной возможности обеспечения адекватности прикладных формализуемых теорий и их компьютерных интерпретаций.
- 2).Определению необходимых и достаточных условий наличия адекватности между теорией  $T$  и ее компьютерной интерпретацией  $I(T)$ .
- 3).Разработке научно-методологического аппарата количественного анализа адекватности теории  $T$  и ее компьютерной интерпретации  $I(T)$ .

## 2. Категорная модель компьютерной интерпретации

Решение выше представленных подзадач проблемы компьютерной интерпретации прикладных формализуемых теорий базируется на логико-алгебраическом рассмотрении сущности процесса компьютерного интерпретирования. При этом становится возможным применение ряда фундаментальных теоретических результатов формальной алгебры и математической логики, их междисциплинарных теорий (теории моделей, теории категорий и пр.) для математически строгого представления, количественного описания и системного анализа процесса компьютерного интерпретирования. Обобщенно логико-алгебраическое представление

алгебраическое представление компьютерной интерпретации показано на рис.2 и заключается в следующем:

1. Всякая прикладная теория вида (1) рассматривается как алгебраическая система вида:

$$T \Rightarrow S: \quad S = \langle R, Y, \Omega \rangle \quad (2)$$

где:  $R$  — класс всех логических утверждений, множеств определений и значений математических зависимостей теории описываемых теоремами  $H$ . Множества класса  $R$  определяются на одном из фундаментальных множеств ( $\mathfrak{R}$  - множество вещественных чисел,  $\mathbb{N}$  - множество натуральных чисел и пр.).

$Y$  — совокупность заданных операций на указанных множествах ;

$\Omega$  — множество отношений между множествами класса  $R$ .

В определении элементов выражения (2) использовано слово “класс” вместо слова “множество” для того, чтобы избежать парадоксов теории множеств, т.е. класс не есть множество, так как множество осознается в алгебраическом смысле как нечто единое, а класс нет. Вместе с тем, элемент  $a$  принадлежит некоторому классу  $A$  ( $a \in A$ ) если он удовлетворяет некоторому определению элементов этого класса [7]. Аналогично, в алгебраическом смысле, следует понимать термин “класс” ниже по тексту, не путая его с одноименной категорией объектно-ориентированного подхода.

Очевидно, что отношения  $\Omega = \langle \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_p \rangle$  есть алгебраическое представление соответствий, задаваемых между различными множествами системой теорем  $H$  из (1). То есть, в данном представлении рассматривается каждая зависимость, доказываемая в теореме  $h$  теории  $T$ , как отображение из соответствующего множества определения в соответствующее множество значений (логическое следствие одного утверждения из другого); система аксиом  $A$  определяет граничные условия указанных множеств и отношений (отображений) между ними; язык  $L$  является средством предметно-прикладной интерпретации формальной (т.е. математической) модели (2). При этом необходимо оговорить, что под отображением некоторого множества  $C$  в множество  $B$  понимается задаваемое по какому-либо правилу соответствие, такое, что каждому элементу  $x \in C$  соответствует элемент  $y \in B$ , причем только один.

2. Аналогично (2) рассматривается компьютерная интерпретация теории  $I(T)$ :

$$I(T) \Rightarrow S': \quad S' = \langle R', Y', \Omega' \rangle \quad (3)$$

Очевидно, что в силу выше перечисленных проблем программной интерпретации ряда свойств математических объектов справедливо:

$$R \neq R' \quad (4)$$

3. Отношения  $\omega_i \in \Omega$  и  $\omega'_i \in \Omega'$  рассматриваются как морфизмы, и тогда сами множества  $S$  и  $S'$  как категория, описывающая прикладную формализуемую категорию и категория, описывающая компьютерную интерпретацию, соответственно. Данное рассмотрение следует пояснить подробнее - в соответствии с определением категории из [7], считается, что категория  $S$  задана, если заданы:

- I. Класс  $Ob(S)$ , называемый классом объектов категории  $S$  (в нашем случае  $Ob(S) = R$ ), элементы которого называются объектами категории  $S$  и обозначаются буквами  $r', r'', \dots, r^i \dots$
- II. Для каждой пары объектов  $(r', r'')$  множество  $Mor_S(r', r'')$ , такое, что для различных пар объектов  $(r', r'') \neq (r^i, r^j)$  верно:

$$Mor_S(r', r'') \cap Mor_S(r^i, r^j) = \emptyset \quad (5)$$

(где  $\emptyset$  - пустое множество)

Элементы множества  $Mor_S(r', r'')$  называются морфизмами из  $r'$  в  $r''$  и обозначаются буквами  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_p$  (В нашем случае  $Mor_S(r', r'') = \Omega$ ).

- III. Для каждой тройки объектов  $(r', r'', r''')$  задано отображение:

$$Mor_S(r'', r') \times Mor_S(r', r''') \supset ((\omega_k, \omega_t) \rightarrow \omega_k \omega_t) \in Mor_S(r'', r''') \quad (6)$$

называемое умножением (или взятием композиции) морфизмов, для которого:

- 1.) выполняется закон ассоциативности:

$$\omega_k (\omega_t \omega_p) = (\omega_k \omega_t) \omega_p \quad (7)$$

для всех  $\omega_k \in Mor_S(r', r'')$ ,  $\omega_t \in Mor_S(r'', r''')$ ,  $\omega_p \in Mor_S(r''', r''''')$ .

- 2.) существуют тождественные морфизмы: для каждого объекта  $r \in Ob(S)$

существует морфизм  $1_r \in Mor_S(r', r')$ , называемый тождественным морфизмом для  $r'$ , такой что для всех  $\omega \in Mor_S(r', r'')$  верно:

$$\omega 1_{r'} = 1_{r''} \omega = \omega \quad (8)$$

Таким образом, представление теории (1) и ее компьютерной интерпретации, согласно выражениям (2) и (3), в категориальном виде является наиболее общим и позволяет рассмотреть любую аксиоматическую теорию или ее компьютерную интерпретацию, как некоторый класс множеств или утверждений (в зависимости от предметной области теории) и установленных связей между ними. Элементы указанного класса являются объектами категории ( $Ob(S) = R$  и  $Ob(S') = R'$ ), а связи установленные между ними (в виде отображений множеств, поэлементных соответствий, логических условий существования и пр.) есть морфизмы ( $Mor_S(r', r'') = \Omega$  и  $Mor_{S'}(r', r'') = \Omega'$ ).

В таком случае, компьютерное интерпретирование прикладной теории  $T$  можно рассмотреть как задание отображения  $\Phi$  множества  $\Omega$  в множество  $\Omega'$  при ранее определенном соответствии классов  $R$  и  $R'$ . Не трудно заметить, что такое отображение будет инъективным (т. е. оно различные элементы из  $\Omega$  отображает в различные элементы из  $\Omega'$ :

$\forall (\omega_1, \omega_2 \in \Omega \quad \omega_1 \neq \omega_2) \rightarrow \phi(\omega_1) \neq \phi(\omega_2)$ ), а при отсутствии специальных огра-

ничений они могут быть и сюръективными (т.е. в каждый элемент  $\Omega'$  отобра-

жаются хотя бы один элемент из  $\Omega : \forall \omega' \in \Omega' \exists \omega \in \Omega \rightarrow \phi(\omega) = \omega'$ ), а значит биективными (т.е. взаимно однозначным отображением множества  $\Omega$  на множество  $\Omega'$ ):

$$\Omega \leftrightarrow \Omega' : \{\phi(\omega_1), \phi(\omega_2), \dots, \phi(\omega_p)\} \quad (9)$$

4. Согласно терминологии теории категорий и функторов [5] такое отображение  $\Phi$  можно рассмотреть как задание связи между категориями  $S$  и  $S'$  в целом:

$$\Phi = \{\phi(\omega_1), \phi(\omega_2), \dots, \phi(\omega_p)\} \quad (10)$$

Связь между категориями, определенная как на уровне морфизмов, так и на уровне классов объектов категорий получила наименование [5] – функтор. Тогда компьютерное интерпретирование описывается алгебраически в виде функтора  $\Phi$ :

$$\Phi : \begin{cases} \forall r^i \in Ob(S) & \phi(r^i) \in Ob(S') \\ \forall \varpi \in Mor(r', r'') & \phi(\varpi) \in Mor(\phi(r'), \phi(r'')) \end{cases} \quad (11)$$

Таким образом, компьютерное интерпретирование теории  $T$  вида (1), на множественно-алгебраическом языке, есть процесс задания функтора  $\Phi$ , обеспечивающего эквивалентность в отображении:

$$\Phi : \Omega \leftrightarrow \Omega' \quad (12)$$

т.е. само понятие “эквивалентности” рассматривается в контексте данной работы как показатель неразличимости (схожести) каких-либо различных сущностей (Например, теории и ее компьютерной интерпретации) по некоторым специальным свойствам. Такое понимание эквивалентности позволяет рассматривать эквивалентность теории  $T$  и ее компьютерной интерпретации  $I(T)$  в алгебраическом смысле как изоморфность соответствующих категорий.

При рассмотрении выражений (9) – (12), в силу того, что само отображение  $\Phi = \{\phi_i\}$  задается на множестве морфизмов  $\{\omega(x_n)\}$  и  $\{\omega'(x_n)\}$ , эквивалентность в отображении (12) следует понимать как изоморфизм функтора  $\Phi$ :

$$\Phi = S \cong S' \Rightarrow [\Omega \cong \Omega'] \Rightarrow \phi(\omega_1 * \omega_2) = \phi(\omega'_1) \circ \phi(\omega'_2) \quad (13)$$

где  $\langle *, \circ \rangle$  - сопоставленные операции в категориях  $S$  и  $S'$ .

Из вышеприведенных рассуждений не трудно заметить, что:

$$T \rightarrow I(T) \Rightarrow (\Omega \leftrightarrow \Omega') \quad (14)$$

Содержательно это позволяет рассматривать изоморфизм функтора  $\Phi$ , задающего собой отображение  $(\Omega \leftrightarrow \Omega')$ , как условие взаимной однозначности свойств утверждений, алгебраических операций, отношений (морфизмов  $\{\omega_i\}, \{\omega'_i\}$  категорий  $S$  и  $S'$ ) в теории  $T$  и компьютерной интерпретации  $I(T)$  соответственно, при изменении (сужении) численных областей их задания  $R \rightarrow R'$  (т.е. сужении класса объектов  $Ob(S)$  до  $Ob(S')$ ). Здесь необходимо напомнить, что отношения в  $T$ , при рассмотрении ее в виде (2), задаются подмножеством теорем  $H$ . То есть, можно записать:

$$[\Omega \cong \Omega'] \Rightarrow (T \leftrightarrow I(T)) \quad (15)$$

Таким образом, разрешение проблемы адекватности (эквивалентности) компьютерной интерпретации  $I(T)$  самой прикладной аксиоматической теории  $T$  заключается в разработке и доказательстве необходимых и достаточных условий изоморфности функтора  $\Phi$ , в рамках выше приведенной алгебраической постановки. Исследование и разработка таких условий проводится в три этапа:

- I. Обоснование категориальной модели прикладной аксиоматической теории  $T$ .
- II. Построение категориальной модели компьютерной интерпретации прикладной аксиоматической теории  $I(T)$ .
- III. Разработка и доказательство теоремы о необходимых и достаточных условиях изоморфности теорий и их компьютерных интерпретаций (в понимании выражения (10)), на базе моделей полученных в рамках пп. I и II.

При этом условия существования изоморфизма  $[\Omega \cong \Omega']$  (изоморфности функтора  $\Phi$  по условию (13)) рассматриваются, как условия существования взаимно обратного гомоморфизма (гомоморфного отображения) между  $\Omega$  и  $\Omega'$ :

$$\exists (\omega_1(r''', r^i), \omega_2(r', r'') \in \Omega); (\omega'_1(r''', r^i), \omega'_2(r', r'') \in \Omega'): \begin{cases} \phi(\omega_1(r''', r^i)) * \omega_2(r', r'') \rightarrow \phi(\omega'_1(r''', r^i)) \circ \phi(\omega'_2(r', r'')) \\ \phi(\omega'_1(r''', r^i)) \circ \phi(\omega'_2(r', r'')) \rightarrow \phi(\omega_1(r''', r^i)) * \phi(\omega_2(r', r'')) \end{cases}$$

где:  $\langle r', r'', r''', r^i \rangle \in Ob(S)$ ;  $\langle \omega_1, \omega_2 \rangle \in Mor_S$ ;  $\langle \omega'_1, \omega'_2 \rangle \in Mor_{S'}$

$\langle *, \circ \rangle$  - сопоставленные операции в категориях  $S$  и  $S'$ .

Необходимо указать, что теоретическое разрешение описанной выше проблемы компьютерной интерпретации прикладных аксиоматических теорий позволит реализовать и развить объектно-ориентированный подход для случая сложно структурируемых, наукоемких предметных областей. В конечном итоге, это позволит обеспечить качественно новые возможности в развитии практических информационных технологий в наукоемких отраслях человеческой деятельности.

## Литература

1. Попович В.В. Моделирование, оценка эффективности и оптимизация систем наблюдения ВМФ (Теория поиска подвижных объектов) — СПб.: ВМА имени Н.Г.Кузнецова, 2000. — 424с.
2. Большой энциклопедический словарь. 2-е изд., перераб. и доп. — М.: "Большая Российская Энциклопедия", 1999. — 1456с.
3. Клайн М. Математика. Утрата определенности — М.: Мир, 1985. — 433с.
4. Буч Г. Объектно-ориентированный анализ и проектирование с примерами приложений на С++ — М.: "Издательство Бином", СПб.: "Невский диалект", 2000 — 560с.
5. Голдблатт Р. Топосы: категорный анализ логики — М., Мир, 1983 — 486с.
6. Кейслер Г., Чэн Ч.Ч. Теория моделей — М., Мир, 1977 — 614с.
7. Каш Ф. Модули и кольца — М., Мир, 1981 — 286с.

$$\Phi = [\Omega \cong \Omega'] \Rightarrow \phi(\omega_1 * \omega_2) = \phi(\omega_1) \circ \phi(\omega_2)$$

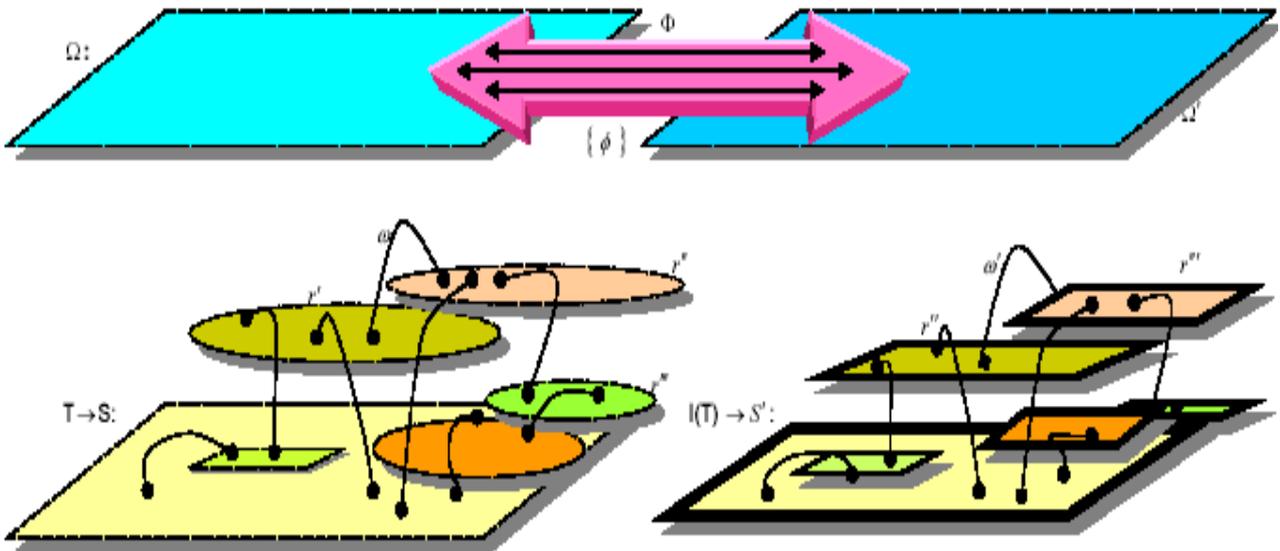


Рис.2. Категориальное представление компьютерного интерпретирования прикладной аксиоматической теории