ВЫЧИСЛЕНИЕ СОГЛАСОВАННЫХ ОЦЕНОК ИСТИННОСТИ В ВЕРОЯТНОСТНЫХ И НЕЧЕТКИХ ФРАГМЕНТАХ ЗНАНИЙ

А. Л. Тулупьев[1], Д. А. Никитин[2], М. Н. Ромашова[3],

Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН
199178, Санкт-Петербург, 14 линия В.О., д. 39
[1]alt@iias.spb.su, [2]nikitin@ipserve.com, [3]mromashova@ipserve.com

УДК 681.3
А. Л. Тулупьев, Д. А. Никитин, М. Н. Ромашова. **Вычисление согласованных оценок истинности в вероятностных и нечетких фрагментах знаний** // Труды СПИИРАН. Вып. 1, т. 2 — СПб: СПИИРАН, 2002.
Аннотация. *В настоящей статье описываются ФЗ с вероятностными оценками меры истинности и с классической мерой нечеткости. Рассматриваются процессы поддержания непротиворечивости и априорный вывод в таких ФЗ, а также вводится показатель, характеризующий устойчивость этих процессов.* — Библ. 7 назв.

UDC 681.3
A. L. Touloupiev, D. A. Nikitin, M. N. Romashova. **Truth measure values reconciliation in probabilistic and fuzzy knowledge patterns** // SPIIRAS Proceedings. Issue 1, v. 2. — SPb: SPIIRAS, 2002.
Abstract. *This paper describes knowledge pattern models with probabilistic and fuzzy measures of uncertainties. Knowledge pattern consistency maintenance and their stability indicator are considered.* — Bibl. 7 items.

При создании интеллектуальных систем специалистам зачастую приходится иметь дело с высказываниями экспертов, которые неточны, часто противоречивы и с трудом поддаются формализации. Ключевым приемом при рассмотрении неопределенности знаний является моделирование утверждения эксперта о предметной области с помощью пропозициональной формулы (ПФ) с приписыванием этой ПФ оценки истинности. Дж. Пиэрл [6] установил, что эксперт в своих рассуждениях обычно использует правила, содержащие не более двух — трех элементарных утверждений (атомарных пропозиций). Городецкий В.И. ввел понятие фрагмента знаний (ФЗ) — элемента базы знаний, который является представлением правил, которыми пользуется эксперт в своих рассуждениях [1, 5]. Фрагменты знаний с различными оценками истинности его элементов объединяются некоторым непротиворечивым образом в структурированные сети фрагментов знаний (ССФЗ) [5]. Можно рассматривать ССФЗ гомогенного и гетерогенного вида. Примерами гомогенных ССФЗ могут служить АБС, где ФЗ содержат сведения о тензорах совместных вероятностей, БСД (тензоры условной вероятности) и ССФЗ, построенная на основе ФЗ, где аксиоматика меры истинности определена одной из нечетких логик. Гетерогенная ССФЗ будет содержать ФЗ с различной аксиоматизацией меры истинности — то есть, производить агрегирование неоднородных моделей знаний, что позволит совместно использовать выразительную мощность различных аппаратов представления неопределенности.

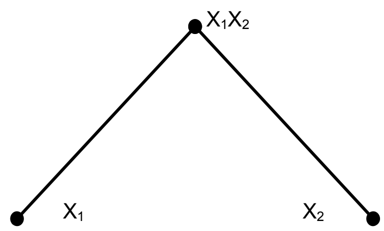

Рис. 1. ФЗ второго порядка

Можно выделить три основных подхода к введению меры неопределенности истинности. Они осуществляются в рамках трех теорий: теории вероятностей, теории нечеткости и теории доверия и правдопободобия (теория Демпстера-Шейфера). Первые две позволяют приписать пропозициональной формуле меру вероятности или нечеткости ее истинности, как величину, принимающую значения из промежутка [0;1], или оценку на значения этой величины, являющейся замкнутым подпромежутком интервала [0;1]. В первом случае говорят о точечной мере истинности пропозициональной формулы, во втором — об интервальной мере. Есть несколько способов введения вероятности на пропозициональных формулах [5]. В свою очередь мера нечеткости на ПФ вводится как показано в [4].

При рассмотрении ФЗ возникают следующие задачи: поддержание непротиворечивости, априорный вывод и апостериорный вывод [2]. Процесс поддержания непротиворечивости состоит в уточнении оценок мер истинности для элементов ФЗ. Априорный вывод во многом подобен процессу поддержания непротиворечивости, отличие состоит лишь в том, что уточняются не меры истинности элементов ФЗ, а мера истинности некоторой ПФ не вошедшей в ФЗ, но построенной над его атомарными пропозициональными формулами. Апостериорный вывод представляет собой процесс пересчета мер истинности элементов ФЗ или мер истинности ПФ на основе поступивших свидетельств. Первые две задачи объединяются под общим названием синтеза согласованных оценок истинности.

Рассмотрим математическую постановку задачи синтеза. Сначала обратимся к процессу поддержания непротиворечивости для ФЗ с вероятностными оценками меры истинности. Обозначим фрагмент знаний второго порядка (рис. 1.) с вероятностными оценками $\{x_1, x_2\}_p^{\Delta}$, где x_1, x_2 — атомарные пропозициональные формулы, а ФЗ с нечеткой мерой истинности — $\{x_1, x_2\}_{\mu}^{\Delta}$ (рис. 1.). Множество ограничений формируется из аксиом вероятностей (АВ) и ограничений, накладываемых предметной областью. Рассмотрим более детально множество ограничений АВ. Они имеют вид $p(\widetilde{X}) \geq 0,$ где $\widetilde{X}$ — конъюнкция максимальной длины и $\sum_{\widetilde{X}} p(\widetilde{X}) = 1$. Для нашего случая система ограничений примет вид:

$$\begin{cases} p(x_1 x_2) \geq 0, \\ p(\bar{x}_1 x_2) \geq 0, \\ p(x_1 \bar{x}_2) \geq 0, \\ p(\bar{x}_1 \bar{x}_2) \geq 0, \\ p(x_1 x_2) + p(\bar{x}_1 x_2) + p(x_1 \bar{x}_2) + p(\bar{x}_1 \bar{x}_2) = 1. \end{cases}$$

Эти ограничения переписываются для положительно означенных цепочек.

$$\begin{cases} p(x_1 x_2) \geq 0, \\ p(x_2) - p(x_1 x_2) \geq 0, \\ p(x_1) - p(x_1 x_2) \geq 0, \\ 1 - p(x_1) - p(x_2) + p(x_1 x_2) \geq 0. \end{cases}$$

К этим ограничениям добавляются ограничения из предметной области вида:

$$\begin{cases} \breve{p}(x_1) \le p(x_1) \le \hat{p}(x_1), \\ \breve{p}(x_2) \le p(x_2) \le \hat{p}(x_2), \\ \breve{p}(x_1 x_2) \le p(x_1 x_2) \le \hat{p}(x_1 x_2), \end{cases}$$

где $\hat{p}(x_i)$, $\breve{p}(x_i)$ есть верхние и нижние оценки, полученные от эксперта для $p(x_i)$, а $\hat{p}(x_1 x_2)$ и $\breve{p}(x_1 x_2)$ — есть верхняя и нижняя оценки для $p(x_1 x_2)$. Для постановки ЗЛП необходимо указать вид целевой функции. В процессе поддержания непротиворечивости целевая функция представляет собой оценку вероятности истинности элементов ФЗ. Для априорного вывода целевая функция представляет собой линейную комбинацию оценок вероятностей истинности элементов ФЗ. Рассмотрим задачи, возникающие в процессе поддержания непротиворечивости на конкретном примере. Пусть оценки вероятности истинности для элементов ФЗ полученные от эксперта (ограничения предметной области D) имеют вид:

$$\begin{cases} 0{,}60 \le p(x_1) \le 0{,}80, \\ 0{,}75 \le p(x_2) \le 0{,}85, \\ 0{,}80 \le p(x_1 x_2) \le 0{,}95, \end{cases}$$

ограничения, накладываемые АВ (A), как указывалось ранее, выглядят следующим образом:

$$\begin{cases} p(x_1 x_2) \ge 0, \\ p(x_1) - p(x_1 x_2) \ge 0, \\ p(x_2) - p(x_1 x_2) \ge 0, \\ 1 - p(x_1) - p(x_2) + p(x_1 x_2) \ge 0. \end{cases}$$

Пусть целевая функция (ЦФ) имеет вид $g(x_1, x_2) = p(f)$, где $f \in \{x_1, x_2\}_p^{\Delta}$. Решая пару ЗЛП вида $\max(\min) g(x_1, x_2)$ при условии $D \cup A$, получим верхнюю и нижнюю оценку вероятности истинности для каждого элемента ФЗ:

$$\begin{cases} 0{,}80 \le p(x_1) \le 0{,}80, \\ 0{,}80 \le p(x_2) \le 0{,}85, \\ 0{,}80 \le p(x_1 x_2) \le 0{,}80. \end{cases}$$

Процесс априорного вывода отличается от процесса поддержания непротиворечивости лишь видом целевой функции, т.е. уточнение оценок вероятности истинности производиться для некоторой пропозициональной формулы, вероятность истинности которой можно представить в виде линейной комбинации вероятностей истинности элементов ФЗ.

Теперь рассмотрим процесс поддержания непротиворечивости для ФЗ с классической мерой нечеткости. Аксиомы классической меры нечеткости, будучи переписанными, для элементов ФЗ примут следующий вид:

$$\begin{cases} \mu(x_1 x_2 \ldots x_n) \ge 0, \\ 1 - \mu(x_i) \ge 0, \forall i = \overline{1,n}, \\ \min\{\mu(x_i), \mu(x_j)\} - \mu(x_i x_j) = 0, \text{где } i \ne j, \;\; i, j = \overline{1,n}, \\ \ldots \\ \min\{\mu(x_1), \ldots, \mu(x_n)\} - \mu(x_1 \ldots x_n) = 0. \end{cases}$$

Труды СПИИРАН. 2002. Вып. 1. Т. 2. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2002. Issue 1. V. 2. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

Кроме того, могут быть наложены ограничения предметной области, которые представляются в виде $\breve{\mu}(f) \le \mu(f) \le \hat{\mu}(f),$ где $f \in \{x_1, x_2\}_{\mu}^{\Delta}$. Так как первые ограничения не являются линейными, предлагается рассматривать множества ограничений при различных перестановках $\mu(x_{i_1}) \le \mu(x_{i_2}) \le \ldots \le \mu(x_{i_n})$. Таким образом, чтобы избавиться от этого нелинейного компонента вместо одной задачи с нелинейными ограничениями вводим несколько ($n!$) ЗЛП. Целевые функции строятся аналогично вероятностному случаю как для процесса поддержания непротиворечивости, так и для апостериорного вывода. Например, если во ФЗН выводится ПФ вида $x_1 \supset x_2$, то, используя разложение в СДНФ, меру истинности данной формулы можно выразить через меры истинности элементов ФЗН следующим образом: $\mu(x_1 \supset x_2) = \mu(\overline{x}_1 x_2)$. Если на меру истинности пропозициональной формулы были наложены ограничения, например $0.5 \ge \mu(x_1 \supset x_2) \ge 0.1$, то в ограничения предметной области будут введены еще два неравенства. Аналогично, целевая функция примет вид: $\min(\mu(x_2), 1 - \mu(x_1))$.

Практический интерес к интеллектуальным системам, базы знаний которых и моделируются при помощи ССФЗ, ставит вопрос об устойчивости процесса уточнения оценок, полученных от экспертов. В общем смысле под устойчивостью мы будем понимать количественное или качественное характеристическое изменение результата по отношению к исходным данным.

Знания об устойчивости того или иного вычислительного процесса имеют прямое практическое значение. Если колебания результата велики по сравнению с вариацией исходных данных, то для получения результата с приемлемой точностью приходится требовать исходных данных с относительно более высокой степенью точности.

Распространяя понятие устойчивости на процесс априорного вывода, определим ее следующим образом. Пусть у нас имеется в ФЗ формула *f,* меру истинности которой мы можем выразить через меры истинности элементов ФЗ. Предположим, что мы некоторым образом проварьировали исходные значения мер истинности элементов ФЗ. Нас будут интересовать только те изменения начальных данных, при которых ФЗ остается непротиворечивым (т.е. мы рассматриваем лишь класс допустимых вариаций). Очевидно, что мера истинности формулы *f* с новыми, проварьированными оценками, в общем случае будет отличаться от меры истинности, полученной при исходных оценках. Если полученная после изменения начальных данных мера истинности формулы *f* не слишком отличается от первоначальной, то процесс априорного вывода признается устойчивым. Выбирая в качестве метрики, необходимой для оценки изменения результата и исходных данных, стандартную метрику — максимум абсолютных величин разности значений исходных данных и абсолютную величину разности оценок истинности результата — мы приходим к тому, что для определения показателей устойчивости априорного вывода необходимо решить две ЗЛП по нахождению максимума и минимума, оценить и выбрать максимум из абсолютных значений этих двух величин.

Рассмотрим введенный показатель устойчивости более подробно на двухэлементном ФЗ с точечными оценками. Выразив вероятность истинности данной пропозициональной формулы через вероятности истинности элементов ФЗ, представленной в виде СДНФ, получим:

1) для вероятностной меры:

$$p(x_1 \supset x_2) = 1 - p(x_1) + p(x_1 x_2),$$
$$\hat{p}(x_1 \supset x_2) = 1 - \hat{p}(x_1) + \hat{p}(x_1 x_2);$$

2) для нечеткой меры:

$$\mu(x_1 \supset x_2) = \mu(\overline{x}_1 x_2),$$
$$\hat{\mu}(x_1 \supset x_2) = \hat{\mu}(\overline{x}_1 x_2),$$

где $p(x_1), p(x_2), p(x_1 x_2)$ — вероятностные, $\mu(x_1), \mu(x_2), \mu(x_1 x_2)$ — нечеткие меры истинности элементов рассматриваемого фрагмента знаний, а $\hat{p}(x_1), \hat{p}(x_2), \hat{p}(x_1 x_2), \hat{\mu}(x_1), \hat{\mu}(x_2), \hat{\mu}(x_1 x_2)$ — проварьированные оценки мер истинности соответствующих элементов фрагмента знаний. Полученный в результате варьирования ФЗ, как и исходный, должен быть непротиворечивым, т.е. должны выполняться аксиомы выбранного представления неопределенности (теории вероятности или теории нечеткости) как для исходных оценок истинности элементов ФЗ, так и для проварьированных. Далее для краткости вероятностную меру истинности и нечеткую меру истинности будем обозначать ν. Полученное множество ограничений, накладываемых аксиомами, обозначим A_ν^2. Кроме того, нас интересуют те изменения исходных данных, при которых $\rho(\nu, \hat{\nu}) \le \varepsilon,\ \varepsilon > 0$, где ρ — некоторая метрика. Выберем в качестве ρ максимум модуля разности. Тогда, прежде всего, должны соответственно выполняться следующие условия: $\max\limits_{f \in \{x_1, x_2\}_\nu^\Delta} \left|\nu(f) - \hat{\nu}(f)\right| \le \varepsilon$. Множество ограничений, полученное при раскрытии этого условия, обозначим $E_{\nu,\varepsilon}^2$. Введем дополнительное обозначение $E_\nu^2 = A_\nu^2 \cup E_{\nu,\varepsilon}^2$. Нас интересует следующая величина, которая показывает, насколько изменилась мера истинности формулы *f* при изменении исходных данных: $\left|\nu(x_1 \supset x_2) - \hat{\nu}(x_1 \supset x_2)\right|$. Для того чтобы оценить указанную величину, необходимо решить следующие задачи линейного программирования:

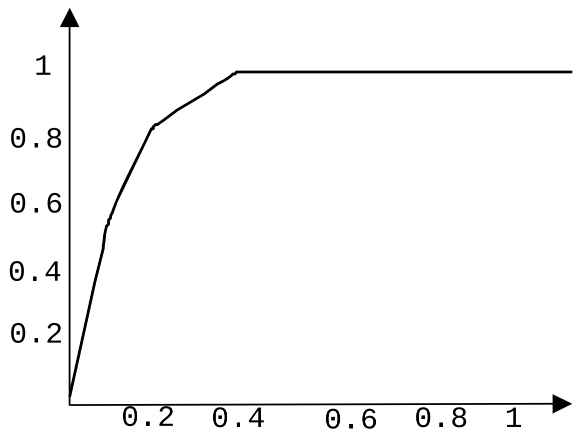

Рис. 2. Количественная характеристика устойчивости для формулы $f = x_1 \vee x_2 \vee x_3$

$$\max(\hat{\nu}(x_1 \supset x_2) - \nu(x_1 \supset x_2)),$$
$$\min(\hat{\nu}(x_1 \supset x_2) - \nu(x_1 \supset x_2)),$$

где вместо $\nu(x_1 \supset x_2)$ и $\hat{\nu}(x_1 \supset x_2)$ используются правые части разложения в СДНФ. В качестве множества ограничений рассматриваем множество E_ν^2, введенное выше. Исходя из построения множества ограничений, эти ЗЛП всегда будет иметь решение. Тогда интересующая нас оценка следующая:

$$\left|\nu(x_1 \supset x_2) - \hat{\nu}(x_1 \supset x_2)\right| =$$
$$\max\left\{\left|\max(\hat{\nu}(x_1 \supset x_2) - \nu(x_1 \supset x_2))\right|,\ \left|\min(\hat{\nu}(x_1 \supset x_2) - \nu(x_1 \supset x_2))\right|\right\}.$$

В [7] рассматривается ФЗ третьего порядка $\{x_1, x_2, x_3\}_p^\Delta$. Над ним показатель устойчивости для $f = x_1 \vee x_2 \vee x_3$ имеет вид

Труды СПИИРАН. 2002. Вып. 1. Т. 2. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2002. Issue 1. V. 2. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

$$|\nu(x_1 \vee x_2 \vee x_3) - \hat{\nu}(x_1 \vee x_2 \vee x_3)| =$$
$$\max\{|\max(\hat{\nu}(x_1 \vee x_2 \vee x_3) - \nu(x_1 \vee x_2 \vee x_3))|, |\min(\hat{\nu}(x_1 \vee x_2 \vee x_3) - \nu(x_1 \vee x_2 \vee x_3))|\}.$$

Зависимость конечного результата от вариации исходных данных имеет кусочно-линейный вид (рис. 2.)

Таким образом, в случае вероятностных и некоторых нечетких мер истинности вычисление согласованных оценок и расчет показателей их устойчивости относительно допустимых вариаций исходных данных приводит к решению ряда задач линейного программирования. Следует отметить, что функция зависимости колебания результата априорного вывода от колебаний исходных данных [7] (мер истинности элементов ФЗ) имеет кусочно-линейный вид.

Литература

[1] *Городецкий В. И., Тулупьев А. Л.* Алгебраические байесовские сети для представления и обработки знаний с неопределенностью // 4-я Санкт-Петербургская конференция региональная информатика-95: Тезисы докладов, ч.1. — СПб: СПИИРАН, 1995. — с. 51–52.

[2] *Городецкий В. И., Тулупьев А.Л.* Формирование непротиворечивых баз знаний с неопределенностью // РАН. Известия академии наук. Теория и системы управления. № 5 (1997). — с. 33–42.

[3] *Крейнович В. Я., Нгуен Х. Т. и Городецкий В. И., Нестеров В. М., Тулупьев А. Л.* Применение интервальных степеней доверия: аналитический обзор // Интеллектуальные методы и информационные технологии. Выпуск № 3 — СПб: СПИИРАН, 1999. — с. 6–61.

[4] *Тулупьев А. Л.* Поддержание непротиворечивости фрагмента знаний с интервальной нечеткой мерой оценки неопределенности // Теоретические основы и прикладные задачи интеллектуальных информационных технологий. — СПб: СПИИРАН, 1998. — с. 82–92.

[5] *Тулупьев А. Л.* Алгебраические байесовские сети: логико-вероятностый подход к моделированию баз знаний с неопределенностью // СПб: СПИИРАН, 2000. — 292 с.

[6] *Pearl J*. Fusion, Propagation, and Structuring in Belief Networks // Artificial Intelligence vol. 29. — 1986. — pp. 241–288.

[7] *Никитин Д*. А., *Ромашова М. Н., Лакомов Д. П., Тишков А. В., Тулупьев А. Л.* Априорный и апостериорный вывод на элементе структурированной сети фрагментов знаний, геометрическое представление фрагментов знаний // 6-я Санкт-Петербургская конференция региональная информатика–2000: Тезисы конференции. — СПб: СПОИСУ, 2001. — с. 112–116.