

ISSN 1684-8853 (print); ISSN 2541-8610 (online)

# ИНФОРМАЦИОННО- УПРАВЛЯЮЩИЕ СИСТЕМЫ

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

1(98)/2019

**Founder**

«Information and Control Systems», Ltd.

**Publisher**Saint-Petersburg State University  
of Aerospace Instrumentation**Editor-in-Chief**

M. Sergeev

Dr. Sc., Professor, Saint-Petersburg, Russia

**Deputy Editor-in-Chief**

E. Krouk

Dr. Sc., Professor, Moscow, Russia

**Executive secretary**

O. Muravtsova

**Editorial Board**

S. Andreev

PhD, Tampere, Finland

V. Anisimov

Dr. Sc., Professor, Saint-Petersburg, Russia

B. Bezruchko

Dr. Sc., Professor, Saratov, Russia

N. Blaunstein

Dr. Sc., Professor, Beer-Sheva, Israel

C. Christodoulou

PhD, Professor, Albuquerque, New Mexico, USA

A. Dudin

Dr. Sc., Professor, Minsk, Belarus

I. Dumer

PhD., Professor, Riverside, USA

M. Favorskaya

Dr. Sc., Professor, Krasnoyarsk, Russia

L. Fortuna

PhD, Professor, Catania, Italy

A. Fradkov

Dr. Sc., Professor, Saint-Petersburg, Russia

A. Hramov

Dr. Sc., Professor, Indianapolis, Russia

L. Jain

PhD, Professor, Canberra, Australia

V. Khimenko

Dr. Sc., Professor, Saint-Petersburg, Russia

G. Maltsev

Dr. Sc., Professor, Saint-Petersburg, Russia

G. Matvienko

Dr. Sc., Professor, Tomsk, Russia

V. Melekhin

Dr. Sc., Professor, Saint-Petersburg, Russia

A. Myllari

PhD, Professor, Grenada, West Indies

Y. Podoplyokin

Dr. Sc., Professor, Saint-Petersburg, Russia

J. Seberry

PhD, Professor, Wollongong, Australia

A. Shalyto

Dr. Sc., Professor, Saint-Petersburg, Russia

A. Shelupanov

Dr. Sc., Professor, Tomsk, Russia

A. Shepeta

Dr. Sc., Professor, Saint-Petersburg, Russia

Yu. Shokin

RAS Academician, Dr. Sc., Novosibirsk, Russia

A. Smirnov

Dr. Sc., Professor, Saint-Petersburg, Russia

T. Sutikno

PhD, Associate Professor, Yogyakarta, Indonesia

Z. Yuldashev

Dr. Sc., Professor, Saint-Petersburg, Russia

R. Yusupov

RAS Corr. Member, Dr. Sc., Professor, Saint-Petersburg, Russia

A. Zeifman

Dr. Sc., Professor, Vologda, Russia

**Editor:** A. Larionova**Proofreader:** T. Zvertanovskaia**Design:** M. Chernenko, Y. Umnitsina**Layout and composition:** Y. Umnitsina**Contact information**

The Editorial and Publishing Center, SUAI

67, B. Morskaia, 190000, St. Petersburg, Russia

Website: <http://i-us.ru/en>, e-mail: [i.us.spb@gmail.com](mailto:i.us.spb@gmail.com)

Tel.: +7 - 812 494 70 02

The Journal was registered in the Ministry of Press,  
Broadcasting and Mass Media of the Russian Federation.  
Registration Certificate JD № 77-12412 from April, 19, 2002.  
Re-registration in the Federal Service for Supervision in the Sphere of Telecom,  
Information Technologies and Mass Communications (ROSKOMNADZOR)  
due to change of the founder: «Information and Control Systems», Ltd.,  
JD № FS77-49181 from March, 30, 2012.  
© Corporate authors, 2019

**THEORETICAL AND APPLIED MATHEMATICS****Balonin N. A., Sergeev M. B.** *Helping Hadamard conjecture to become a theorem. Part 2* 2**Vassiliev N. N., Duzhin V. S., Kuzmin A. D.** *Investigation of properties of equivalence classes of permutations by inverse Robinson – Schensted – Knuth transformation* 11**INFORMATION PROCESSING AND CONTROL****Gorodetskiy A. E., Kurbanov V. G., Tarasova I. L.** *Safe control of SEMS in group interaction* 23**INFORMATION AND CONTROL SYSTEMS****Rozhdestvenskaya K. N.** *Temporal analysis of a control system in a data processing network* 32**INFORMATION CODING AND TRANSMISSION****Morozov R. A., Trifonov P. V.** *Compact specification of polar codes* 40**Sorokin A. V., Shepeta A. P., Nenashev V. A., Wattimena G. M.** *Comparative characteristics of anti-collision processing of radio signal from identification tags on surface acoustic waves* 48**STOCHASTIC DYNAMICS AND CHAOS****Monakov A. A.** *Statistical characteristics of the mean level of an elite group utility in selection* 57**INFORMATION CHANNELS AND MEDIUM****Sergeev A. M., Blaunstein N. Sh.** *Evolution of multiple-access networks – cellular and non-cellular – in historical perspective. Part 4* 65**Savischenko N. V., Lebeda E. V.** *Multi-position signal coherent reception error probability in a channel with generalized gamma or K fading and white noise* 76**CONTROL IN MEDICAL AND BIOLOGICAL SYSTEMS****Sitnikova E. Yu., Smirnov K. S., Grubov V. V., Hramov A. E.** *Diagnostic principles of immature epileptic (proepileptic) EEG activity in rats with genetic predisposition to absence epilepsy* 89**BRIEF SCIENTIFIC REPORTS****Lyandres V.** *Mobile network synthesis strategy* 98**INFORMATION ABOUT THE AUTHORS** 102Submitted for publication 27.12.18. Passed for printing 14.02.19. Format 60×84<sub>1/8</sub>.  
Phototype SchoolBookC. Digital printing.Layout original is made at the Editorial and Publishing Center, SUAI,  
67, B. Morskaia, 190000, St. Petersburg, Russia  
Printed from slides at the Editorial and Publishing Center, SUAI,  
67, B. Morskaia, 190000, St. Petersburg, Russia

The journal is distributed by subscription. Subscription can be made in the Editorial and publishing center, SUAI as well as in any post office based on «Rospechat» catalogue: № 15385 — semiannual subscript.

1(98)/2019

РЕЦЕНЗИРУЕМОЕ ИЗДАНИЕ

ИНФОРМАЦИОННО-  
УПРАВЛЯЮЩИЕ  
СИСТЕМЫ

## Учредитель

ООО «Информационно-управляющие системы»

## Издатель

Санкт-Петербургский государственный университет

аэрокосмического приборостроения

## Главный редактор

М. Б. Сергеев,

д-р техн. наук, проф., Санкт-Петербург, РФ

## Зам. главного редактора

Е. А. Крук,

д-р техн. наук, проф., Москва, РФ

## Ответственный секретарь

О. В. Муравцова

## Редакционная коллегия:

С. Д. Андреев,

канд. техн. наук, Тампере, Финляндия

В. Г. Анисимов,

д-р техн. наук, проф., Санкт-Петербург, РФ

Б. П. Безручко,

д-р физ.-мат. наук, проф., Саратов, РФ

Н. Блаунштейн,

д-р физ.-мат. наук, проф., Беэр-Шева, Израиль

Л. С. Джайн,

д-р наук, проф., Канберра, Австралия

А. Н. Дудин,

д-р физ.-мат. наук, проф., Минск, Беларусь

И. И. Думер,

д-р наук, проф., Риверсайд, США

А. И. Зейфман,

д-р физ.-мат. наук, проф., Вологда, РФ

К. Кристодолу,

д-р наук, проф., Альбукерке, Нью-Мексико, США

Г. Н. Мальцев,

д-р техн. наук, проф., Санкт-Петербург, РФ

Г. Г. Матвиенко,

д-р физ.-мат. наук, проф., Томск, РФ

В. Ф. Мелехин,

д-р техн. наук, проф., Санкт-Петербург, РФ

А. А. Мюллари

д-р наук, профессор, Гренада, Вест-Индия

Ю. Ф. Подоплёкин,

д-р техн. наук, проф., Санкт-Петербург, РФ

Д. Себерри,

д-р наук, проф., Волонгонг, Австралия

А. В. Смирнов,

д-р техн. наук, проф., Санкт-Петербург, РФ

Т. Сутикнуу

д-р наук, доцент, Джакарта, Индонезия

М. Н. Фаворская,

д-р техн. наук, проф., Красноярск, РФ

Л. Фортуна,

д-р наук, проф., Катания, Италия

А. Л. Фрадков,

д-р техн. наук, проф., Санкт-Петербург, РФ

В. И. Хименко,

д-р техн. наук, проф., Санкт-Петербург, РФ

А. Е. Храмов,

д-р физ.-мат. наук, Иннополис, РФ

А. А. Шальто,

д-р техн. наук, проф., Санкт-Петербург, РФ

А. А. Шелупанов,

д-р техн. наук, проф., Томск, РФ

А. П. Шепета,

д-р техн. наук, проф., Санкт-Петербург, РФ

Ю. И. Шокин,

акад. РАН, д-р физ.-мат. наук, проф., Новосибирск, РФ

З. М. Юлдашев,

д-р техн. наук, проф., Санкт-Петербург, РФ

Р. М. Юсупов,

чл.-корр. РАН, д-р техн. наук, проф., Санкт-Петербург, РФ

Редактор: А. Г. Ларионова

Корректор: Т. В. Звертановская

Дизайн: М. Л. Черненко, Ю. В. Умницына

Компьютерная верстка: Ю. В. Умницына

Адрес редакции: 190000, Санкт-Петербург,

Б. Морская ул., д. 67, ГУАП, РИЦ

Тел.: (812) 494-70-02, эл. адрес: ius.spb@gmail.com,

сайт: http://i-us.ru

Журнал зарегистрирован в Министерстве РФ по делам печати,

телерадиовещания и средств массовых коммуникаций.

Свидетельство о регистрации ПИ № 77-12412 от 19 апреля 2002 г.

Перерегистрирован в Роскомнадзоре.

Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-49181 от 30 марта 2012 г.

© Коллектив авторов, 2019

## ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

**Балонин Н. А., Сергеев М. Б.** Как гипотезе Адамара помочь стать теоремой. Часть 2 2**Васильев Н. Н., Дужин В. С., Кузьмин А. Д.** Исследование свойств классов эквивалентности перестановок с помощью обратного преобразования Робинсона – Шенстеда – Кнута 11

## ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ И УПРАВЛЕНИЕ

**Городецкий А. Е., Курбанов В. Г., Тарасова И. Л.** Безопасное управление SEMS при групповом взаимодействии 23

## ИНФОРМАЦИОННО-УПРАВЛЯЮЩИЕ СИСТЕМЫ

**Рождественская К. Н.** Временной анализ системы управления в сети обработки данных 32

## КОДИРОВАНИЕ И ПЕРЕДАЧА ИНФОРМАЦИИ

**Морозов Р. А., Трифонов П. В.** Компактная спецификация полярных кодов 40**Sorokin A. V., Shepeta A. P., Nenashev V. A., Wattimena G. M.** Comparative characteristics of anti-collision processing of radio signal from identification tags on surface acoustic waves 48

## СТОХАСТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА И ХАОС

**Монаков А. А.** Статистические характеристики среднего уровня полезности элитной группы в процессе отбора 57

## ИНФОРМАЦИОННЫЕ КАНАЛЫ И СРЕДЫ

**Sergeev A. M., Blaunstein N. Sh.** Evolution of multiple-access networks – cellular and non-cellular – in historical perspective. Part 4 65**Савищенко Н. В., Лебеда Е. В.** Вероятности ошибки когерентного приема многопозиционных сигналов в канале с общими гамма- или К-замираниями и белым шумом 76

## УПРАВЛЕНИЕ В МЕДИЦИНЕ И БИОЛОГИИ

**Ситникова Е. Ю., Смирнов К. С., Грубов В. В., Храмов А. Е.** Принципы диагностики незрелой эпилептической (проэпилептической) активности на ЭЭГ у крыс с генетической предрасположенностью к абсанс-эпилепсии 89

## КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

**Lyandres V.** Mobile network synthesis strategy 98

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

102

Журнал входит в БД SCOPUS, в RSCI на платформе Web of Science и в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук.

Сдано в набор 27.12.18. Подписано в печать 14.02.19. Формат 60×84/8.

Гарнитура SchoolBookC. Печать цифровая.

Усл. печ. л. 12,4. Уч.-изд. л. 17,1. Тираж 1000 экз (1-й завод 95 экз.). Заказ № 53.

Оригинал-макет изготовлен в редакционно-издательском центре ГУАП.

190000, Санкт-Петербург, Б. Морская ул., 67.

Отпечатано с готовых диапозитивов в редакционно-издательском центре ГУАП.

190000, Санкт-Петербург, Б. Морская ул., 67.

Журнал распространяется по подписке. Подписку можно оформить

через редакцию, а также в любом отделении связи по каталогу «Роспечать»:

№ 15385 — полугодовой индекс.

## Как гипотезе Адамара помочь стать теоремой. Часть 2<sup>1</sup>

Н. А. Балонин<sup>а</sup>, доктор техн. наук, профессор, [orcid.org/0000-0001-7338-4920](https://orcid.org/0000-0001-7338-4920), [korbendfs@mail.ru](mailto:korbendfs@mail.ru)

М. Б. Сергеев<sup>а</sup>, доктор техн. наук, профессор, [orcid.org/0000-0002-3845-9277](https://orcid.org/0000-0002-3845-9277)

<sup>а</sup>Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения,  
Б. Морская ул., 67, Санкт-Петербург, 190000, РФ

**Введение:** гипотеза Адамара о существовании специфических квадратных матриц сформулирована не Адамаром, а математиками начала прошлого века. В середине века проблема подверглась ревизии в работах Райзера с Бруксом и Човлом, а также одним из основателей дискретной математики Холлом. Она относится к задачам пограничного смешанного типа, в ней присутствует и непрерывная, и дискретная составляющие. Комбинаторный подход, используемый в рамках последней, за столетие исчерпал себя, в статье рассмотрена альтернатива, опирающаяся на обе образующие. **Цель:** рассмотреть причины, по которым гипотеза о существовании всех матриц Адамара на порядках  $n = 4t$  считается недоказанной, и предложить возможные варианты ее доказательства. **Методы:** переход понижением порядка  $n = 4t - 2$  к двухуровневым квазиортогональным матрицам с элементами 1 и  $-b$ , вопрос существования которых на всех указанных порядках не вызывает затруднений в силу возможной иррациональности их элементов, с последующим построением цепочки преобразований к матрицам порядков  $n = 4t - 1, n = 4t, n = 4t + 1$ . **Результаты:** доказано взаимно-однозначное соответствие точек Гаусса на сфероиде  $x^2 + 2y^2 + z^2 = n$  с симметричными матрицами Адамара (построенными на основе массивов Балонина – Себерри), закрывающее известные в теории массивов Вильямсона пробелы неразрешимых порядков 140, 112 и т. п. Найдены и систематизированы таблицы решений, включающие так называемые «лучшие» трехблочные матрицы  $L(p, q), p \geq q$  – количество несопряженных симметричных матриц рассматриваемого порядка,  $q$  – количество блочно-симметричных матриц, совпадающих с решениями Вильямсона. Предложен итерационный метод Прокруста, понижающий норму максимального элемента матрицы, для получения матриц Адамара поиском локального и глобального условных экстремумов детерминанта. **Практическая значимость:** полученные матрицы Адамара и квазиортогональные матрицы порядков  $n = 4t - 2, n = 4t - 1, n = 4t + 1$  имеют непосредственное практическое значение для задач помехоустойчивого кодирования, сжатия и маскирования видеоинформации.

**Ключевые слова** – ортогональные матрицы, матрицы Адамара, гипотеза Адамара, циклические матрицы, негациклические матрицы, бициклические матрицы, массив Вильямсона, массив Балонина – Себерри, алгоритм Прокруста.

Для цитирования: Балонин Н. А., Сергеев М. Б. Как гипотезе Адамара помочь стать теоремой. Ч. 2. Информационно-управляющие системы, 2019, № 1, с. 2–10. doi:10.31799/1684-8853-2019-1-2-10

For citation: Balonin N. A., Sergeev M. B. Helping Hadamard conjecture to become a theorem. Part 2. Informatsionno-upravliaiushchie sistemy [Information and Control Systems], 2019, no. 1, pp. 2–10 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2019-1-2-10

### Симметричные матрицы Адамара

Помимо известной теоремы Лагранжа о разложении любого числа на сумму четырех квадратов, есть менее широко известный результат студента Геттингенского университета Карла Гаусса, доказавшего предположение Ферма о разложении любого числа на сумму трех треугольных чисел [39].

Треугольные числа, как и квадратные, принадлежат к фигурным числам, известным с древности. Они представляют собой последовательные суммы целых чисел 1,  $1 + 2 = 3$ ,  $1 + 2 + 3 = 6$  и т. п. Впервые линейными разложениями заинтересовались Эйлер и Гольдбах, высказав предположение, что любое четное число всегда разложимо на сумму двух простых чисел. На рис. 12 разложения Гольдбаха соответствуют выделенным цветом точкам с простыми значениями координат на линиях  $x + y = 2t$ , опирающихся симметрично на

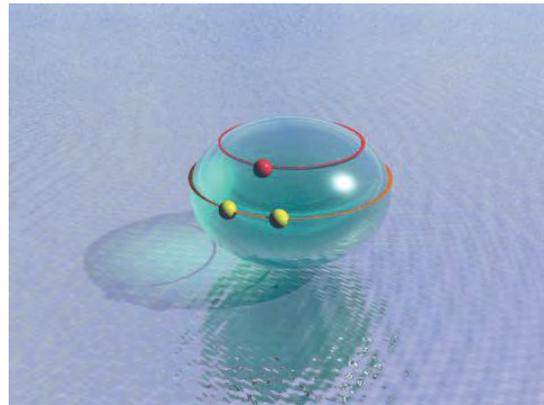
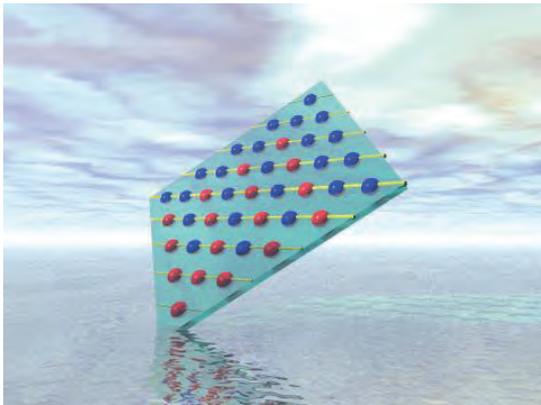
оси координат (образуя равнобедренные треугольники).

У этой задачи в трехмерном пространстве есть обобщение в виде точек Гаусса (точек с целыми координатами) на шаре или сфероиде. О простых числах речи уже нет, красным цветом выделена особая точка с равными целыми координатами. До этого мы уже связывали точки Гаусса на окружности с бициклическими конструкциями матриц (см. рис. 6 и 7). Шар и сфероид содержат совокупность окружностей, поэтому решение задачи тут значительно шире. Оказывается, что если квадрат радиуса шара является целым числом, то точки Гаусса найдутся на нем всегда и, в отличие от гипотезы Гольдбаха, это можно доказать.

**Теорема 5.1.** Любое целое число  $r$  представимо суммой трех треугольных чисел  $r = x + y + z$ .

Доказано Гауссом [39]. Впоследствии Жозеф Лиувилль обобщил универсальные свойства этого разложения на взвешенные суммы вида  $r = x + 2y + z$  и некоторые другие [40], что важно в нашей задаче о матрицах. Трех координатам

<sup>1</sup> Окончание. Начало см. Информационно-управляющие системы, 2018, № 6, с. 2–13. doi:10.31799/1684-8853-2018-6-2-13



■ *Рис. 12.* Плоскость Гольдбаха и сфероид с точками Гаусса  
 ■ *Fig. 12.* Goldbach plane and spheroid with Gauss's points  
 doi:10.31799/1684-8853-2019-1-3-fig12

точек Гаусса сопоставляются три блока. Для построения трехблочных симметричных матриц в (9) можно приравнять блоки  $\mathbf{B} = \mathbf{C}$  и перестановкой пары средних блочных столбцов получить симметричные массивы

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}=\mathbf{C} & \mathbf{C}=\mathbf{B} & \mathbf{D} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} & -\mathbf{A} & -\mathbf{B} \\ \mathbf{B} & -\mathbf{A} & -\mathbf{D} & \mathbf{C} \\ \mathbf{D} & -\mathbf{C} & \mathbf{B} & -\mathbf{A} \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{BR} & \mathbf{CR} & \mathbf{DR} \\ \mathbf{CR} & \mathbf{RD} & -\mathbf{A} & -\mathbf{RB} \\ \mathbf{BR} & -\mathbf{A} & -\mathbf{RD} & \mathbf{RC} \\ \mathbf{DR} & -\mathbf{RC} & \mathbf{RB} & -\mathbf{A} \end{pmatrix}. \quad (11)$$

doi:10.31799/1684-8853-2019-1-3-form11

Симметричную в целом матрицу несложно получить при соблюдении симметрии блока  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$  или  $\mathbf{D} = \mathbf{D}^T$  или всех трех блоков сразу. Во втором случае матрицы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{D}$  меняются местами. Такие матрицы названы Пропусами [17, 41] (Prorus — звезда в созвездии Близнецов), и это название получило распространение в серии статей [18–20, 42 и др.]. Более общий массив с тремя несимметричными блоками назовем Пиритом, при том же условии, что  $\mathbf{B} = \mathbf{C}$  или даже  $k_B = k_C$ , имея в виду равенство не самих узоров матриц  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{C}$ , а параметров узоров. Пириты, естественно, более распространены, потребность в них ощутима в виде некоторых дополнительных к симметричной форме решений.

**Теорема 5.2.** Пириты (11) порядков  $n = 4v$ , где  $v$  — нечетное, существуют.

Начнем с Пиритов как наиболее универсальных конструкций, хотя большее число решений являются Пропусами. В самом деле, пусть  $n = 4v = 4(2r + 1)$ , где  $r$  — порядковый номер ма-

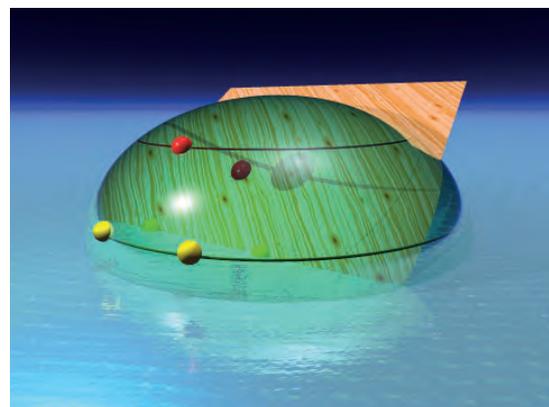
трицы, начинающийся с 0. Диофантово уравнение реализуемого ортогонального узора имеет вид  $\sum x_i^2 = n$  и упрощается при  $x_2 = x_3$ . Запишем его в форме  $x^2 + 2y^2 + z^2 = n$ , используя теорему Гаусса. Целочисленные корни уравнения дают количество  $-1$  в каждом из трех выделенных блоков:  $k_1 = (v - x)/2$ ,  $k_2 = (v - y)/2$ ,  $k_3 = (v - z)/2$ .

Преобразованиями  $x^2 = 8x + 1$ ,  $y^2 = 8y + 1$ ,  $z^2 = 8z + 1$  уравнение сфероида сводится к уравнению плоскости  $x + 2y + z = r$ , где  $r = (v - 1)/2$  — порядковый номер конструкции.

Доказательство закончено.

Для порядка 36 целочисленные точки Гаусса на сфероиде Лиувилля и на плоскости, где они имеют треугольные координаты, изображены на рис. 13.

Точка на центральном луче является особой и соответствует упрощенному решению задачи при  $x = y = z$ . Оно отвечает порядкам  $n = 4u^2$ ,  $k_1 = k_2 = k_3$ , обеспечивая переход к регулярным матрицам и моноблокам, описанным как первый



■ *Рис. 13.* Сфероид и плоскость для порядка 36  
 ■ *Fig. 13.* Spheroid and plane for order 36

случай теоремы Брука — Райзера — Човлы, в виде трехблочной конструкции

$$H = \begin{pmatrix} A & -BR & -CR & -DR \\ -CR & RD & -A & -RB \\ -BR & -A & -RD & RC \\ -DR & -RC & RB & -A \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Особые решения, ведущие к регулярным матрицам, перегружены функционально (они должны соответствовать, в том числе, моноблокам) и являются дополнительными к обычным. Эти Пириты симметричны до порядка 36 включительно. Подсчетами числа точек Гаусса занимались многие ученые, включая Дирихле, ученика Гаусса, и Зигеля. Помимо регулярного решения, всегда есть обычная точка. Ввиду симметрии сфероида точки всегда встречаются парами. На рис. 12 показана одна особая точка и две обычные, отличающиеся цветом.

**Теорема 5.3.** Матрицы Адамара порядков, кратных 4, существуют.

*Доказательство:* Ранее мы показали, что Пириты (11) порядков  $n = 4v$ , где  $v$  — нечетное, существуют. Существование всех промежуточных матриц вдвое больших порядков является элементарным следствием возможности построения матриц Адамара кронекеровым произведением Пиритов на матрицы Адамара второго порядка.

Доказательство закончено.

Согласно оценке Гаусса, на каждом порядке задача разрешима как минимум двумя точками с отличающимися параметрами, причем количество таких точек растет в среднем приблизительно как  $\sqrt{v}$ . Точки Гаусса на шаре соответствуют возможным решениям в форме Пиритов и более интересных нам Пропусов.

Особое решение-исключение в форме Пирита с  $k_A = k_D = 1$ ,  $k_B = k_C = 2$  наблюдается на стартовом порядке 20, причем у него есть альтернатива в виде Пропуса с  $k_A = k_D = 2$ ,  $k_B = k_C = 1$ , совпадающего с конструкцией Вильямсона. Эти матрицы эквивалентны. На следующем порядке 28 пиритность решения проявляется слабее одной версией матрицы из четырех возможных с  $B = C$  в виде Пирита с параметрами  $k_1 = 3$ ,  $k_2 = 3$ ,  $k_3 = 1$  и симметричной матрицей  $D$ . Он также эквивалентен Пропусу с реверсным ходом параметров. Эти матрицы дополняют пару простых Пропусов, эквивалентных конструкциям Вильямсона с параметрами  $k_1 = 3$ ,  $k_2 = 2$ ,  $k_3 = 2$  и  $k_1 = 2$ ,  $k_2 = 3$ ,  $k_3 = 3$ .

Для исключения эквивалентных матриц, появляющихся ввиду симметрий сфероида по вертикали и по горизонтали, имеет смысл опускать парные сопряженные решения, называя оставшиеся, по предложению Дженифер Себерри, «лучшими» и обозначая их  $L$ .

Количественное представление о версиях матриц Адамара в форме массивов Вильямсона  $W$  [35] и лучших Пропусов  $L$  (исключая регулярные особые точки и сопряженные точки из рассмотрения) в зависимости от порядка  $n$  дает таблица. Цифрами через запятую указаны количество точек Гаусса, разрешимых матрицей с симметричным блоком  $A$ , и число решений в них, которые можно классифицировать также как массивы Вильямсона.

Как видно, теореме Адамара можно дополнить значительно более емким предположением, что все матрицы Адамара симметричны и могут быть построены на основе одного симметричного и двух несимметричных циклических блоков, порождая версии  $L(p, q)$ . Оно дополняет ранее высказанное предположение Дженифер Себерри о кососимметрии всех возможных матриц Адамара.

Адамар показал [1], что среди матриц с элементами, не превосходящими по абсолютному значению 1 (лежащими в круге единичного радиуса), искомые матрицы имеют максимальный по абсолютному значению детерминант. Поэтому их можно определить иначе, как продукт решения экстремальной задачи на поиск условного максимума модуля детерминанта, учитывающего уравнение связи (1), при заданных ограничениях на значения элементов не более 1. Ответом будут, естественно, матрицы с элементами 1 и -1, поскольку только так можно получить значение весового коэффициента  $n$  в правой части уравнения связи.

Далее отвлечемся на время от матричных уравнений и поставим вопрос вычисления матриц Адамара итерационным процессом так, как это было сделано алгоритмом для скалярного корня квадратного. Эта тема позволяет обосновать существование матриц Адамара безотносительно к ее орнаменту, т. е. дает более сильные условия существования.

- Количество несопряженных Пропусов  $L$
  - The numbers of non-conjugated L-Propusi
- doi:10.31799/1684-8853-2019-1-4-table

$n$	W	L	$n$	W	L	$n$	W	L
4	1	1,1	76	6	3,1	148	4	5,1
12	1	1,1	84	7	2,1	156	1	2,0
20	1	1,1	92	1	2,0	164	1	2,1
28	2	2,1	100	10	3,1	172	2	5,0
36	3	1,1	108	6	4,1	180	1	5,1
44	1	1,0	116	1	1,0	188	0	4,0
52	4	3,1	124	2	4,1	196	1	4,1
60	4	2,1	132	5	4,0	204	2	2,1
68	4	2,0	140	0	2,0	212	0	3,0

Со времен построения алгоритма Эвклида итерационные процессы пользуются заслуженным вниманием. Ведущие к ним экстремальные задачи допускают более широкое толкование решения, чем задачи на поиск «точного равенства». Заметим, что если следовать порядкам, кратным четырем, то матрицы абсолютного максимума детерминанта [3] тоже будут матрицами Адамара (если последние существуют).

Смысл дополнительного уравнения связи (1) состоит в том, что оно позволяет построить итерационный алгоритм нахождения матрицы, и предлагаем этим воспользоваться.

### Сжимающее отображение Прокруста

Обращаясь к прошлому квадратичной проблемы, отметим весьма похожее на матричное (1) скалярное уравнение  $h^2 = 2$ , связывающее длину гипотенузы  $h$  элементарного равнобедренного прямоугольного треугольника с суммой квадратов сторон его катетов. В античные времена обнаружено, что  $h$  в принципе нельзя выразить отношением целых чисел — отношением к длине катета. Отсюда можно было бы заключить, что таких прямоугольных треугольников не существует. Но ведь они есть, их легко построит школьник при помощи циркуля и линейки. Потребность выразить эту не существующую в отношениях целых величин длину продвинула теорию чисел изобретением радикалов.

Древнейший рецепт минимизирует норму невязки  $h^2 - 2$  итерациями оценки длины вида  $h_{k+1} = h_{k-1} + h_k/2$ , начиная с приближения  $h_0 = 1$ . Он был известен еще создателям глиняных таблиц, недаром именуется вавилонским.

Теперь задумаемся, есть ли прямой метод найти матрицу Эйлера, Мерсенна или Адамара, подобно тому, как находит корень квадратный вавилонский алгоритм? Как ни странно, такой метод есть, и легенда о нем насчитывает как минимум двухтысячелетнюю историю. Известно, что герой греческих мифов царь-разбойник Прокруст укорачивал ноги своих гостей, укладывая их спать на короткую постель. Чрезмерно длинных сонных скитальцев он укорачивал мечом, а коротких, наоборот, растягивал при помощи ворота и веревки. Ортогональные матрицы тоже имеют «ноги» в виде наиболее выделяющихся своей величиной элементов, в то время как у матриц Адамара элементы все одинаковы по абсолютной величине.

За этим обстоятельством скрывается простое правило повышения детерминанта квазиортогональной матрицы [43, 44].

**Теорема 6.1.** Алгоритм Прокруста сходится к матрице Адамара.

*Доказательство:* Приведем матрицу Адамара масштабированием ее столбцов к строго ортогональной форме  $\mathbf{H}^T \mathbf{H} = \mathbf{I}$ . В таком случае детерминант матрицы  $\mathbf{H}$  будет равен 1. Путь назад состоит в делении ее элементов на максимальный элемент  $\mu$  и возвращении значения элементов вновь к 1. Чем меньше делитель  $\mu$ , тем больше коэффициент увеличения определителя матрицы. На множестве квазиортогональных матриц с максимальными элементами, равными 1, искомую матрицу условного максимума детерминанта отличают ортогональность ее столбцов и самое малое значение ее максимального элемента (после приведения норм столбцов к 1). Метод Прокруста, состоящий в итерационном уменьшении амплитуд элементов ортогональной матрицы, действительно ведет к ней.

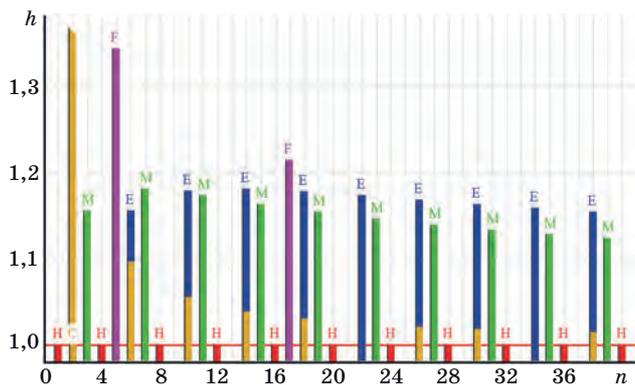
Доказательство закончено.

Задача на итерационный поиск максимального условного экстремума детерминанта при квадратичном матричном уравнении связи, разумеется, имеет препятствия в форме областей притяжения вокруг локальных оптимумов. Поскольку они локальные, их можно обойти перебором начальных условий. Области притяжения к локальным экстремумам представляют собой запрещенные значения элементов  $\mathbf{H}$ . В силу конечности радиусов, описывающих области притяжения, число попыток, позволяющих их избежать, теоретически конечно. Алгоритм Прокруста не нуждается в задании вида узора. Тем самым отпадают возражения о совместности узора матрицы, хотя их тоже можно перебрать. Разумеется, использование априорной информации ускоряет поиск [44].

Матрица Адамара является частным случаем квазиортогональных матриц  $\mathbf{A}$  с вещественными элементами, не превышающими по своему абсолютному значению 1, удовлетворяющих уравнению  $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \omega \mathbf{I}$ , где  $\omega$  — вес матрицы, заданный свободно, так что при разрешенных значениях переменных элементов матрицы  $0 < \omega \leq n$ . Несложно заметить, что  $|\det(\mathbf{A})| = \omega^{n/2}$ , где  $\omega = 1/\mu^2$ . Поскольку график детерминанта быстро растет, для иллюстрации достаточно вывести график делителя  $|\det(\mathbf{A})| = n^{n/2}/h^n$  — адамаровой нормы  $h = \mu\sqrt{n}$ .

Если делитель стремится к единице, а он стремится к ней у всех отмеченных ранее матриц, то такие матрицы с ростом порядка мало отличаются от адамаровых. Графики  $h$ -норм рассмотренных матриц Эйлера (E), Мерсенна (M), Адамара (H), Белевича (C) и Ферма (F) приведены на рис. 14.

Матрицы Ферма  $\mathbf{F}$  порядков  $4t + 1$  сопровождают регулярные матрицы Адамара так же, как матрицы Эйлера и Мерсенна сопровождают Пропусы. Весовые функции  $\omega(n)$  и  $h$ -нормы семейств матриц с порядками, смежными 4, опре-



■ **Рис. 14.** *h*-нормы квазиортогональных матриц  
 ■ **Fig. 14.** *h*-norms of quasiorthogonal matrices

деленные по ограниченному числу точек, имеют аналитическое продолжение на бесконечное множество порядков, так как в задаче с нефиксированным правым уровнем порядки не имеют предпочтений. Аналогом этого процесса у динамических систем является задача идентификации параметров передаточной функции динамической системы, или, что то же самое, коэффициентов дифференциального или разностного уравнения [45, 46]. Находя параметры по серии точек, можно идентифицировать в целом всю систему для всего бесконечного интервала ее функционирования.

Несовместность аналитического продолжения (если бы такое имело место) находит свое выражение в особых точках аналитических зависимостей, описывающих параметры. Если функции монотонны, а это так, и не имеют разрывов, то такие семейства существуют на всех значениях порядков.

**Заключение**

Интерес к узорам стал возникать в 30-х годах прошлого века в агрокультурных задачах, связанных с подсчетами сортов зерен и хранилищ для них. Методы конечных полей позволяли найти решения, что давало повод для шуток о том, что в то время как агрономы ищут зерна на обычных полях, Фишер, основатель математики узоров, пропадает на полях Галуа. В то время метод конечных полей был нов, и интерес к нему заметен как в работах Пэли, так и в работах Холла, пересматривавшего достижения шестидесятых.

Подавляющее число работ по матрицам Адамара составлено в комбинаторном ключе, когда тема иррациональностей закрыта. Надо отдать должное Райзеру с коллегами, что они вообще додумались до ограничений, следующих из моноблочности структуры. Но ведь матрица Адамара не моноблок. Холл, движимый интуи-

цией, склоняется к мысли, что условия теоремы Брука — Райзера — Човлы, скорее, необходимы и достаточны (чем наоборот).

Проективный дизайн  $v = q^2 + q + 1$ ,  $k = q + 1$ ,  $\lambda = 1$  при  $q = 2$  имеет параметры матрицы Мерсенна  $\{7, 3, 1\}$  порядка  $n = 4t - 1 = 7$  с уровнями 1 и  $-b$ ,

$$b = \frac{t}{t + \sqrt{t}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1}$$

инцидентности найти можно, как видно, ортогональные матрицы не обязательно рациональны. Особые точки  $\{43, 7, 1\}$  и  $\{29, 8, 2\}$ , указанные в работах [10–12] как примеры исключений, несложно подвергнуть проверке на ортогонализацию матрицы заданием  $a = 1$  с заменой 0 на значение «плавающего уровня»  $-b$ . Условие ортогональности  $(n - 2k + \lambda)b^2 - 2(k - \lambda)ab + \lambda a^2 = 0$  для примеров дает  $30b^2 - 12b + 1 = 0$  и  $15b^2 - 12b + 2 = 0$  соответственно. Корни этих уравнений иррациональны:

$$b = \left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{6}}\right) / 5 \text{ и } b = \left(2 \pm \sqrt{\frac{2}{3}}\right) / 5$$

Помимо двухуровневых матриц, структура содержит резерв в виде варьируемой диагонали (нулевая у конференц-матриц), она тоже может быть настраиваемым уровнем [38]. Получим двухуровневые (или трехуровневые) квазиортогональные матрицы, в работах [5, 15 и др.] их предложено называть *критскими*. Тем самым в аргументах Холла, пересматривавшего теорему существования матриц Адамара, есть слабые места. Он брал во внимание целочисленную матрицу инцидентности, а не ортогональную матрицу.

При движении по числовой оси все взаимные произведения чисел отбрасываются вверх, поэтому количество простых чисел, которые можно встретить в выделенном диапазоне, неизбежно убывает. Следовательно, простые по орнаменту матрицы Адамара (с простыми по размеру блоками) тоже убывают. Вместе с тем известно (теорема Дженифер Себери [2, 3]), что есть верхняя граница для сомнительных порядков. Состыковать эти два положения вместе можно тем, что универсальные узоры заполняют промежутки между простыми орнаментами. Вывод подкреплен составлением таблиц симметричных матриц Адамара вплоть до 212-го порядка и выше [17–19].

Два пути, характеризующиеся как непрерывный и дискретный подходы, представляют собой крайние варианты, между которыми возможны компромиссы, обнаруживающие смесь непрерывного и дискретного. Теория чисел тесно пересекается с матричной тематикой, однако разработанные еще в XVIII веке рецепты решения квадратичных уравнений столь велики, что для установления полного соответствия требовался свой Гаусс, рискнувший в этикие дебри забрести. Вместе с тем изобретение, скажем, ирраци-

ональности требует не столько штудирования обширного материала, сколько смены парадигмы о том, что именно вкладывается в понятие числа. К иррациональной матрице Эйлера мы проложили путь через градиент оптимизируемой функции или его заменители, которыми оперирует алгоритм Прокруста, убавляющий норму максимального элемента ортогональной матрицы сколь угодно малой вариацией. Финальные шаги: от матрицы Эйлера к матрице Мерсенна и далее к матрице Адамара (и потом к матрице Ферма для регулярных структур) с помощью добавляемой каймы — представляют собой дискретный процесс.

## Литература

1. **Hadamard J.** Résolution d'une Question Relative aux Déterminants. *Bulletin des Sciences Mathématiques*, 1893, vol. 17, pp. 240–246.
2. **Seberry J., Yamada M.** *Hadamard matrices, sequences, and block designs*. In: *Contemporary design theory: A collection of surveys*. J. H. Dinitz and D. R. Stinson eds. John Wiley and Sons, 1992. P. 431–560.
3. *Handbook of combinatorial designs* (Discrete mathematics and its applications). Ed. by Charles J. Colbourn, Jeffrey H. Dinitz. 2nd ed. Chapman and Hall/CRC, 2006. 1000 p.
4. **Балонин Н. А., Сергеев М. Б.** Нормы обобщенных матриц Адамара. *Вестник СПбГУ*, сер. 10, 2014, вып. 2, с. 5–11.
5. **Balonin N. A., and Seberry, Jennifer.** Remarks on extremal and maximum determinant matrices with real entries  $\leq 1$ . *Информационно-управляющие системы*, 2014, № 5, с. 2–4.
6. **Балонин Н. А., Сергеев М. Б.** Матрица золотого сечения G10. *Информационно-управляющие системы*, 2013, № 6, с. 2–5.
7. **Williamson J.** Hadamard's determinant theorem and the sum of four squares. *Duke Math. J.*, 1944, vol. 11, pp. 65–81.
8. **Baumert L., Golomb S. W., Marshall M.** Discovery of an Hadamard matrix of order 92. *Bull. Amer. Math. Soc., JR. Communicated by F. Bohnenblust, California Institute of Technology*, 1962, vol. 68, pp. 237–238.
9. **Seberry Wallis J.** A class of Hadamard matrices. Communicated by Marshall Hall. *Journal of Combinatorial Theory*, 1969, vol. 6, pp. 40–44.
10. **Bruck R. H., Ryser H. J.** The nonexistence of certain finite projective planes. *Canadian J. Math.*, 1949, vol. 1, pp. 88–93. doi:10.4153/cjm-1949-009-2
11. **Chowla S., Ryser H. J.** Combinatorial problems. *Canadian J. Math.*, 1950, vol. 2, pp. 93–99. doi:10.4153/cjm-1950-009-8
12. **Hall M.** *Combinatorial theory*. 2nd ed. New York, Wiley, 1998. 464 p.
13. **Ryser H. J.** *Combinatorial mathematics*. The carus mathematical monographs. The mathematical association of America, New York, JohnWiley and Sons, 1963, no. 14. 162 p.
14. **Балонин Н. А., Джокович Д. Ж.** Симметрия двудиклических матриц Адамара и периодические пары Голея. *Информационно-управляющие системы*, 2015, № 3, с. 2–16. doi:10.15217/issn1684-8853.2015.3.2
15. **Балонин Н. А., Сергеев М. Б.** Расширение гипотезы Райзера на двудиклические структуры и разрешимость матриц Адамара орнаментом в виде бицикла с двойной каймой. *Информационно-управляющие системы*, 2017, № 1, с. 2–10. doi:10.15217/issn1684-8853.2017.1.2
16. **Balonin N. A., Seberry J.** Two infinite families of symmetric Hadamard matrices. *Australian Journal of Combinatorics*, 2017, vol. 69(3), pp. 349–357.
17. **Balonin N. A., Balonin Y. N., Djokovic D. Z., Karbovskiy D. A., Sergeev M. B.** Construction of symmetric Hadamard matrices. *Информационно-управляющие системы*, 2017, № 5, с. 2–11. doi:10.15217/issn1684-8853.2017.5.2 (16 Aug 2017: arXiv:1708.05098).
18. **Balonin N. A., Djokovic D. Z., Karbovskiy D. A.** Construction of symmetric Hadamard matrices of order  $4v$  for  $v = 47, 73, 113$ . *Special Matrices*, 2018, vol. 6, pp. 11–22 (9 Oct 2017: arXiv:1710.03037).
19. **Balonin N. A., Djokovic D. Z.** Symmetric Hadamard matrices of orders 268, 412, 436 and 604. *Информационно-управляющие системы*, 2018, № 4, с. 2–8. doi:10.31799/1684-8853-2018-4-2-8 (23 Mar 2018: arXiv:1803.08787)
20. **Balonin N. A., Djokovic D. Z.** Negaperiodic Golay pairs and Hadamard matrices. *Информационно-управляющие системы*, 2015, № 5, с. 2–17. doi:10.15217/issn1684-8853.2015.5.2
21. **Балонин Н. А., Сергеев М. Б.** Взвешенная конференц-матрица, обобщающая матрицу Белевича на 22-м порядке. *Информационно-управляющие системы*, 2013, № 5, с. 97–98.

## Благодарности

Мы приносим благодарность за многолетнее сотрудничество и поддержку профессорам Дженифер Себерри и Драгомиру Джоковичу. Большую помощь в технической работе с рукописью статьи и ссылками (более полный перечень работ можно найти на <http://mathscinet.ru/tamara>) оказала Т. В. Балонина.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ при проведении научно-исследовательской работы в рамках проектной части государственного задания в сфере научной деятельности по заданию № 2.2200.2017/4.6.

22. Balonin N. A., Seberry J. A review and new symmetric conference matrices. *Информационно-управляющие системы*, 2014, № 4, с. 2–7.
23. Sylvester J. J. Thoughts on inverse orthogonal matrices, simultaneous sign successions, and tessellated pavements in two or more colours, with applications to Newton's rule, ornamental tile-work, and the theory of numbers. *Philosophical Magazine*, 1867, no. 34, pp. 461–475.
24. Scarpis U. Sui determinanti di valore Massimo. *Rendiconti Della R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere*, 1898, no. 31, pp. 1441–1446.
25. Djokovic D. Z. Generalization of Scarpis' theorem on Hadamard matrices. *Linear and Multilinear Algebra*, 2017, vol. 65, no. 10, pp. 1985–1987. doi:10.1080/03081087.2016.1265062
26. Балонин Н. А., Сергеев М. Б. Матрицы Мерсенна и Адамара. *Информационно-управляющие системы*, 2016, № 1, с. 2–15. doi.org/10.15217/issn1684-8853.2016.1.2
27. Балонин Н. А., Сергеев М. Б. Матрицы Мерсенна и Адамара, произведения. *Информационно-управляющие системы*, 2016, № 5, с. 2–14. doi:10.15217/issn1684-8853.2016.5.2
28. Gilman R. E. On the Hadamard determinant theorem and orthogonal determinants. *Bulletin Amer. Math. Soc.*, 1931, vol. 37, pp. 30–31.
29. Paley R. E. A. C. On orthogonal matrices. *Journal of Mathematics and Physics*, 1933, vol. 12, pp. 311–320.
30. Malcolm W. Browne. *Is a math proof a proof if no one can check it?* The New York Times. 1 december. 1988.
31. Janko Z. The existence of a Bush-type Hadamard matrix of order 36 and two new infinite classes of symmetric designs. *Journal of Combinatorial Theory*, ser. A, 2001, vol. 95, no. 2, pp. 360–364.
32. Janko Z., Kharaghani H., Tonchev V. D. Bush-type Hadamard matrices and symmetric symmetric designs. *J. Combin.*, 2001, no. 1, pp. 72–78.
33. Janko Z., Kharaghani H., Tonchev V. D. The existence of a Bush-type Hadamard matrix of order 324 and two new infinite classes of symmetric designs. *Des. Codes Cryptogr.*, 2001, vol. 24, no. 2, pp. 225–232.
34. Doković D. Ž. Williamson matrices of order  $4n$  for  $n = 33; 35; 39$ . *Discrete Math.*, 1993, vol. 115, pp. 267–271.
35. Holzmann W. H., Kharaghani H., Tayfeh-Rezaie B. Williamson matrices up to order 59. *Designs, Codes and Cryptography*, 2008, no. 46, pp. 343–352.
36. Балонин Н. А. О существовании матриц Мерсенна 11-го и 19-го порядков. *Информационно-управляющие системы*, 2013, № 2, с. 89–90.
37. Балонин Н. А., Сергеев М. Б. К вопросу существования матриц Мерсенна и Адамара. *Информационно-управляющие системы*, 2013, № 5, с. 2–8.
38. Балонин Н. А., Сергеев М. Б. Матрицы локального максимума детерминанта. *Информационно-управляющие системы*, 2014, № 1, с. 2–15.
39. Гаусс К. Ф. Труды по теории чисел / пер. Б. Б. Демьянова; под ред. И. М. Виноградова; комментарии Б. Н. Делоне. М., АН СССР, 1959. 978 с.
40. Liouville J. Nouveaux théorèmes concernant les nombres triangulaires. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 1863, no. 8, pp. 73–84.
41. Seberry J., Balonin N. A. *The Propus construction for symmetric Hadamard matrices*. 2015. <http://arXiv:1512.01732v1> (дата обращения: 22 мая 2017).
42. Di Matteo O., Djokovic D. Z., Kotsireas I. S. Symmetric Hadamard matrices of order 116 and 172 exist. *Spec. Matrices*, 2015, no. 3, pp. 227–234.
43. Балонин Н. А., Сергеев М. Б., Суздаль В. С. Динамические генераторы квазиортогональных матриц семейства Адамара. *Тр. СПИИРАН*, 2017, вып. 5(54), с. 224–243. doi:http://dx.doi.org/10.15622/sp.54
44. Балонин Н. А., Сергеев М. Б. О значении матриц начального приближения в алгоритме поиска обобщенных взвешенных матриц глобального и локального максимума детерминанта. *Информационно-управляющие системы*, 2015, № 6, с. 2–9. doi:org/10.15217/issn1684-8853.2015.6.2
45. Балонин Н. А. *Теоремы идентифицируемости*. СПб., Политехника, 2010. 48 с.
46. Балонин Н. А. *Новый курс теории управления движением*. СПб., СПбГУ, 2000. 160 с.

УДК 519.614

doi:10.31799/1684-8853-2019-1-2-10

### Helping Hadamard conjecture to become a theorem. Part 2

N. A. Balonin<sup>a</sup>, Dr. Sc., Tech., Professor, orcid.org/0000-0001-7338-4920, korbendfs@mail.ru

M. B. Sergeev<sup>a</sup>, Dr. Sc., Tech., Professor, orcid.org/0000-0002-3845-9277

<sup>a</sup>Saint-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, 67, B. Morskaya St., 190000, Saint-Petersburg, Russian Federation

**Introduction:** Hadamard conjecture about the existence of specific square matrices was formulated not by Hadamard but by other mathematicians in the early 20th century. Later, this problem was revised by Ryser together with Bruck and Chowla, and also by Hall, one of the founders of discrete mathematics. This is a problem of the boundary mixed type, as it includes both the continuous and discrete components. The combinatorial approach used in the framework of the discrete component has run its course by the end of the century.

The article discusses an alternative based on both concepts. **Purpose:** To analyze the reasons why the conjecture about the existence of Hadamard matrices of all orders  $n = 4t$  is considered unproven, and to propose possible ways to prove it. **Methods:** Transition, by lowering the order  $n = 4t - 2$ , to two-level quasiorthogonal matrices with elements 1 and  $-b$  whose existence on all specified orders is not a difficult problem due to the possible irrationality of their entries. Subsequent construction of a chain of transformations to matrix orders  $n = 4t - 1$ ,  $n = 4t$ ,  $n = 4t + 1$ . **Results:** It is proved that Gauss points on an  $x^2 + 2y^2 + z^2 = n$  spheroid are in one-to-one correspondence with symmetric Hadamard matrices (constructed on the basis of the Balonin — Seberry arrays), covering up the gaps on the unsolvable orders 140, 112, etc. known in Williamson's array theory. Solution tables are found and systematized, which include so-called «best» three-block matrices  $L(p, q)$ , where  $p \geq q$  is the number of non-conjugated symmetric matrices of the order in question, and  $q$  is the number of block-symmetric matrices which coincide with Williamson's solutions. The iterative Procrustes algorithm which reduces the norm of the maximum entry in a matrix is proposed for obtaining Hadamard matrices by searching for local and global conditional extremes of the determinant. **Practical relevance:** The obtained Hadamard matrices and quasi-orthogonal matrices of orders  $n = 4t - 2$ ,  $n = 4t - 1$ ,  $n = 4t + 1$  are of immediate practical importance for the problems of noise-resistant coding, compression and masking of video information.

**Keywords** — orthogonal matrices, Hadamard matrices, Hadamard conjecture, circulant matrices, negacirculant matrices, two-circulant matrices, Williamson array, Balonin — Seberry array, Procrustes algorithms.

**Citation:** Balonin N. A., Sergeev M. B. Helping Hadamard conjecture to become a theorem. Part 2. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2019, no. 1, pp. 2–10 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2019-1-2-10

## References

- Hadamard J. Résolution d'une Question Relative aux Déterminants. *Bulletin des Sciences Mathématiques*, 1893, vol. 17, pp. 240–246.
- Seberry J., Yamada M. *Hadamard matrices, sequences, and block designs*. In: *Contemporary design theory: A collection of surveys*. J. H. Dinitz and D. R. Stinson eds. John Wiley and Sons, 1992. P. 431–560.
- Handbook of combinatorial designs* (Discrete mathematics and its applications). Ed. by Charles J. Colbourn, Jeffrey H. Dinitz. 2nd ed. Chapman and Hall/CRC, 2006. 1000 p.
- Balonin N. A., Sergeev M. B. The generalized Hadamard matrix norms. *Vestnik SPbGU*, ser. 10, 2014, vol. 2, pp. 5–11 (In Russian).
- Balonin N. A., Seberry Jennifer. Remarks on extremal and maximum determinant matrices with real entries  $\leq 1$ . *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control System], 2014, no. 5, pp. 2–4.
- Balonin N. A., Sergeev M. B. Matrix of golden ratio G10. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control System], 2013, no. 6, pp. 2–5 (In Russian).
- Williamson J. Hadamard's determinant theorem and the sum of four squares. *Duke Math. J.*, 1944, vol. 11, pp. 65–81.
- Baumert L., Golomb S. W., Marshall M. Discovery of an Hadamard matrix of order 92. *Bull. Amer. Math. Soc., JR. Communicated by F. Bohnenblust, California Institute of Technology*, 1962, vol. 68, pp. 237–238.
- Seberry Wallis J. A class of Hadamard matrices. Communicated by Marshall Hall. *Journal of Combinatorial Theory*, 1969, vol. 6, pp. 40–44.
- Bruck R. H., Ryser H. J. The nonexistence of certain finite projective planes. *Canadian J. Math.*, 1949, vol. 1, pp. 88–93. doi:10.4153/cjm-1949-009-2
- Chowla S., Ryser H. J. Combinatorial problems. *Canadian J. Math.*, 1950, vol. 2, pp. 93–99. doi:10.4153/cjm-1950-009-8
- Hall M. *Combinatorial theory*. 2nd ed. New York, Wiley, 1998. 464 p.
- Ryser H. J. *Combinatorial mathematics*. The carus mathematical monographs. The mathematical association of America, New York, John Wiley and Sons, 1963, no. 14. 162 p.
- Balonin N. A., Djokovic D. Z. Symmetry of two-circulant Hadamard matrices and periodic Golay pairs. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control System], 2015, no. 3, pp. 2–16 (In Russian). doi:10.15217/issn1684-8853.2015.3.2
- Balonin N. A., Sergeev M. B. Ryser's conjecture expansion for bicirculant strictures and Hadamard matrix resolvability by double-border bicycle ornament. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control System], 2017, no. 1, pp. 2–10 (In Russian). doi:10.15217/issn1684-8853.2017.1.2
- Balonin N. A., Seberry J. Two infinite families of symmetric Hadamard matrices. *Australian Journal of Combinatorics*, 2017, vol. 69(3), pp. 349–357.
- Balonin N. A., Balonin Y. N., Đoković D. Ž., Karbovskiy D. A., Sergeev M. B. Construction of symmetric Hadamard matrices. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control System], 2017, no. 5, pp. 2–11. doi:10.15217/issn1684-8853.2017.5.2 (16 Aug 2017; arXiv:1708.05098).
- Balonin N. A., Đoković D. Ž., Karbovskiy D. A. Construction of symmetric Hadamard matrices of order  $4v$  for  $v = 47, 73, 113$ . *Special Matrices*, 2018, vol. 6, pp. 11–22 (9 Oct 2017; arXiv:1710.03037).
- Balonin N. A., Đoković D. Ž. Symmetric Hadamard matrices of orders 268, 412, 436 and 604. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control System], 2018, no. 4, pp. 2–8. doi:10.31799/1684-8853-2018-4-2-8 (23 Mar 2018; arXiv:1803.08787).
- Balonin N. A., Djokovic D. Z. Negaperiodic Golay pairs and Hadamard matrices. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control System], 2015, no. 5, pp. 2–17. doi:10.15217/issn1684-8853.2015.5.2
- Balonin N. A., Sergeev M. B. Weighted conference matrix generalizing Belevich matrix at the 22nd order. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control System], 2013, no. 5, pp. 97–98 (In Russian).
- Balonin N. A., Seberry J. A review and new symmetric conference matrices. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control System], 2014, no. 4, pp. 2–7.
- Silvester J. J. Thoughts on inverse orthogonal matrices, simultaneous sign successions, and tessellated pavements in two or more colours, with applications to Newton's rule, ornamental tile-work, and the theory of numbers. *Philosophical Magazine*, 1867, no. 34, pp. 461–475.
- Scarpis U. Sui determinanti di valore Massimo. *Rendiconti della R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere*, 1898, no. 31, pp. 1441–1446 (In Italian).
- Djokovic D. Z. Generalization of Scarpis' theorem on Hadamard matrices. *Linear and Multilinear Algebra*, 2017, vol. 65, no. 10, pp. 1985–1987. doi:10.1080/03081087.2016.1265062
- Balonin N. A., Sergeev M. B. Mersenne and Hadamard matrices. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control System], 2016, no. 1, pp. 2–15 (In Russian). doi:10.15217/issn1684-8853.2016.1.2
- Balonin N. A., Sergeev M. B. Mersenne and Hadamard matrices, products. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control System], 2016, no. 5, pp. 2–14 (In Russian). doi:10.15217/issn1684-8853.2016.5.2
- Gilman R. E. On the Hadamard determinant theorem and orthogonal determinants. *Bulletin Amer. Math. Soc.*, 1931, vol. 37, pp. 30–31.
- Paley R. E. A. C. On orthogonal matrices. *Journal of Mathematics and Physics*, 1933, vol. 12, pp. 311–320.
- Malcolm W. Browne. *Is a math proof a proof if no one can check it?* The New York Times. 1 december. 1988.
- Janko Z. The existence of a Bush-type Hadamard matrix of order 36 and two new infinite classes of symmetric designs. *Journal of Combinatorial Theory*, ser. A, 2001, vol. 95, no. 2, pp. 360–364.
- Janko Z., Kharaghani H., Tonchev V. D. Bush-type Hadamard matrices and symmetric symmetric designs. *J. Combin.*, Dec. 9, 2001, no. 1, pp. 72–78.
- Janko Z., Kharaghani H., Tonchev V. D. The existence of a Bush-type Hadamard matrix of order 324 and two new infinite classes of symmetric designs. *Des. Codes Cryptogr*, 2001, vol. 24, no. 2, pp. 225–232.
- Đoković D. Ž. Williamson matrices of order  $4n$  for  $n = 33; 35; 39$ . *Discrete Math.*, 1993, vol. 115, pp. 267–271.

35. Holzmann W. H., Kharaghani H., Tayfeh-Rezaie B. Williamson matrices up to order 59. *Designs, Codes and Cryptography*, 2008, no. 46, pp. 343–352.
36. Balonin N. A. Existence of Mersenne matrices of 11th and 19th orders. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control System], 2013, no. 2, pp. 89–90 (In Russian).
37. Balonin N. A., Sergeev M. B. On the issue of existence of Hadamard and Mersenne matrices. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control System], 2013, no. 5, pp. 2–8 (In Russian).
38. Balonin N. A., Sergeev M. B. Local maximum determinant matrices. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control System], 2014, no. 1, pp. 2–15 (In Russian).
39. Gauss K. F. *Trudy po teorii chisel* [Works on Number Theory]. Trans. B. B. Dem'yanova, ed. I. M. Vinogradova, comments B. N. Delone. Moscow, AN SSSR Publ., 1959. 978 p.
40. Liouville J. Nouveaux théorèmes concernant les nombres triangulaires. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 1863, no. 8, pp. 73–84 (In French).
41. Seberry J., Balonin N. A. *The Propus construction for symmetric Hadamard matrices*. 2015. Available at: <http://arXiv:1512.01732v1> (accessed 22 May 2017).
42. Di Matteo O., Djokovic D. Z., Kotsireas I. S. Symmetric Hadamard matrices of order 116 and 172 exist. *Spec. Matrices*, 2015, no. 3, pp. 227–234.
43. Balonin N. A., Sergeev M. B., Suzdal V. S. Dynamic generators of the quasiorthogonal Hadamard matrix family. *Trudy SPIIRAN* [SPIIRAS Proceedings], 2017, vol. 5(54), pp. 224–243 (In Russian). doi:<http://dx.doi.org/10.15622/sp.54>
44. Balonin N. A., Sergeev M. B. Initial approximation matrices in search for generalized weighted matrices of global or local maximum determinant. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control System], 2015, no. 6, pp. 2–9 (In Russian). doi.org/10.15217/issn1684-8853.2015.6.2
45. Balonin N. A. *Teoremy identifikiruемости* [Identifiability Theorems]. Saint-Petersburg, Politekhnik Publ., 2010. 48 p. (In Russian).
46. Balonin N. A. *Novyj kurs teorii upravleniya dvizheniem* [New course of motion control theory]. Saint-Petersburg, SPbGU Publ., 2000. 160 p. (In Russian).

**Научный журнал  
«ИНФОРМАЦИОННО-УПРАВЛЯЮЩИЕ СИСТЕМЫ»  
выходит каждые два месяца.**

Стоимость годовой подписки (6 номеров) для подписчиков России — 6000 рублей, для подписчиков стран СНГ — 6600 рублей, включая НДС 20%, таможенные и почтовые расходы.

Подписку на печатную версию журнала можно оформить в любом отделении связи по каталогу:

«Роспечать»: № 15385 — полугодовой индекс, а также через посредство подписных агентств:  
«Северо-Западное агентство „Прессинформ“»  
Санкт-Петербург, тел.: (812) 335-97-51, 337-23-05,  
эл. почта: [press@crp.spb.ru](mailto:press@crp.spb.ru), [zajavka@crp.spb.ru](mailto:zajavka@crp.spb.ru),  
сайт: <http://www.pinform.spb.ru>  
«МК-Периодика» (РФ + 90 стран)  
Москва, тел.: (495) 681-91-37, 681-87-47,  
эл. почта: [export@periodicals.ru](mailto:export@periodicals.ru), сайт: <http://www.periodicals.ru>  
«Деловая пресса»  
Москва, тел.: (495) 962-11-11, эл. почта: [podpiska@delpress.ru](mailto:podpiska@delpress.ru),  
сайт: <http://delpress.ru/contacts.html>  
«Коммерсант-Курьер»  
Казань, тел.: (843) 291-09-99, 291-09-47, эл. почта: [kazan@komcur.ru](mailto:kazan@komcur.ru),  
сайт: <http://www.komcur.ru/contacts/kazan/>  
«Урал-Пресс» (филиалы в 40 городах РФ)  
Сайт: <http://www.ural-press.ru>  
«Идея» (Украина)  
Сайт: <http://idea.com.ua>  
«ВТЛ» (Узбекистан)  
Сайт: <http://btl.sk.uz/ru/cat17.html> и др.

На электронную версию нашего журнала (все выпуски, годовая подписка, один выпуск, одна статья) вы можете подписаться на сайтах НЭБ: <http://elibrary.ru>; РУКОНТ: <http://www.rucont.ru>; ИВИС: <http://www.ivis.ru>; Некс-Медиа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=news&id=11196>

Полнотекстовые версии журнала за 2002–2017 гг. в свободном доступе на сайте журнала (<http://www.i-us.ru>), НЭБ (<http://www.elibrary.ru>) и Киберленинки (<http://cyberleninka.ru/journal/n/informatsionno-upravlyayuschiesistemy>).

УДК 519.165, 517.938

doi:10.31799/1684-8853-2019-1-11-22

## Исследование свойств классов эквивалентности перестановок с помощью обратного преобразования Робинсона — Шенстеда — Кнута

Н. Н. Васильев<sup>а, б</sup>, канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник, [orcid.org/0000-0002-0841-1168](https://orcid.org/0000-0002-0841-1168)

В. С. Дужин<sup>б</sup>, соискатель, [orcid.org/0000-0001-8399-284X](https://orcid.org/0000-0001-8399-284X), [vsduzhin@etu.ru](mailto:vsduzhin@etu.ru)

А. Д. Кузьмин<sup>б</sup>, студент, [orcid.org/0000-0001-9975-4686](https://orcid.org/0000-0001-9975-4686)

<sup>а</sup>Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН, наб. р. Фонтанки, 27, Санкт-Петербург, 191023, РФ

<sup>б</sup>Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ», Санкт-Петербург, ул. Профессора Попова, 5, Санкт-Петербург, 197376, РФ

**Введение:** вся информация о перестановке, т. е. об элементе симметрической группы  $S(n)$ , содержится в паре таблиц Юнга, сопоставляемых ей преобразованием RSK. Если же вместо перестановки рассматривать бесконечную последовательность натуральных или вещественных чисел, то вся информация о ней содержится только в записывающей бесконечной таблице Юнга. В недавней работе Д. Ромика и П. Сняды была получена явная формула, выражающая первый элемент бесконечной последовательности равномерно распределенных случайных величин через предельный угол наклона нерва нумерующей таблицы. Однако до сих пор не было произведено массовых численных экспериментов, посвященных восстановлению начала такой последовательности по началу записывающей таблицы Юнга. При этом очень важна точность такого восстановления, потому что значение даже первого элемента последовательности может быть определено только по бесконечной таблице. **Цель:** разработка программного пакета для операций над диаграммами и таблицами Юнга и его применение для компьютерных экспериментов с большими таблицами Юнга. Изучение свойств классов эквивалентности по Кнуту и двойственной эквивалентности по Кнуту на множестве перестановок посредством численных экспериментов с использованием прямого и обратного преобразования RSK. **Результаты:** разработан программный пакет на языке C++, включающий в себя функции для работы с диаграммами и таблицами Юнга. С помощью массовых численных экспериментов изучена зависимость значений первого элемента перестановки, получаемой обратным преобразованием RSK, от координат конца нерва нумерующей таблицы. Вычислены среднеквадратические отклонения этих значений для перестановок различной длины. Определялись возможные положения единицы в перестановках, принадлежащих одному и тому же классу эквивалентности по Кнуту. Выявлено, что количество этих положений не превышает количества угловых клеток соответствующей диаграммы Юнга. Экспериментально установлено, что при фиксированной записывающей таблице значение первого элемента перестановки зависит только от координат конца нерва нумерующей таблицы.

**Ключевые слова** — алгоритм RSK, соответствие RSK, классы эквивалентности перестановок, эквивалентность по Кнуту, двойственная эквивалентность по Кнуту, преобразование Шютценберже, процесс Планшереля, диаграммы Юнга, таблицы Юнга, кривая Вершика — Керова, диаграмма Браттели — Вершика, численные эксперименты, асимптотическая комбинаторика.

**Для цитирования:** Васильев Н. Н., Дужин В. С., Кузьмин А. Д. Исследование свойств классов эквивалентности перестановок с помощью обратного преобразования Робинсона — Шенстеда — Кнута. *Информационно-управляющие системы*, 2019, № 1, с. 11–22. doi:10.31799/1684-8853-2019-1-11-22

**For citation:** Vassiliev N. N., Duzhin V. S., Kuzmin A. D. Investigation of properties of equivalence classes of permutations by inverse Robinson — Schensted — Knuth transformation. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2019, no. 1, pp. 11–22 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2019-1-11-22

### Введение

Преобразование Робинсона — Шенстеда — Кнута (RSK) [1–3], задающее соответствие между перестановкой натуральных чисел и парой стандартных таблиц Юнга (записывающей  $P$  и нумерующей  $Q$ ), играет важную роль в различных комбинаторных задачах. В последнее время комбинаторика диаграмм и таблиц Юнга, в частности алгоритм RSK, находит многочисленные приложения в физике, математике и информатике [4–6].

Преобразование RSK может быть легко обобщено на бесконечные последовательности элементов линейно упорядоченного множества, если в качестве записывающих таблиц использовать

полустандартные таблицы Юнга, заполненные элементами этого упорядоченного множества. Отсюда следует, что преобразование RSK может быть применено к последовательности случайных независимых величин, равномерно распределенных на отрезке  $[0, 1]$ , т. е. к схеме Бернулли. В работе [7] было построено соответствие между двумя динамическими системами: схемой Бернулли и итерациями преобразования Шютценберже. В работе [8] было доказано, что данное соответствие является изоморфизмом. Также результатом этой работы является тот факт, что первый элемент последовательности равномерно распределенных случайных величин можно однозначно восстановить только по углу наклона пути Шютценберже нумерующей таблицы. В силу изоморфизма, по-

следовательно применяя преобразование Шютценберже к бесконечной нумерующей таблице, можно однозначно восстановить всю исходную последовательность, а следовательно, и соответствующую ей записывающую таблицу.

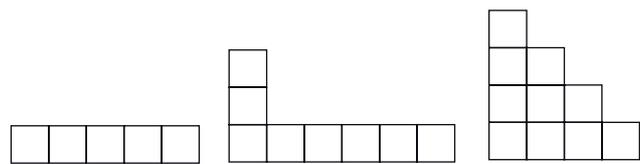
Другим результатом статьи [8] является то, что угол наклона пути Шютценберже в бесконечной таблице Юнга с вероятностью 1 по мере Планшереля имеет некоторое предельное значение. При этом в силу того, что с ростом размера таблиц скорость стремления к предельному значению крайне низка, точность восстановления значений в перестановках также не высока.

Настоящая работа посвящена изучению соответствия между углами наклона нервов нумерующих таблиц Юнга большого размера и первыми элементами конечных последовательностей посредством численных экспериментов. Разработанный программный инструмент включает в себя набор операций для работы с диаграммами и таблицами Юнга, средства их визуализации, различные генераторы случайных таблиц Юнга, алгоритмы прямого и обратного преобразований RSK для стандартных и полустандартных таблиц Юнга, преобразование Шютценберже и многие другие функции.

Преобразование RSK позволяет задать два отношения эквивалентности на множестве перестановок. Те перестановки, которым соответствует одинаковая таблица  $P$ , называются эквивалентными по Кнуту, а те, которым соответствует одинаковая таблица  $Q$ , — двойственно эквивалентными по Кнуту. Численные эксперименты, проведенные в рамках настоящей работы, посвящены изучению свойств данных классов эквивалентности. Эта работа выполнена в рамках цикла работ по численным экспериментам в области асимптотической комбинаторики на двумерном [9–12] и трехмерном [13, 14] графах Юнга.

### Определения и основные обозначения

*Диаграмма Юнга* представляет собой конечный набор клеток, составленных в столбцы, выровненные по нижней границе, длины которых образуют невозрастающую последовательность [15]. Диаграммы можно задавать разбиением целого числа  $n = l_1 + l_2 + \dots + l_n$ , где  $n$  — число клеток. Соответствующая этому разбиению диаграмма Юнга формы  $\lambda(l_1, l_2, \dots, l_n)$  состоит из  $n$  столбцов, где столбец номер  $i$  состоит из  $l_i$  ячеек. Существуют различные способы изображения диаграмм Юнга. В данной работе используется так называемая французская нотация, в которой клетки диаграммы выровнены по левому и нижнему краям. На рис. 1 изображены следующие примеры диаграмм Юнга:  $\lambda(1, 1, 1, 1, 1)$ ,  $\lambda(3, 1, 1, 1, 1)$ ,  $\lambda(4, 3, 2, 1)$ .



■ *Рис. 1.* Примеры диаграмм Юнга  
 ■ *Fig. 1.* Some examples of Young diagrams

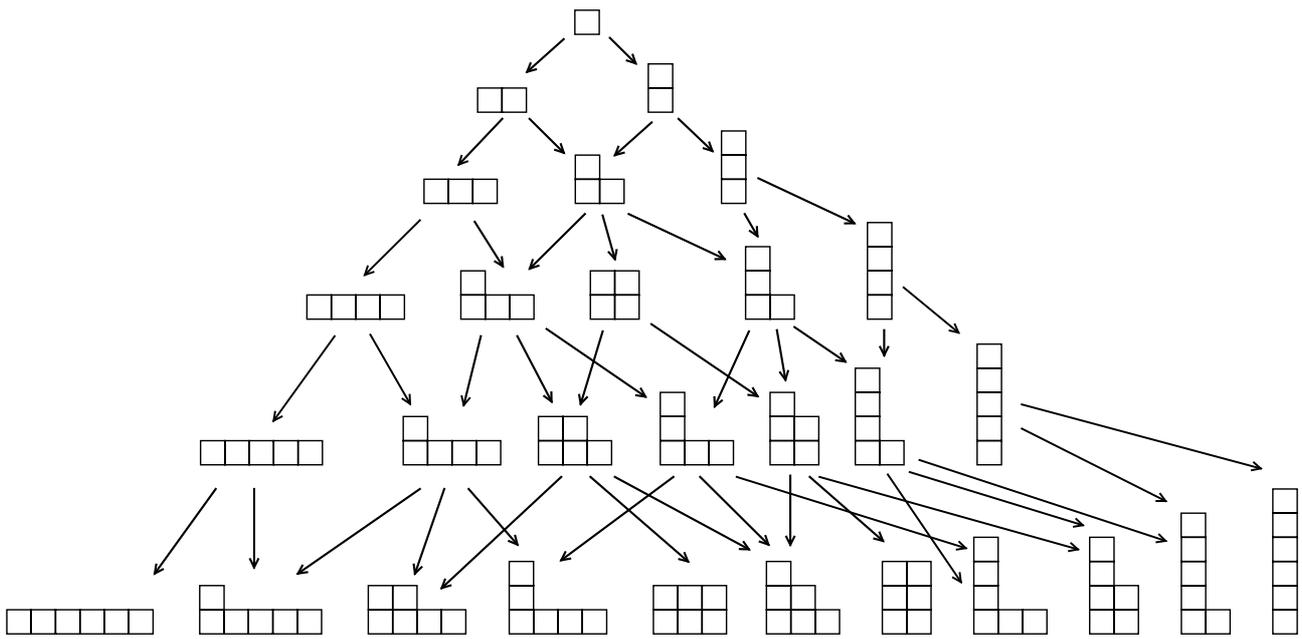
Диаграммы Юнга удобно рассматривать в качестве вершин бесконечного ориентированного градуированного графа, называемого *графом Юнга*. В этом графе ребра соединяют диаграммы Юнга, отличающиеся на одну клетку. Если ребро соединяет диаграммы  $\lambda_n$  и  $\lambda_{n+1}$ , то  $\lambda_{n+1}$  может быть получена из  $\lambda_n$  добавлением одной клетки. Начало графа Юнга изображено на рис. 2.

Если каждому ребру поставить в соответствие некоторую переходную вероятность, то на графе Юнга будет определен марковский процесс. Важнейшим классом таких процессов является класс *центральных* процессов, для которых вероятности путей между любой парой диаграмм одинаковы. На двумерном графе Юнга существует единственный выделенный центральный процесс, который называется *процессом Планшереля*. Его характерным свойством является медленный рост ширины и высоты диаграммы. Такой процесс и явные формулы переходных вероятностей для него описаны в работе [16].

*Таблица Юнга* — это диаграмма Юнга, заполненная значениями, строго возрастающими по строкам и столбцам. Значениями могут быть элементы произвольного линейно упорядоченного множества. При этом мы говорим, что эта таблица является таблицей на диаграмме  $\lambda$ , или что  $\lambda$  — форма данной таблицы.

*Стандартная таблица Юнга* — диаграмма Юнга размера  $n$ , заполненная натуральными числами от 1 до  $n$ , возрастающими по строкам и столбцам. Заметим, что каждой стандартной таблице Юнга соответствует некоторый путь на графе Юнга. В этом случае числа таблицы задают порядок добавления клеток при движении из корня графа. *Полустандартная таблица Юнга* — таблица Юнга, значения в которой не убывают по строкам и возрастают по столбцам.

Помимо конечных таблиц Юнга, состоящих из  $n$  клеток, можно также рассматривать бесконечные таблицы. Под *бесконечной таблицей Юнга* мы понимаем отображение  $\sigma: \mathbb{Z}_+^2 \Rightarrow \mathbb{N}$  такое, что при фиксированных  $i, j \in \mathbb{N}$  значения  $\sigma_{i,k}$  и  $\sigma_{k,j}$  строго возрастают при  $k \in \mathbb{N}$ . Такие бесконечные таблицы называются также нумерациями целочисленной решетки  $\mathbb{Z}_+^2$ . Заметим, что в случае бесконечных стандартных или полустандартных таблиц некоторые натуральные числа могут не



■ *Рис. 2.* Первые шесть уровней графа Юнга  
 ■ *Fig. 2.* The first six levels of the Young graph

являться значениями какой-нибудь из клеток, т. е. соответствующее отображение  $\mathbb{Z}_+^2$  во множестве натуральных чисел  $\mathbb{N}$  не обязательно является биекцией.

В данной работе рассматривались как стандартные таблицы Юнга, заполненные натуральными числами, так и полустандартные таблицы, заполненные вещественными числами, принадлежащими отрезку  $[0, 1]$ .

**Алгоритм Робинсона — Шенстеда — Кнута**

Стандартное преобразование Робинсона — Шенстеда — Кнута [1–3], называемое также алгоритмом RSK, преобразует перестановку из  $n$  целых чисел в пару стандартных таблиц Юнга размера  $n$  одинаковой формы. Одна из таблиц называется записывающей (таблица  $P$ ), а другая — нумерующей (таблица  $Q$ ). Перестановка элементов множества  $(1, 2, \dots, n)$  может рассматриваться как  $n$ -элементная последовательность, в которой все значения различны. Хорошо известно, что алгоритм RSK задает биекцию между множеством перестановок и множеством пар стандартных таблиц Юнга из  $n$  клеток [3].

В начале работы алгоритма в пустую таблицу  $P$  помещается первое значение перестановки, а в таблицу  $Q$  помещается 1. На каждом шаге алгоритма новое значение перестановки сравнивается с числами первого столбца таблицы  $P$ . В случае если данное значение больше всех значений в столбце, мы увеличиваем высоту столбца на единицу и за-

писываем значение в добавленную ячейку. Иначе оно записывается на место ближайшего большего числа, которое в свою очередь «выталкивается» в соседний справа столбец. Вытолкнутое значение ячейки занимает позицию в следующем столбце по тому же принципу. Данный процесс завершается, когда одно из вытолкнутых чисел окажется максимальным в столбце. Затем в таблицу  $Q$  помещается порядковый номер элемента перестановки в ячейку, изменившую форму таблицы  $P$ . Алгоритм завершает работу после обработки всех элементов перестановки.

На вход алгоритма может быть подана не только перестановка целых чисел, но и элементы любого линейно упорядоченного множества. В последнем случае в результате работы алгоритма будут сформированы полустандартная таблица  $P$ , заполненная элементами этого линейно упорядоченного множества, и стандартная таблица  $Q$ . В дальнейшем мы часто будем использовать в роли такого множества отрезок  $[0, 1]$ .

Ключевым моментом в доказательстве биективности соответствия RSK между перестановками и парами таблиц Юнга является тот факт, что каждый шаг алгоритма RSK обратим. Действительно, ячейка с максимальным числом таблицы  $Q$  соответствует последней вытолкнутой ячейке таблицы  $P$ . Очевидно, что число, находящееся в этой ячейке в таблице  $P$ , могло быть вытолкнуто из предыдущего столбца только ближайшим меньшим значением. Руководствуясь этим принципом, можно дойти до первого столбца таблицы  $P$  и определить последнее значение в исходной перестановке.

Затем, удалив из таблицы  $Q$  ячейку с максимальным числом, а из таблицы  $P$  ячейку с теми же координатами, можно продолжить последовательно повторять вышеописанные шаги, что позволит восстановить всю исходную перестановку вплоть до первого значения. В этом состоит доказательство биективности преобразования RSK. Так как в силу этого факта исходные перестановки взаимно-однозначно соответствуют получаемым парам таблиц Юнга, то может быть также определено обратное ему преобразование  $RSK^{-1}$ .

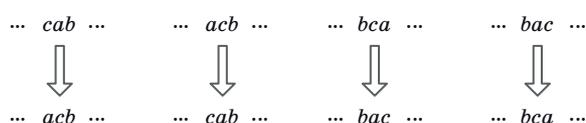
Элементы столбцов, выталкиваемые в процессе алгоритма, образуют так называемый путь вставки, или путь RSK. Асимптотика путей вставки была исследована в работах [17, 18].

### Классы эквивалентности по Кнуту и преобразования Кнута

Классы эквивалентности по Кнуту и двойственной эквивалентности по Кнуту могут быть также определены в терминах так называемых преобразований Кнута. Преобразованием Кнута последовательности целочисленных элементов называется ее преобразование в другую последовательность целочисленных элементов, имеющую один из типов, приведенных на рис. 3, где  $a < b < c$ , все остальные элементы остаются на месте.

Таким образом, преобразование Кнута меняет два соседних элемента  $a$  и  $c$  при условии, что рядом с ними стоит элемент  $b$ , для которого выполнено условие  $a < b < c$ . Например, фрагмент последовательности 7, 3, 5 может быть заменен на 3, 7, 5. Кнутом было доказано, что две перестановки эквивалентны тогда и только тогда, когда одну можно получить из другой последовательностью преобразований Кнута [19].

Другим важным свойством стандартного преобразования RSK является то, что при обращении перестановки соответствующие ей таблицы  $P$  и  $Q$  меняются местами. А потому, если пара перестановок  $\sigma$  и  $\pi$  эквивалентны по Кнуту, то  $\sigma^{-1}$  и  $\pi^{-1}$  — двойственно эквивалентны по Кнуту и наоборот. Перестановка, полученная в ходе обратного преобразования  $RSK^{-1}$ , примененного к паре таблиц  $P, Q$ , эквивалентна обратной перестановке, полученной в ходе преобразования  $RSK^{-1}$ , примененного к паре таблиц  $Q, P$ .



■ Рис. 3. Типы преобразований Кнута  
 ■ Fig. 3. Types of Knuth transformation

Из этого свойства вытекает, что поиск значения первого элемента перестановок  $w$  для таблиц, входящих в класс двойственной эквивалентности по Кнуту, эквивалентен поиску положения элемента перестановки  $w^{-1}$  со значением «единица» у таблиц, эквивалентных по Кнуту.

### Преобразование Шютценберже

Преобразование Шютценберже [20], известное также как игра в пятнадцать (jeu de taquin), преобразует таблицу Юнга размера  $n$  в таблицу Юнга размера  $n - 1$ . Это преобразование часто применяется для решения различных комбинаторных задач и, как показано в статьях [7, 8], связано с преобразованием RSK. Заметим, что преобразование Шютценберже также применимо к бесконечным таблицам Юнга.

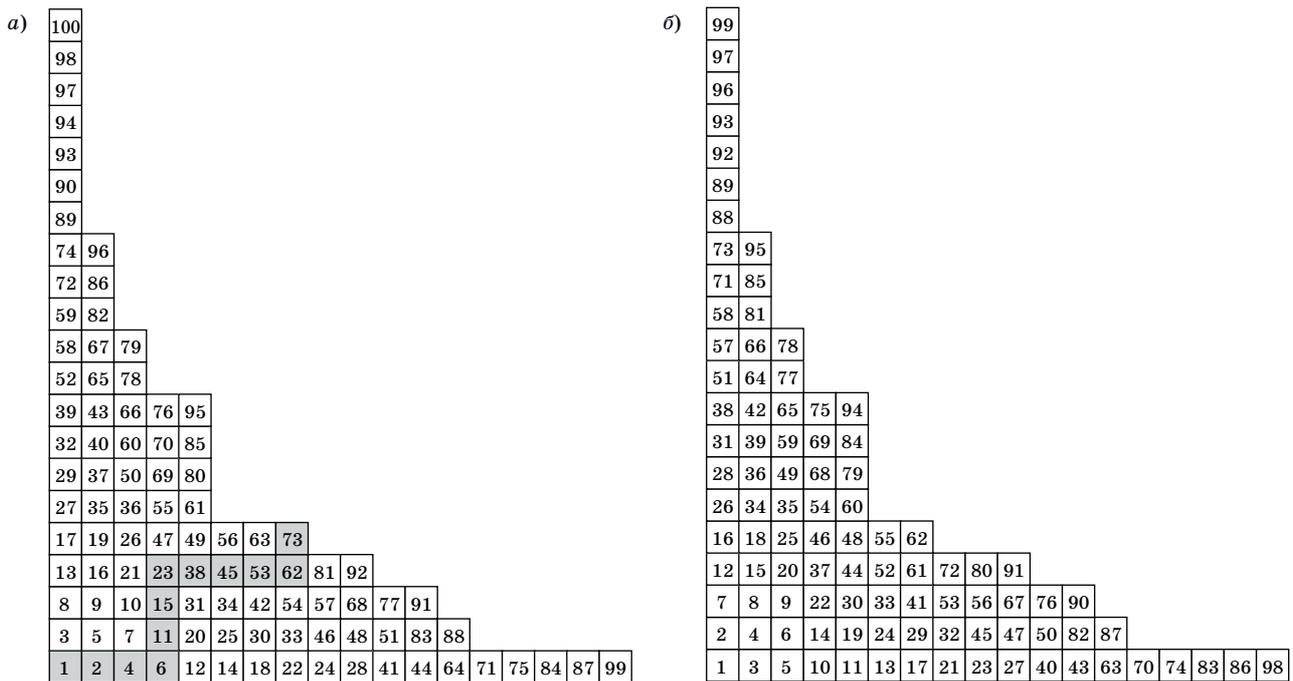
В начале работы алгоритма из таблицы удаляется первая клетка. На освободившееся место перемещается одна из двух соседних клеток, расположенных сверху или справа от удаленной. Для перемещения выбирается клетка с меньшим значением. На освободившееся место по такому же принципу ставится значение одной из клеток, соседних с перемещаемой. Алгоритм завершает работу при достижении угловой клетки диаграммы, поскольку у таких клеток отсутствуют соседи сверху и справа. В полученной таблице размера  $n - 1$  уменьшаются на единицу все значения, после чего она оказывается приведенной к виду стандартной таблицы Юнга.

Путь Шютценберже (нерв) таблицы Юнга — множество клеток таблицы, смещаемых при преобразовании Шютценберже. На рис. 4,  $a$  изображена исходная таблица Юнга и соответствующий ей нерв, а на рис. 4,  $b$  — образ этой таблицы после применения к ней преобразования Шютценберже.

Преобразования RSK и Шютценберже связаны между собой: смещение последовательности на один элемент влево (забывание первого элемента последовательности) равносильно применению к нумерующей таблице преобразования Шютценберже. Заметим, что, помимо классического преобразования Шютценберже, существуют также его модификации [21], на основе которых, в частности, может быть реализован генератор равномерно распределенных таблиц Юнга.

### Соответствие между значением первого элемента последовательности и углом наклона пути Шютценберже нумерующей таблицы

В настоящей работе для обозначения конца нерва и визуализации диаграмм применяются



■ **Рис. 4.** Преобразование Шютценберже: *a* — исходная таблица Юнга и путь Шютценберже; *б* — преобразованная таблица Юнга

■ **Fig. 4.** The Schützenberger transformation: *a* — the initial Young tableau and its nerve; *б* — the transformed Young tableau

нормированные координаты Вершика — Керова. Эта система координат  $(u, v)$  получается из прямоугольной системы координат  $(x, y)$  поворотом осей на  $45^\circ$  против часовой стрелки. Для некоторых задач комбинаторики диаграмм Юнга ее удобнее использовать вместо прямоугольной системы координат  $(x, y)$ .

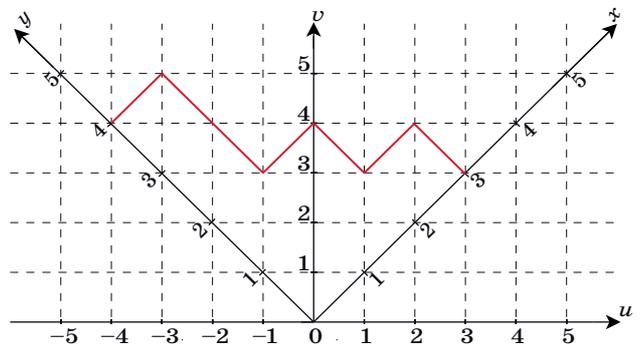
Красной линией (рис. 5) выделена форма диаграммы Юнга из семи клеток, представленной в обеих системах координат. Заметим, что изображение диаграмм Юнга в системе координат Вершика — Керова часто называют русской нотацией.

Пусть  $W_n \in [-2, 2]$  означает нормированную проекцию конца нерва нумерующей таблицы  $t_n$  на ось абсцисс системы координат Вершика — Керова, а  $\theta_n$  — угол наклона нерва, который определяется как угол наклона прямой, соединяющей конец этого нерва с началом координат.

В теореме 1.1 работы [8] было доказано, что с вероятностью 1 по мере Планшереля у бесконечной таблицы Юнга  $t$  существует предельное значение угла наклона  $\theta$  пути Шютценберже:

$$(\cos \theta(t), \sin \theta(t)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{p}(t_k)}{\|\mathbf{p}(t_k)\|},$$

где  $\mathbf{p}(t_k)$  — вектор, соединяющий начало координат с концом нерва таблицы  $t_k$ , состоящей из  $k$  первых клеток таблицы  $t$ .



■ **Рис. 5.** Диаграмма Юнга в системе координат Вершика — Керова и в прямоугольной системе координат

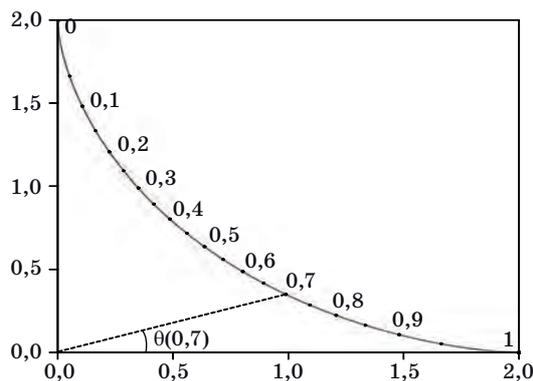
■ **Fig. 5.** A Young diagram in the Vershik — Kerov coordinate system and in the rectangular coordinate system

Аналогично существует предельное значение  $W$  нормированной проекции  $W_n$ . Значения угла  $\theta$  и проекции  $W$  связаны уравнением

$$\operatorname{ctg} \left( \frac{\pi}{4} - \theta \right) = \frac{2}{\pi} \left( \sin^{-1} \left( \frac{W}{2} \right) + \frac{\sqrt{4 - W^2}}{W} \right). \quad (1)$$

Угол  $\theta_n$  наклона нерва таблицы  $t_n$  определен соотношением

$$\operatorname{ctg} \left( \frac{\pi}{4} - \theta_n \right) = \frac{x_n + y_n}{x_n - y_n}, \quad (2)$$



■ **Рис. 6.** Связь между значениями первых элементов входящих бесконечных последовательностей и предельными углами наклона нервов таблиц  $Q$

■ **Fig. 6.** The connection between the values of first elements of infinite sequences and limit angles of nerves of  $Q$  tableaux

где  $x_n, y_n$  — прямоугольные координаты конца нерва таблицы  $t_n$ .

Первый элемент  $z \in [0, 1]$  из входящей бесконечной последовательности может быть определен по значению  $W \in [-2, 2]$  по формуле

$$z = \frac{1}{2} + \frac{W\sqrt{4-W^2}}{4\pi} + \frac{\sin^{-1}\left(\frac{W}{2}\right)}{\pi}. \quad (3)$$

Заметим, что правая часть этого соотношения является функцией распределения случайной величины  $W$ , полученной по случайной таблице  $t$  с планшерелевским распределением.

Значение  $W$ , соответствующее конкретному первому элементу  $z \in [0, 1]$  входящей последовательности, определяется из уравнения (3), рассматриваемого как неявное трансцендентное уравнение относительно  $W$ . Значение предельного угла  $\theta$  вычисляется из (2). В вычислениях мы использовали итерационный процесс Ньютона для решения этого уравнения относительно  $W$ . На рис. 6 показаны точки кривой Вершика — Керова — Логана — Шеппа, задающей предельную форму для типичной планшерелевской диаграммы, соответствующие различным значениям параметра  $z$ . Параметр  $z \in [0, 1]$  можно также использовать для параметризации кривой Вершика — Керова — Логана — Шеппа.

### Программная реализация

В рамках настоящей работы был разработан программный пакет на языке C++, ориентированный для работы с таблицами Юнга. Пакет включает в себя следующие функции:

- алгоритм RSK;

- обратный алгоритм  $RSK^{-1}$ ;
- построение частотной гистограммы значений первого элемента перестановки;
- построение списка позиций, занимаемых единицей в перестановках;
- генератор случайных планшерелевских таблиц Юнга одинаковой формы;
- генератор случайных таблиц Юнга заданной формы с заданным концом нерва;
- генератор случайных таблиц Юнга заданной формы с фиксированными значениями в первой строке;
- преобразование Шютценберже и его модификации;
- средства визуализации.

В силу того, что задачи асимптотической комбинаторики, связанные с исследованием диаграмм и таблиц Юнга, имеют очень высокую сложность, их моделирование требует привлечения диаграмм и таблиц очень больших размеров. По этой причине некоторые функции были реализованы с применением технологии параллельных вычислений OpenMP.

С использованием разработанного пакета были проведены компьютерные эксперименты, в которых исследовались классы эквивалентности и двойственной эквивалентности по Кнуту. Генерировались различные случайные записывающие и нумерующие таблицы Юнга, распределенные по мере Планшереля (типичные по Планшерелю) и принадлежащие определенному классу эквивалентности или двойственной эквивалентности по Кнуту.

### Численные эксперименты

Все приведенные численные эксперименты делятся на несколько групп. Для каждой группы экспериментов при помощи генератора типичных планшерелевских таблиц Юнга генерировалось определенное количество пар таблиц (разное для каждого отдельного эксперимента). Для формирования определенного класса эквивалентности или двойственной эквивалентности по Кнуту фиксировалась либо записывающая, либо нумерующая таблица. Для всех нумерующих таблиц вычислялись нервы, и эти нервы объединялись в группы с одинаковыми координатами концов. С помощью обратного преобразования  $RSK^{-1}$  восстанавливалась последовательность, которой соответствовала каждая конкретная пара таблиц Юнга.

К каждой паре таблиц, определяющих перестановки, принадлежащих одному и тому же классу эквивалентности или двойственной эквивалентности по Кнуту, последовательно применялся алгоритм обратного преобразования  $RSK^{-1}$ . При исследовании классов эквивалентности по

Кнуту вычислялось значение первого элемента во входящих последовательностях. Для исследования классов двойственной эквивалентности по Кнуту изучалось множество возможных положений единицы во входящих последовательностях, принадлежащих одному и тому же классу.

Исследовались:

1) зависимость значения первого элемента восстановленной входной последовательности от координат конца нерва нумерующей таблицы и позиция этого первого элемента в первой строке записываемой таблицы для последовательностей, соответствующих парам таблиц, участвующих в эксперименте;

2) множество возможных положений единицы в вычисленной с помощью обратного преобразования  $RSK^{-1}$  входной последовательности при фиксации нумерующей таблицы.

**Зависимость значения первого элемента входной последовательности от координат конца пути Шютценберже**

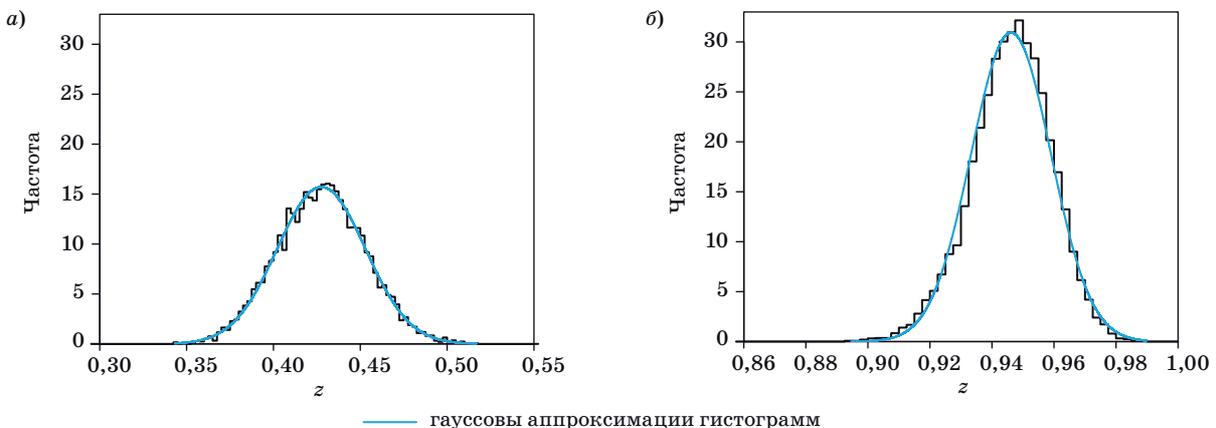
В данной группе численных экспериментов изучалась зависимость значений первого элемента входной последовательности от координат конца нерва таблицы  $Q$  и результат сравнивался с теоретически полученной в работе [8] формулой. Было сгенерировано  $10^4$  типичных по мере Планшереля таблиц  $P$  одинаковой формы, состоящих из  $10^5$  клеток, а также  $10^5$  типичных по мере Планшереля таблиц  $P$  одинаковой формы, состоящих из  $10^4$  клеток. Для каждой группы таблиц  $P$  было построено по одной таблице  $Q$  той же формы со всеми возможными различными координатами конца пути Шютценберже. Количество таблиц  $Q$  было выбрано равным количеству угловых клеток диаграммы, форму которой имеют таблицы  $P$  и  $Q$ .

Изучались классы двойственной эквивалентности по Кнуту, включающие в себя одну из сгенерированных таблиц  $Q$  и множество таблиц  $P$ . Для представителей каждого класса эквивалентности с помощью обратного преобразования  $RSK^{-1}$  вычислялось множество соответствующих им последовательностей. Строились частотные гистограммы значений первых элементов полученных последовательностей.

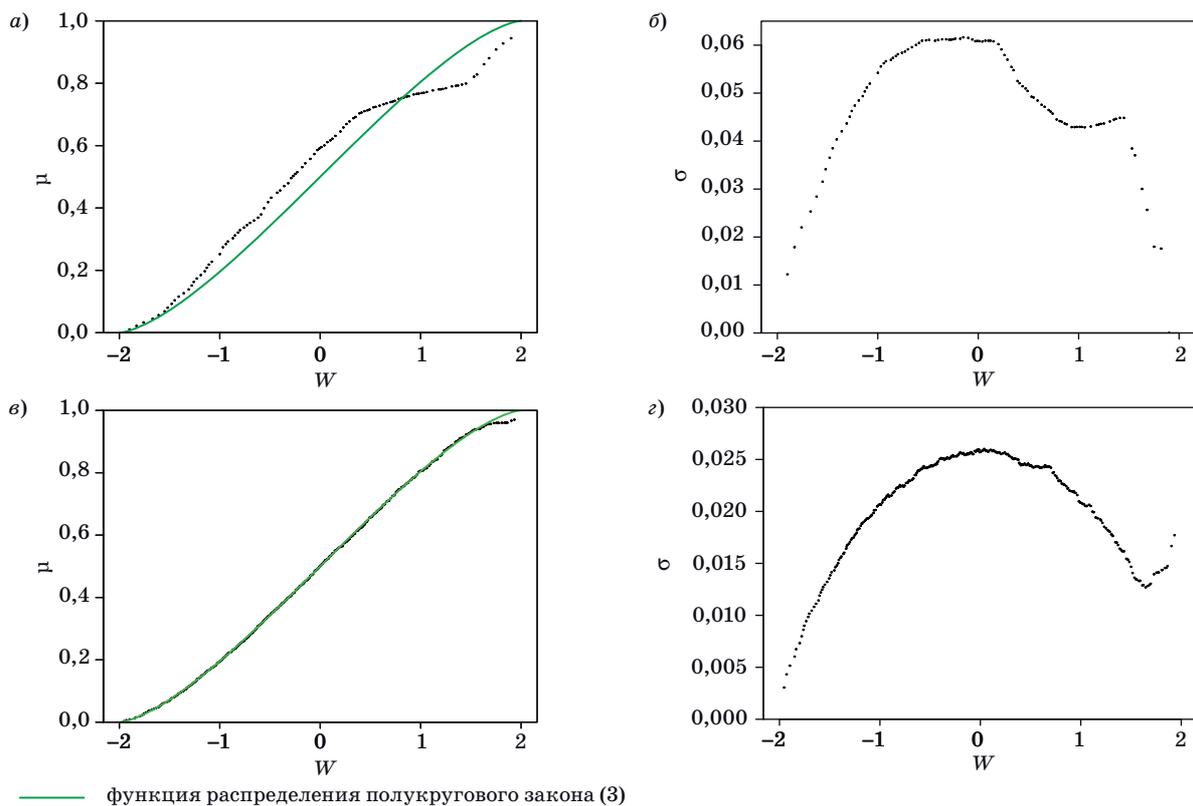
Примеры полученных гистограмм для двух различных классов двойственной эквивалентности по Кнуту представлены на рис. 7, *а* и *б*. Рассматривалось  $10^4$  таблиц  $P$  размера  $10^5$  из соответствующего класса. Каждая из гистограмм была аппроксимирована гауссовой кривой, параметры которой  $\sigma$  и  $\mu$  соответствуют среднему значению и среднеквадратическому отклонению значений первого элемента последовательностей, соответствующих определенному классу эквивалентности.

На рис. 8, *а* изображен график математических ожиданий, а на рис. 8, *б* — среднеквадратических отклонений значений первого элемента последовательности длины  $10^4$  в зависимости от проекции конца нерва на горизонтальную ось системы координат Вершика — Керова для  $10^5$  таблиц  $P$  фиксированных классов двойственной эквивалентности по Кнуту. На рис. 8, *в, г* изображены соответствующие графики для экспериментов, в которых рассматривалось по  $10^4$  таблиц  $P$ , имеющих размер  $10^5$ .

Как видно из рис. 8, *а, в, с* с ростом размера таблиц оценки значений первого элемента последовательности приближаются к теоретическим значениям. Также с ростом размера таблиц уменьшается разброс оцениваемых значений, что показано на рис. 8, *б, г*: максимальное среднеквадратическое отклонение для таблиц размера  $10^4$



■ **Рис. 7.** Гистограммы частот значений первого элемента последовательности для таблицы  $Q$  с координатами конца нерва: *а* —  $-0,224522$ ; *б* —  $1,612762$   
 ■ **Fig. 7.** Frequency histograms of the first element values of the sequence for the  $Q$  tableau with the following coordinates of nerve end: *а* —  $-0,224522$ ; *б* —  $1,612762$ . Gaussian approximations of histograms are marked in blue



■ **Рис. 8.** Распределение значений первого элемента в последовательностях: размера  $10^4$  ( $10^5$  таблиц  $P$ ), где  $a$  — математические ожидания;  $б$  — среднеквадратические отклонения; размера  $10^5$  ( $10^4$  таблиц  $P$ ), где  $в$  — математические ожидания;  $з$  — среднеквадратические отклонения

■ **Fig. 8.** The distribution of values of the first element in sequences: of size  $10^4$  ( $10^5$  of  $P$  tableaux), where  $a$  — mean values;  $б$  — standard deviations; of size  $10^5$  ( $10^4$  of  $P$  tableaux), where  $в$  — mean values;  $з$  — standard deviations. The cumulative distribution function of the semicircle distribution is marked in green

оказалось равным 0,0616, а для таблиц размера  $10^5$  равным 0,026.

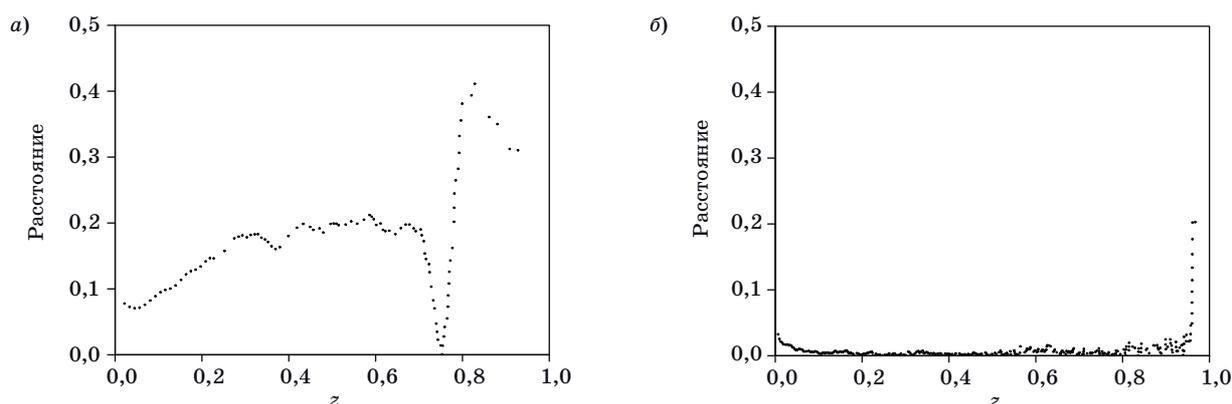
Для исследования точности оценки значения первого элемента последовательности был также проведен следующий эксперимент. Для каждого полученного в ходе предыдущего эксперимента значения  $z$  с помощью метода Ньютона вычислялось соответствующее ему значение  $W$  из формулы (3), а значение угла наклона  $\theta$  получалось из (1). Затем вычислялись расстояния между точками пересечения с предельной кривой Вершика — Керова — Логана — Шеппа нервов таблиц  $Q$  и прямых с углами наклона  $\theta$ . Эти расстояния представляют собой отклонения значений  $W$  в численном эксперименте от теоретических предельных значений. На рис. 9,  $a, б$  приведены графики вычисленных отклонений.

Легко видеть, что точность соответствия между значением первого элемента последовательности и углом наклона нерва таблицы  $Q$  тем выше, чем больше размер таблиц. Результаты экспериментов показывают существенное возрастание точности при увеличении размера таблиц, участвующих в эксперименте. Это же можно видеть

и на рис. 8,  $a, в$ , которые демонстрируют отклонение значения вычисленного математического ожидания значения первого элемента от его предельного теоретического значения.

В ходе экспериментов было замечено, что при фиксированной таблице  $P$  значения первого элемента последовательности зависят только от координат конца нерва таблицы  $Q$ . Это означает, что при фиксированном наборе таблиц  $P$  и фиксированных координатах конца нерва Шютценберже таблиц  $Q$  в этом эксперименте гистограммы значений первого элемента получаются идентичными.

Для проверки этого факта в компьютерном эксперименте было сгенерировано 100 различных таблиц  $Q$  размера  $10^4$  одинаковой формы с одинаковыми координатами конца нерва Шютценберже и 10 таблиц  $P$  такой же формы. Для полученных классов эквивалентности по Кнуту с помощью обратного преобразования  $RSK^{-1}$  строились перестановки. В результирующих перестановках значения первого элемента оказались одинаковыми, при этом уже вторые элементы в полученных перестановках могли различаться. На основе этих численных экспериментов можно предположить,



■ **Рис. 9.** Расстояния между точками пересечения с предельным фронтом прямых с углами наклона  $\theta$  и нервов таблиц  $Q$  размера  $10^4$  (а) и  $10^5$  (б)

■ **Fig. 9.** Distances between intersection points of the limit shape with lines with inclinations  $\theta$  and nerves of tableaux  $Q$  of size  $10^4$  (a) and  $10^5$  (б)

что значение первого элемента перестановки однозначно определяется таблицей  $P$  и координатами конца нерва Шютценберже таблицы  $Q$ . Из этого предположения следует, что количество возможных положений единицы для элементов одного класса двойственной эквивалентности по Кнуту не превышает количества угловых клеток нумерующей таблицы, т. е. количества возможных концов нерва.

**Исследование положения единицы в перестановках, двойственно эквивалентных по Кнуту**

Одним из свойств стандартного преобразования RSK для перестановок является то, что преобразование RSK, примененное к обратной перестановке, меняет между собой записывающую и нумерующую таблицы. Отсюда следует, что поиск положения единицы в перестановках, двойственно эквивалентных по Кнуту, эквивалентен поиску значения первого элемента в перестановках, эквивалентных по Кнуту.

В следующей группе экспериментов определялось множество возможных положений единицы в перестановках, двойственно эквивалентных по Кнуту. Результаты экспериментов показали, что количество возможных положений единицы в перестановках, принадлежащих одному классу двойственной эквивалентности по Кнуту, меньше или равно количеству угловых клеток в соответствующей таблицам диаграмме Юнга, что полностью соответствует высказанному предположению о зависимости значения первого элемента только от таблицы  $P$  и координат конца нерва таблицы  $Q$ , так как нерв таблицы всегда кончается в одной из угловых клеток диаграммы.

Было сгенерировано 1000 планшерелевских таблиц одинаковой формы с 32 угловыми клетками, но с различными координатами конца нерва.

В ходе эксперимента было построено 1000 классов двойственной эквивалентности по Кнуту: сгенерированные таблицы использовались и как таблицы  $P$ , и как таблицы  $Q$ . Таким образом, всего было сгенерировано  $10^6$  различных пар  $P, Q$  таблиц Юнга. В данных классах определялось положение единицы в соответствующих перестановках. В результате данного эксперимента было выяснено, что количество возможных положений единицы в перестановке для каждого класса двойственной эквивалентности находилось в диапазоне от 6 до 15, что не превышает количества угловых клеток.

Также были проведены эксперименты для произвольных таблиц, не обязательно типичных по Планшерелю. В одном из экспериментов было сгенерировано 1000 прямоугольных таблиц размера 1000 (50 по горизонтали, 20 по вертикали). Такая форма была выбрана из тех соображений, что прямоугольные таблицы имеют только одну угловую клетку. Для сформированных из них классов двойственной эквивалентности аналогичным образом производился подсчет количества возможных положений единицы в соответствующих последовательностях. Какова бы ни была прямоугольная таблица, участвовавшая в эксперименте, множество возможных положений единицы во входной последовательности состояло из одного элемента, что соответствует предположению, высказанному в конце предыдущего подраздела. Нужно отметить, что у каждого класса значение было различным и зависело лишь от таблицы  $Q$ .

**Заключение**

В данной работе изучались свойства перестановок, принадлежащих одному и тому же классу эквивалентности или классу двойственной экви-

валентности по Кнуту. Для двойственной эквивалентности с помощью обратного преобразования  $RSK^{-1}$  исследовалось значение первого элемента соответствующей перестановки. Для эквивалентности по Кнуту исследовались положения единиц для перестановок, принадлежащих одному классу. В численных экспериментах изучалась точность восстановления первого элемента по углу наклона пути Шютценберже нумерующей таблицы.

С помощью серии компьютерных экспериментов изучен характер зависимости значений первого элемента перестановки, получаемой обратным преобразованием  $RSK^{-1}$ , от координат конца нерва нумерующей таблицы. Эта зависимость сравнивалась с предельной теоретической формулой [8], которая справедлива в случае бесконечных таблиц Юнга.

Экспериментально установлено, что при фиксированной записывающей таблице значение первого элемента перестановки зависит только от координат конца нерва нумерующей таблицы. Следствием данного наблюдения является то, что количество возможных положений единиц в перестановке не превышает количества угловых клеток соответствующей диаграммы Юнга.

В дальнейшем планируется реализовать быстрые алгоритмы прямого и обратного преобразований  $RSK$ , которые позволят проводить массивные численные эксперименты на таблицах Юнга значительно большего размера.

Авторы выражают благодарность А. М. Вершику за многочисленные идеи для численных экспериментов.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 17-01-00433.

## Литература

1. **Robinson G. de B.** On the representations of the symmetric group. *American Journal of Math.*, 1938, vol. 60, pp. 745–760.
2. **Schensted C.** Longest increasing and decreasing subsequences. *Canadian Journal of Math.*, 1961, vol. 13, pp. 179–191.
3. **Knuth Donald E.** Permutations, matrices, and generalized Young tableaux. *Pacific J. Math.*, 1970, vol. 34, iss. 3, pp. 709–727.
4. **O’Connell N.** A path-transformation for random walks and the Robinson — Schensted correspondence. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 2003, vol. 355, pp. 3669–3697. Available at: <https://www.ams.org/journals/tran/2003-355-09/S0002-9947-03-03226-4/S0002-9947-03-03226-4.pdf> (accessed 15 November 2018).
5. **Dauvergne D.** *The Archimedean limit of random sorting networks*. Available at: [arxiv.org/abs/1802.08934](https://arxiv.org/abs/1802.08934) (accessed 11 November 2018).
6. **Angel O., Holroyd A. E., Romik D., Virag B.** Random sorting networks. *Advances in Mathematics*, 2007, vol. 215, iss. 2, pp. 839–868. doi.org/10.1016/j.aim.2007.05.019
7. **Kerov S. V. and Vershik A. M.** The characters of the infinite symmetric group and probability properties of the Robinson — Schensted — Knuth algorithm. *SIAM J. Algebraic Discrete Methods*, 1986, vol. 7, iss. 1, pp. 116–124.
8. **Romik D. and Śniady P.** Jeu de taquin dynamics on infinite Young tableaux and second class particles. *Annals of Probability: An Official Journal of the Institute of Mathematical Statistics*, 2015, vol. 43, iss. 2, pp. 682–737.
9. **Vershik A., Pavlov D.** Numerical experiments in problems of asymptotic representation theory. *Journal of Mathematical Sciences*, 2010, vol. 168, iss. 3, pp. 351–361.
10. **Васильев Н. Н., Дужин В. С.** Построение неприводимых представлений симметрической группы  $S(n)$  с большими и максимальными размерностями. *Информационно-управляющие системы*, 2015, № 3, с. 17–22. doi:10.15217/issn1684-8853.2015.3.17
11. **Vasiliev N. N., Duzhin V. S.** A study of the growth of the maximum and typical normalized dimensions of strict Young diagrams. *Journal of Mathematical Sciences*, 2016, vol. 216, iss. 1, pp 53–64. doi:10.1007/s10958-016-2887-x
12. **Duzhin V. S., Vasilyev N. N.** Asymptotic behavior of normalized dimensions of standard and strict Young diagrams — growth and oscillations. *Journal of Knot Theory and its Ramifications*, 2016, vol. 25, iss. 12. doi:10.1142/S0218216516420025
13. **Duzhin V., Vasilyev N.** Modeling of an asymptotically central Markov process on 3D Young graph. *Mathematics in Computer Science*, 2017, vol. 11, iss. 3–4, pp. 315–328. doi:10.1007/s11786-017-0314-4
14. **Vasiliev N. N., Duzhin V. S.** Numerical study of the asymptotics of path probabilities in a Markov process close to a central one on the 3D Young graph. *Journal of Mathematical Sciences*, 2017, vol. 224, iss. 2, pp. 214–220. doi:10.1007/s10958-017-3406-4
15. **Fulton W.** *Young diagrams, with applications to representation theory and geometry*. Cambridge University Press, 1996. 272 p.
16. **Вершик А. М., Керов С. В.** Асимптотическая теория характеров симметрической группы. *Функциональный анализ и его приложения*, 1981, т. 15, вып. 4, с. 15–27.
17. **Śniady P.** Robinson — Schensted — Knuth algorithm, jeu de taquin and Kerov — Vershik measures on infinite tableaux. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 2013, vol. 28, iss. 2. doi:10.1137/130930169
18. **Romik D., Śniady P.** *Limit shapes of bumping routes in the Robinson — Schensted correspondence*. Available at: [arXiv:1304.7589v2](https://arxiv.org/abs/1304.7589v2) (accessed 11 November 2018).

19. Fomin S. V. *Knuth equivalence, jeu de taquin, and the Littlewood — Richardson rule*. Appendix 1 to Chapter 7. In: Stanley R. P. *Enumerative Combinatorics*. Vol. 2. Cambridge University Press, 1999. 595 p.
20. Schützenberger M. P. Quelques remarques sur une construction de Schensted. *Math. Scandinavica*, 1963, vol. 12, pp. 117–128.

21. Duzhin V., Vasilyev N. Schützenberger transformation on graded graphs: Implementation and numerical experiments. *International Conf. “Polynomial Computer Algebra 2018”*, Saint-Petersburg, 16–21 April 2018, ed. by N. N. Vassiliev, VVM Publishing, Saint-Petersburg, 2018, pp. 41–46.

UDC 519.165, 517.938

doi:10.31799/1684-8853-2019-1-11-22

### Investigation of properties of equivalence classes of permutations by inverse Robinson — Schensted — Knuth transformation

N. N. Vassiliev<sup>a,b</sup>, PhD, Phys.-Math., Senior Researcher, [orcid.org/0000-0002-0841-1168](https://orcid.org/0000-0002-0841-1168)

V. S. Duzhin<sup>b</sup>, Researcher, [orcid.org/0000-0001-8399-284X](https://orcid.org/0000-0001-8399-284X), [vsduzhin@etu.ru](mailto:vsduzhin@etu.ru)

A. D. Kuzmin<sup>b</sup>, Student, [orcid.org/0000-0001-9975-4686](https://orcid.org/0000-0001-9975-4686)

<sup>a</sup>Saint-Petersburg Department of V. A. Steklov Institute of Mathematics of the RAS, 27, Fontanka, 191023, Saint-Petersburg, Russian Federation

<sup>b</sup>Saint-Petersburg Electrotechnical University ETU «LETI», 5, Professora Popova St., 197376 Saint-Petersburg, Russian Federation

**Introduction:** All information about a permutation, i.e. about an element of a symmetric group  $S(n)$ , is contained in a pair of Young tableaux mapped to it by RSK transformation. However, when considering an infinite sequence of natural or real numbers instead of a permutation, all information about it is contained only in an insertion infinite Young tableau. The connection between the first element of an infinite sequence of uniformly distributed random values and the limit angle of the recording tableau nerve was found in a recent work by D. Romik and P. Sniady. However, so far there were no massive numerical experiments devoted to the reconstruction of the beginning of such a sequence by the beginning of an insertion Young tableau. The reconstruction accuracy is very important, because even the value of the first element of a sequence can be determined only by an infinite tableau. **Purpose:** Developing a software package for operations on Young diagrams and Young tableaux, and its application for numerical experiments with large Young tableaux. Studying the properties of Knuth equivalence classes and dual Knuth equivalence classes on a set of permutations by numerical experiments using direct and inverse RSK transformation. **Results:** A software package is developed using the C++ programming language. It includes functions for dealing with Young diagrams and tableaux. The dependence of values of the first element of a permutation obtained by inverse RSK transformation on the recording tableau nerve end coordinates was investigated by conducting massive numerical experiments. Standard deviations of these values were calculated for permutations of different sizes. We determined possible positions of 1 in permutations of the same Knuth equivalence class. It has been found out that the number of these positions does not exceed the number of corner boxes of the corresponding Young diagram. Experiments showed that for a fixed insertion tableau, the value of the first element of a permutation depends only on the recording tableau nerve end coordinates.

**Keywords** — RSK algorithm, RSK correspondence, equivalence classes of permutations, Knuth equivalence, dual Knuth equivalence, Schützenberger transformation, Plancherel process, Young diagrams, Young tableaux, Vershik — Kerov curve, Bratteli — Vershik diagram, numerical experiments, asymptotic combinatorics.

**For citation:** Vassiliev N. N., Duzhin V. S., Kuzmin A. D. Investigation of properties of equivalence classes of permutations by inverse Robinson — Schensted — Knuth transformation. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2019, no. 1, pp. 11–22 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2019-1-11-22

### References

- Robinson G. de B. On the representations of the symmetric group. *American Journal of Math.*, 1938, vol. 60, pp. 745–760.
- Schensted C. Longest increasing and decreasing subsequences. *Canadian Journal of Math.*, 1961, vol. 13, pp. 179–191.
- Knuth Donald E. Permutations, matrices, and generalized Young tableaux. *Pacific J. Math.*, 1970, vol. 34, iss. 3, pp. 709–727.
- O’Connell N. A path-transformation for random walks and the Robinson — Schensted correspondence. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 2003, vol. 355, pp. 3669–3697. Available at: <https://www.ams.org/journals/tran/2003-355-09/S0002-9947-03-03226-4/S0002-9947-03-03226-4.pdf> (accessed 15 November 2018).
- Dauvergne D. *The Archimedean limit of random sorting networks*. Available at: [arxiv.org/abs/1802.08934](https://arxiv.org/abs/1802.08934) (accessed 11 November 2018).
- Angel O., Holroyd A. E., Romik D., Virag B. Random sorting networks. *Advances in Mathematics*, 2007, vol. 215, iss. 2, pp. 839–868. doi.org/10.1016/j.aim.2007.05.019
- Kerov S. V. and Vershik A. M. The characters of the infinite symmetric group and probability properties of the Robinson — Schensted — Knuth algorithm. *SIAM J. Algebraic Discrete Methods*, 1986, vol. 7, iss. 1, pp. 116–124.
- Romik D. and Sniady P. Jeu de taquin dynamics on infinite Young tableaux and second class particles. *Annals of Probability: An Official Journal of the Institute of Mathematical Statistics*, 2015, vol. 43, iss. 2, pp. 682–737.
- Vershik A., Pavlov D. Numerical experiments in problems of asymptotic representation theory. *Journal of Mathematical Sciences*, 2010, vol. 168, iss. 3, pp. 351–361.
- Vasilyev N. N., Duzhin V. S. Building irreducible representations of a symmetric group  $S(n)$  with large and maximum dimensions. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2015, no. 3, pp. 17–22 (In Russian). doi:10.15217/issn1684-8853.2015.3.17
- Vassiliev N. N., Duzhin V. S. A study of the growth of the maximum and typical normalized dimensions of strict Young diagrams. *Journal of Mathematical Sciences*, 2016, vol. 216, iss. 1, pp. 53–64. doi:10.1007/s10958-016-2887-x

12. Duzhin V. S., Vasilyev N. N. Asymptotic behavior of normalized dimensions of standard and strict Young diagrams — growth and oscillations. *Journal of Knot Theory and its Ramifications*, 2016, vol. 25, iss. 12. doi:10.1142/S0218216516420025
13. Duzhin V., Vasilyev N. Modeling of an asymptotically central Markov process on 3D Young graph. *Mathematics in Computer Science*, 2017, vol. 11, iss. 3–4, pp. 315–328. doi:10.1007/s11786-017-0314-4
14. Vasilyev N. N., Duzhin V. S. Numerical study of the asymptotics of path probabilities in a Markov process close to a central one on the 3D Young graph. *Journal of Mathematical Sciences*, 2017, vol. 224, iss. 2, pp. 214–220. doi:10.1007/s10958-017-3406-4
15. Fulton W. *Young diagrams, with applications to representation theory and geometry*. Cambridge University Press, 1996. 272 p.
16. Vershik A. M., Kerov S. V. Asymptotic theory of characters of the symmetric group. *Funkcional'nyj analiz i ego prilozheniya* [Functional Analysis and its Applications], 1981, vol. 15, iss. 4, pp. 246–255.
17. Śniady P. Robinson — Schensted — Knuth algorithm, jeu de taquin and Kerov — Vershik measures on infinite tableaux. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 2013, vol. 28, iss. 2. doi:10.1137/130930169
18. Romik D., Śniady P. *Limit shapes of bumping routes in the Robinson — Schensted correspondence*. Available at: arXiv:1304.7589v2 (accessed 11 November 2018).
19. Fomin S. V. *Knuth equivalence, jeu de taquin, and the Littlewood — Richardson rule*. Appendix 1 to Chapter 7. In: Stanley R. P. *Enumerative Combinatorics*. Vol. 2. Cambridge University Press, 1999. 595 p.
20. Schützenberger M. P. Quelques remarques sur une construction de Schensted. *Math. Scandinavica*, 1963, vol. 12, pp. 117–128.
21. Duzhin V., Vasilyev N. Schützenberger transformation on graded graphs: Implementation and numerical experiments. *International Conf. “Polynomial Computer Algebra 2018”*, Saint-Petersburg, 16–21 April 2018, ed. by N. N. Vassiliev, VVM Publishing, Saint-Petersburg, 2018, pp. 41–46.

### УВАЖАЕМЫЕ АВТОРЫ!

Научные базы данных, включая SCOPUS и Web of Science, обрабатывают данные автоматически. С одной стороны, это ускоряет процесс обработки данных, с другой — различия в транслитерации ФИО, неточные данные о месте работы, области научного знания и т. д. приводят к тому, что в базах оказывается несколько авторских страниц для одного и того же человека. В результате для всех по отдельности считаются индексы цитирования, снижая рейтинг ученого.

Для идентификации авторов в сетях Thomson Reuters проводит регистрацию с присвоением уникального индекса (ID) для каждого из авторов научных публикаций.

Процедура получения ID бесплатна и очень проста, есть возможность провести регистрацию на 12-ти языках, включая русский (чтобы выбрать язык, кликните на зеленое поле вверх справа на стартовой странице): <https://orcid.org>

## Безопасное управление SEMS при групповом взаимодействии

А. Е. Городецкий<sup>а</sup>, доктор техн. наук, профессор, [orcid.org/0000-0002-3465-4438](https://orcid.org/0000-0002-3465-4438)

В. Г. Курбанов<sup>а, б</sup>, канд. физ.-мат. наук, доцент, [orcid.org/0000-0002-2450-9341](https://orcid.org/0000-0002-2450-9341), [vugar.kurbanov@gmail.com](mailto:vugar.kurbanov@gmail.com)

И. Л. Тарасова<sup>а, в</sup>, канд. техн. наук, доцент, [orcid.org/0000-0002-2282-150X](https://orcid.org/0000-0002-2282-150X)

<sup>а</sup>Институт проблем машиноведения РАН, Большой пр. В. О., 61, Санкт-Петербург, 199178, РФ

<sup>б</sup>Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения,

Б. Морская ул., 67, Санкт-Петербург, 190000, РФ

<sup>в</sup>Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Политехническая ул., 29, Санкт-Петербург, 195251, РФ

**Постановка проблемы:** при управлении группой взаимодействующих интеллектуальных электромеханических систем могут возникать ситуации, когда инструкции оператора и (или) система автоматического управления более высокого уровня будут противоречить внутреннему состоянию управляемых интеллектуальных электромеханических систем и (или) окружению выбора. Устранить такие обстоятельства можно с помощью алгоритмов проверки выполнения условий допустимости движений, которые могут опираться на моделирование поведения интеллектуальных электромеханических систем с использованием логико-вероятностных и логико-лингвистических описаний ситуаций и на не скалярные критерии качества при принятии решений. **Цель:** разработка алгоритмов безопасного управления роботами на основе модулей интеллектуальных электромеханических систем с фазовыми ограничениями при неполной определенности окружающей среды. **Результаты:** разработаны алгоритмы безопасного управления тремя роботами с использованием математического описания задачи ситуационного управления группой интеллектуальных электромеханических систем и методологии организации ситуационного управления группой мобильных интеллектуальных электромеханических систем. Суть алгоритмов заключается в перемещении роботов из некоторых текущих позиций в заданные терминальные положения без столкновения между собой. Во избежание столкновений система принятия решений в центральной нервной системе роботов использует приоритеты роботов, основанные на расстоянии между роботами. Предложен подход преодоления неопределенности на пути (траектории) роботов. При этом рассматриваются неопределенности в виде ограничений логико-вероятностного и логико-лингвистического типа. Показано, что эти ограничения можно перевести в логико-интервальный вид. Это позволяет использовать стандартные процедуры математического программирования при поиске оптимального решения. **Практическая значимость:** полученные алгоритмы можно использовать для принятия решений в центральной нервной системе и при управлении роботами.

**Ключевые слова** – безопасное управление, интеллектуальные роботы, умные электромеханические системы, групповое ситуационное взаимодействие, динамическое пространство конфигураций, центральная нервная система.

**Для цитирования:** Городецкий А. Е., Курбанов В. Г., Тарасова И. Л. Безопасное управление SEMS при групповом взаимодействии. *Информационно-управляющие системы*, 2019, № 1, с. 23–31. doi:10.31799/1684-8853-2019-1-23-31

**For citation:** Gorodetskiy A. E., Kurbanov V. G., Tarasova I. L. Safe control of SEMS in group interaction. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2019, no. 1, pp. 23–31 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2019-1-23-31

### Введение

Проблема оптимизации взаимодействия группы роботов при выполнении совместной задачи требует учета сложности и интеллектуальности технических систем управления роботами, обеспечивающими постоянное расширение сферы деятельности подобных робототехнических систем (РТС). В сложных РТС, строящихся на основе умных электромеханических систем (Smart ElectroMechanical Systems — SEMS) [1], необходимо анализировать поведение не только отдельного робота, обладающего благодаря наличию центральной нервной системы (ЦНС) [2] целесообразным поведением, но и поведение взаимодействующей группы роботов, функции которых тесно взаимосвязаны в так называемой «малой группе». Эта группа может быть транспортными

средствами, осуществляющими согласованные движения, группой роботов-сборщиков, выполняющих совместные операции, и т. п. [3–5]. При создании таких групп специалисты сталкиваются с широким кругом проблем, к которым относятся такие, как оценка способности группы к правильному принятию решений в условиях неопределенности, определение оптимального количества членов группы, оценка совместимости членов группы с учетом статических и динамических особенностей каждого робота, учет особенностей принятия решения в ЦНС отдельных роботов и др.

При оценке интеллекта ЦНС робота необходимо провести его компьютерное моделирование с идентификацией и оценкой принимаемых решений в сложных динамических системах в условиях неполной определенности [6]. При этом

используется статистическое моделирование их динамического поведения.

Для создания будущего человечества, которое заполнят роботы и всякие «умные» системы, требуется, чтобы эти роботы и системы искусственного интеллекта имели «инстинкты», позволяющие им избегать столкновений с препятствиями и друг с другом во время движения. Однако если эти инстинкты будут чересчур сильны, роботы будут слишком медлительными, что отрицательно скажется на эффективности их действий. Для решения описанной проблемы надо разработать алгоритм, который будет постоянно стремиться найти оптимальный баланс между скоростью и безопасностью, что позволит роботам всегда действовать с высокой эффективностью.

Предотвращение столкновений — это главный аспект работы систем всех транспортных средств и других робототехнических устройств, способных передвигаться полностью самостоятельно, в автоматическом режиме. Некоторые из разработчиков систем управления для автомобилей-роботов умышленно позволяют им совершать мелкие нарушения правил движения в случае обнаружения опасности столкновения.

Кроме того, задача управления группой роботов обладает дополнительной сложностью из-за необходимости обеспечивать координацию между роботами. В сложных робототехнических системах каждый робот должен удовлетворять своим кинематическим уравнениям, а также существующим фазовым ограничениям, включая динамические ограничения, обеспечивающие отсутствие столкновений между роботами.

### Принципы управления живучестью

Безопасное управление тесно связано с управлением живучестью, алгоритмы которой входят в математическое обеспечение интеллектуальных роботов. В этом случае поведение SEMS может корректироваться за счет гибкой реакции входящей в систему автоматического управления (САУ) системы автоматического управления живучестью на резкие изменения во времени внешних условий и внутреннего состояния самой SEMS. Наиболее изученными и часто встречающимися задачами управления живучестью являются адаптация, горячее резервирование, компенсации и заимствования. Менее изучены и реже встречаются задачи стресса и ступора или включения аварийного режима. В процессе развития САУ роботов и их интеллектуализации стали появляться новые режимы их функционирования. В частности, роботы, создаваемые на основе SEMS, способны работать в составе группы роботов под управлением оператора или

САУ более высокого уровня [7]. При этом могут возникать ситуации, когда инструкции оператора и (или) САУ более высокого уровня будут противоречить внутреннему состоянию самой SEMS. Другой, не менее сложной задачей является построение алгоритмов проверки выполнения условий, которые, по всей вероятности, должны опираться на моделирование поведения SEMS при выполнении предлагаемых инструкций оператора и (или) инструкций системы управления верхнего уровня. При этом желательно, чтобы создаваемые алгоритмы могли учитывать возможную быструю деградацию SEMS и заблаговременно включать механизмы управления живучестью с выдачей сообщений на верхний уровень группового управления о нежелательности либо опасности предлагаемых инструкций поведения.

### Методы безопасного управления при групповом взаимодействии

Проблема группового управления — это глобальная проблема, актуальная для многих сфер жизни. Везде, где существует некоторая группа живых или технических объектов, которые должны совместными усилиями выполнять некоторую работу или решать некоторую задачу, возникает проблема группового управления или группового взаимодействия. В технической области проблема группового управления наиболее актуальна в робототехнике. Для решения многих практических задач могут эффективно использоваться группы роботов. Как правило, при решении различных задач роботы функционируют в неорганизованной или плохо организованной, недетерминированной среде.

При решении задач управления групповым взаимодействием роботов большое внимание уделяется вопросам их самоорганизации и поддержания динамического равновесия (гомеостазиса) внутри группы. Например, решение задач формирования формаций [8], отработки согласованных движений [9–12], совместного поиска и транспортировки объектов [13] и др. Однако рассматриваемые в этих задачах механизмы не гарантируют полноту инструментария, который необходим для решения всех задач, которые ставятся перед группой. Требуется еще один уровень управления, который являлся бы интерфейсом между группой и оператором, ставящим целевые задачи [14, 15], и который можно отнести к оптимизационным задачам ситуационного управления [16, 17].

Для достижения конкретной цели, стоящей перед группой роботов, в случае детерминированной среды каждый робот может выполнять заранее определенную последовательность дей-

ствий (алгоритм 1). В случае же недетерминированной среды эта последовательность должна быть найдена системой управления группой роботов в процессе достижения цели (алгоритм 2, алгоритм 3).

Среди всех задач взаимодействия роботов можно выделить задачу группового управления роботами, одно из центральных мест в которой занимает исключение столкновений роботов.

Необходимость сопоставления различных траекторий (сценариев развития) между собой, а также ограничения со стороны практической реализуемости алгоритмов обработки данных об объектах и среде приводят к тому, что область определения характеристик состояния тем или иным способом дискретизируется, например переводится в логическую форму за счет фазсификации данных, а затем анализируется с использованием алгебраизации логических выражений [18] и методов математического программирования в порядковых шкалах или обобщенного математического программирования [19].

Сначала надо синтезировать одну систему управления для стабилизации робота относительно некоторой точки пространства состояний с фазовыми ограничениями. Затем надо искать оптимальные траектории движения роботов в виде точек пространства состояний для движения роботов из различных начальных условий в заданные конечные положения.

Создание и развитие систем ситуационного управления требует больших затрат ресурсов на сбор сведений об объектах и среде управления, их динамики, способах управления, а также на систематизацию этих сведений в рамках семиотической модели. Поэтому считается, что метод ситуационного управления целесообразно применять только в случаях, когда другие методы формализации приводят к задаче слишком большой (для практической реализации) размерности.

Следует отметить, что разработанная учеными технология не гарантирует абсолютной безопасности движения роботов, что подтверждается несколькими инцидентами, произошедшими во время испытаний. Существующие технологии управления для автомобилей также не гарантируют этого, лишь стремясь свести к минимуму вероятность столкновения.

«Нам не доводилось еще наблюдать скопления из сотен и тысяч автомобилей-роботов на дорогах. Существующие системы управления такими автомобилями весьма консервативны, они не позволяют автомобилю сдвинуться с места в случае наличия даже малейшей опасности. Все это приведет к тому, что на дорогах, по которым будут передвигаться автомобили-роботы, постоянно будут возникать заторы и пробки, ликвидировать которые не смогут самостоятельно даже самые

высокоинтеллектуальные автоматические системы» [20].

Использование для решения этой задачи известного метода управления на основе поля потенциалов не эффективно, так как он является по существу кинематическим и может оказаться неприемлемым для быстро движущихся SEMS. Поэтому при формировании множества допустимых управлений (инструкций поведения SEMS) вначале необходимо выявить и записать в базу данных САУ SEMS допустимые значения параметров отдельных элементов SEMS, а также их статические и динамические характеристики. Затем надо, исходя из предназначения конкретной SEMS, составить перечень возможных инструкций  $U_{ki}(t)$ . Далее требуется путем математического и компьютерного моделирования динамического пространства конфигураций выявить множество допустимых инструкций поведения  $Y_d(t)$ . При этом задача разбивается на два этапа.

На первом этапе, например, с помощью компьютерного моделирования работы SEMS [21], среди возможных инструкций  $U_{ki}(t)$  выявляются недопустимые  $U_{ki}^*(t)$ , приводящие к выходу отдельных параметров и характеристик за допустимые пределы:

$$U_{ki}^*(t) \subseteq U_{ki}(t).$$

Эти инструкции должны быть исключены из возможных:

$$U_{ki}^d(t) = U_{ki}(t) / U_{ki}^*(t).$$

На втором этапе среди инструкций  $U_{ki}^d(t)$  выявляются опасные, т. е. те  $U_{ki}^o(t)$ , чье частое повторение приводит к быстрой деградации SEMS с последующими отказами и поломками. В этом случае требуется логико-вероятностное и логико-лингвистическое моделирование деградации SEMS [22] с анализом времени деградации. Если время деградации  $t_{di}$  системы при многократном применении какой-либо инструкции  $U_{ki}^d(t)$  оказывается меньше допустимого  $t_{доп}$  ( $t_{di} < t_{доп}$ ), то эти инструкции относятся к опасным  $U_{ki}^o(t)$  и они исключаются из возможных. Поэтому

$$Y_d(t) = (U_{ki}^d(t) / U_{ki}^o(t)).$$

В ряде случаев при реализации систем группового управления роботами некоторые инструкции, выдаваемые САУ верхнего уровня (САУ координатора-планировщика), могут быть непонятны для САУ SEMS, хотя по результатам моделирования они были отнесены к допустимым. Это, например, может быть связано с неполной адекватностью используемых моделей динамического пространства конфигураций. Частично убрать по-

добные инструкции из допустимых можно за счет семантического анализа инструкций на корректность и непротиворечивость и за счет организации диалога между взаимодействующими САУ SEMS.

### Пример безопасного движения роботов

#### Постановка задачи

Требуется перевести трех роботов из заданных точек (площадей) к конечной точке (складскому помещению прямоугольного типа) без столкновения (рисунок). Будем считать, что динамические модели роботов и среды их функционирования построены. В памяти роботов заложены алгоритмы построения текущей динамической модели собственного состояния, в том числе:

— траектория движения первого робота ( $R_1$ ) (от точки  $A$  к точке  $F$ )

$$AA_1B_1A_2QA_3A_4F;$$

— траектория движения второго робота ( $R_2$ ) (от точки  $B$  к точке  $D$ )

$$BB_1A_2QB_2B_3D;$$

— траектория движения третьего робота ( $R_3$ ) (от точки  $C$  к точке  $E$ )

$$CC_1A_2QB_2A_3C_2E.$$

Пусть:

$d_{R_1,R_2}$  — расстояние между роботами  $R_1$  и  $R_2$ ;

$d_{R_1,R_3}$  — расстояние между роботами  $R_1$  и  $R_3$ ;

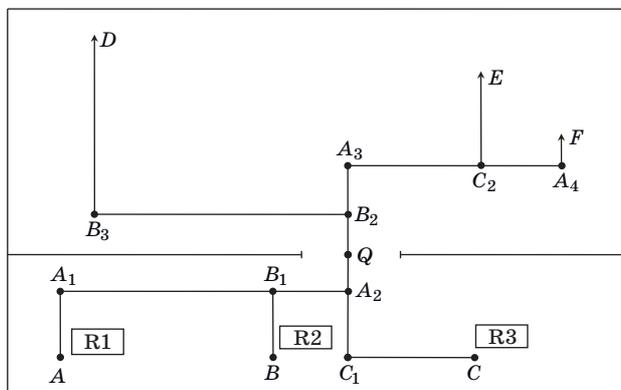
$d_{R_2,R_3}$  — расстояние между роботами  $R_2$  и  $R_3$ .

Начальное состояние роботов:  $X_{R_1}(0), Y_{R_1}(0), X_{R_2}(0), Y_{R_2}(0), X_{R_3}(0), Y_{R_3}(0)$ .

$P_{R_1}$  — приоритет первого робота  $R_1$ ;

$P_{R_2}$  — приоритет второго робота  $R_2$ ;

$P_{R_3}$  — приоритет третьего робота  $R_3$ .



- Траектории движений роботов  $R_1, R_2$  и  $R_3$
- The trajectories of the robots  $R_1, R_2$  and  $R_3$

Вероятные точки столкновения роботов:

— точка  $B_1(X_{B_1}, Y_{B_1})$  для роботов  $R_1$  и  $R_2$ ;

— точка  $A_2(X_{A_2}, Y_{A_2})$  для роботов  $R_1, R_2$  и  $R_3$ ;

— точка  $B_2(X_{B_2}, Y_{B_2})$  для роботов  $R_1, R_2$  и  $R_3$ ;

— точка  $C_2(X_{C_2}, Y_{C_2})$  для роботов  $R_1$  и  $R_3$ ;

— точка  $Q(X_Q, Y_Q)$  (дверь) для роботов  $R_1, R_2$  и  $R_3$ .

Текущее состояние роботов в момент  $t_i$ :

$$R_1(X_{R_1}(t_i), Y_{R_1}(t_i)), R_2(X_{R_2}(t_i), Y_{R_2}(t_i)), \\ R_3(X_{R_3}(t_i), Y_{R_3}(t_i)).$$

Габариты роботов (ширина + длина + высота, или площади, или объемы роботов):  $D_{R_1}, D_{R_2}, D_{R_3}$ .

Выполняются следующие ограничения (условия):

— скорости движения роботов одинаковы;

— габариты (площадь) двери  $D_Q$  должны быть

$$D_Q > \max\{D_{R_1}, D_{R_2}, D_{R_3}\};$$

— габариты (площадь или объем) складского помещения  $D_{ws}$  должны быть

$$D_{ws} > 3(D_{R_1} + D_{R_2} + D_{R_3}).$$

#### АЛГОРИТМ 1

Решение:

1. Вычислим расстояние между роботами в момент  $t_i$ :

$$d_{R_1,R_2} = [(X_{R_1}(t_i) - X_{R_2}(t_i))^2 + (Y_{R_1}(t_i) - Y_{R_2}(t_i))^2]^{1/2};$$

$$d_{R_1,R_3} = [(X_{R_1}(t_i) - X_{R_3}(t_i))^2 + (Y_{R_1}(t_i) - Y_{R_3}(t_i))^2]^{1/2};$$

$$d_{R_2,R_3} = [(X_{R_2}(t_i) - X_{R_3}(t_i))^2 + (Y_{R_2}(t_i) - Y_{R_3}(t_i))^2]^{1/2}.$$

2. Вычислим соответственно расстояние между текущим состоянием роботов  $R_1$  и  $R_2$  с точкой  $B_1$  в момент  $t_i$ :

$$d_{R_1,B_1} = [(X_{R_1}(t_i) - X_{B_1})^2 + (Y_{R_1}(t_i) - Y_{B_1})^2]^{1/2};$$

$$d_{R_2,B_1} = [(X_{R_2}(t_i) - X_{B_1})^2 + (Y_{R_2}(t_i) - Y_{B_1})^2]^{1/2}.$$

3. Если  $(d_{R_1,B_1} > d_{R_2,B_1}) \wedge (d_{R_1,R_2} \leq n_1)$  ( $n_1 = \max\{D_{R_1}, D_{R_2}\}$ ), то  $P_{R_1} = 2, P_{R_2} = 1$  (т. е. первым точку  $B_1$  проходит робот  $R_2$ , затем  $R_1$ ).

4. Если  $(d_{R_1,B_1} < d_{R_2,B_1}) \wedge (d_{R_1,R_2} \leq n_1)$  ( $n_1 = \max\{D_{R_1}, D_{R_2}\}$ ), то  $P_{R_1} = 1, P_{R_2} = 2$  (т. е. первым точку  $B_1$  проходит робот  $R_1$ , затем  $R_2$ ).

5. Если  $(d_{R_1,B_1} = d_{R_2,B_1}) \wedge (d_{R_1,R_2} \leq n_1)$  ( $n_1 = \max\{D_{R_1}, D_{R_2}\}$ ), то  $P_{R_1} = 1, P_{R_2} = 0$  (т. е. первым точку  $B_1$  проходит робот  $R_1$ , робот  $R_2$  остановится).

6. Если  $[(d_{R_1,B_1} \leq d_{R_2,B_1}) \vee (d_{R_1,B_1} \geq d_{R_2,B_1})] \wedge (d_{R_1,R_2} > n_1)$  ( $n_1 = \max\{D_{R_1}, D_{R_2}\}$ ), то роботы  $R_1, R_2$  двигаются по своей траектории без остановки.

7. Вычислим соответственно расстояние между текущим состоянием роботов  $R_1, R_2$  и  $R_3$  с точкой  $A_2$  в момент  $t_i$ :

$$d_{R_1, A_2} = [(X_{R_1}(t_i) - X_{A_2})^2 + (Y_{R_1}(t_i) - Y_{A_2})^2]^{1/2};$$

$$d_{R_2, A_2} = [(X_{R_2}(t_i) - X_{A_2})^2 + (Y_{R_2}(t_i) - Y_{A_2})^2]^{1/2};$$

$$d_{R_3, A_2} = [(X_{R_3}(t_i) - X_{A_2})^2 + (Y_{R_3}(t_i) - Y_{A_2})^2]^{1/2}.$$

8. Если  $(d_{R_1, A_2} \geq d_{R_2, A_2}) \wedge (d_{R_2, A_2} \geq d_{R_3, A_2}) \wedge (d_{R_1, R_2} \geq n_1) \wedge (d_{R_2, R_3} \geq n_2) \wedge (d_{R_1, R_3} \geq n_3)$  ( $n_1 = \max\{D_{R_1}, D_{R_2}\}$ ,  $n_2 = \max\{D_{R_2}, D_{R_3}\}$ ,  $n_3 = \max\{D_{R_1}, D_{R_3}\}$ ), то  $P_{R_1} = 3$ ,  $P_{R_2} = 2$ ,  $P_{R_3} = 1$  (т. е. точку  $A_2$ , не останавливаясь, последовательно проходят роботы  $R_3, R_2, R_1$ ).

9. Если  $(d_{R_1, A_2} > d_{R_2, A_2} = d_{R_3, A_2}) \wedge (d_{R_1, R_2} < n_1) \wedge (d_{R_2, R_3} < n_2) \wedge (d_{R_1, R_3} < n_3) \wedge (n_1 < n_2 < n_3)$  ( $n_1 = \max\{D_{R_1}, D_{R_2}\}$ ,  $n_2 = \max\{D_{R_2}, D_{R_3}\}$ ,  $n_3 = \max\{D_{R_1}, D_{R_3}\}$ ) (ситуация соответствует параллельному или перекрестному движению роботов), то  $P_{R_1} = 0$ ,  $P_{R_2} = 0$ ,  $P_{R_3} = 1$ .

10. Если  $(d_{R_1, A_2} = d_{R_2, A_2} < d_{R_3, A_2}) \wedge (d_{R_2, R_3} < n_2) \wedge (d_{R_1, R_3} < n_3) \wedge (n_3 < n_1 < n_2)$  ( $n_1 = \max\{D_{R_1}, D_{R_2}\}$ ,  $n_2 = \max\{D_{R_2}, D_{R_3}\}$ ,  $n_3 = \max\{D_{R_1}, D_{R_3}\}$ ) (ситуация соответствует параллельному или перекрестному движению роботов), то  $P_{R_1} = 0$ ,  $P_{R_2} = 1$ ,  $P_{R_3} = 0$ .

11. Если  $(d_{R_1, A_2} = d_{R_3, A_2} < d_{R_2, A_2}) \wedge (d_{R_1, R_2} < n_1) \wedge (d_{R_2, R_3} < n_2) \wedge (d_{R_1, R_3} < n_3) \wedge (n_3 < n_2 < n_1)$  ( $n_1 = \max\{D_{R_1}, D_{R_2}\}$ ,  $n_2 = \max\{D_{R_2}, D_{R_3}\}$ ,  $n_3 = \max\{D_{R_1}, D_{R_3}\}$ ) (ситуация соответствует параллельному или перекрестному движению роботов), то  $P_{R_1} = 1$ ,  $P_{R_2} = 0$ ,  $P_{R_3} = 0$ .

12. Для точки  $Q(X_Q, Y_Q)$  (дверь) и  $B_2(X_{B_2}, Y_{B_2})$  повторяются пп. 7–11.

13. Для точки  $C_2(X_{C_2}, Y_{C_2})$  для роботов  $R_1$  и  $R_3$  повторяются пп. 2–6.

14. Для точки  $F(X_F, Y_F)$  и робота  $R_1$  вычисляем

$$d_{R_1, F} = [(X_{R_1}(t_i) - X_F)^2 + (Y_{R_1}(t_i) - Y_F)^2]^{1/2}.$$

Если  $d_{R_1, F} \leq n_1$ , то  $P_{R_1} = 0$ .

15. Для точки  $D(X_D, Y_D)$  и робота  $R_2$  вычисляем

$$d_{R_2, D} = [(X_{R_2}(t_i) - X_D)^2 + (Y_{R_2}(t_i) - Y_D)^2]^{1/2}.$$

Если  $d_{R_2, D} \leq n_2$ , то  $P_{R_2} = 0$ .

16. Для точки  $E(X_E, Y_E)$  и робота  $R_3$  вычисляем

$$d_{R_3, E} = [(X_{R_3}(t_i) - X_E)^2 + (Y_{R_3}(t_i) - Y_E)^2]^{1/2}.$$

Если  $d_{R_3, E} \leq n_3$ , то  $P_{R_3} = 0$ .

### Пример со случайными препятствиями в заданных траекториях роботов

Допустим, что на пути роботов случайным образом (по нормальному или равномерному закону распределения) имеются препятствия разного вида  $O_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ). В этом случае задача безопасного управления при взаимодействии роботов превращается в задачу оптимального управления в условиях неполной определенности. Это связано с тем, что появляется ограничение в виде

логики-вероятностного или логики-лингвистического типа, т. е., например:

$$x_i \otimes y_j \rightarrow v_i \otimes w_j, P(x_i = 1), P(y_j = 1), P(v_i = 1), P(w_j = 1), i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m,$$

где  $x_i, y_j, v_i, w_j$  — логические переменные;  $\rightarrow$  — знак импликации;  $\otimes$  — знак конъюнкции;  $P(x_i = 1), P(y_j = 1), P(v_i = 1), P(w_j = 1)$  — вероятности логических переменных.

При такого типа ограничениях классические алгоритмы терминальных задач без существенных изменений становятся непригодными, и требуется алгоритм 1 дополнить вычислениями интервальных ограничений (алгоритм 2 или алгоритм 3).

АЛГОРИТМ 2 используется при ограничениях логики-вероятностного типа. В этом случае, зная интервалы, принятые при фазсификации, т. е. при получении логических переменных, и используя теорему 1, приведенную в работе [23], переходят от логики-вероятностных переменных к интервальным, и задачу оптимального управления, соответственно, сводят к классической задаче математического программирования.

При этом введем следующие логические переменные, характеризующие случайные препятствия:

$O_1$  — логики-вероятностная переменная «маленькое», которая соответствует препятствию длиной от 0,5 до 1,5 м;

$O_2$  — логики-вероятностная переменная «среднее», которая соответствует препятствию длиной от 1,3 до 2,5 м;

$O_3$  — логики-вероятностная переменная «большое», которая соответствует препятствию длиной от 2 до 4 м.

Например, если на пути робота  $R_2$  до точки пересечения  $B_1(X_{B_1}, Y_{B_1})$  (для роботов  $R_1$  и  $R_2$ ) появляется случайным образом препятствие  $O_1$  «маленькое», которое соответствует длине от 0,5 до 1,5 м, то пп. 3, 4 алгоритма 1 будут изменяться, т. е. текущие расстояния между  $R_2$  и точкой  $B_1$  ( $d_{R_1, B_1}$ ) и между  $R_1$  и  $R_2$  ( $d_{R_1, R_2}$ ) будут другими.

Пусть  $P\{O_1 = 1\} = 0,8$ . Преобразуем логики-вероятностную переменную  $O_1$  в логики-интервальную  $O_1^I$ . Для этого, как сказано выше, используем следствие 3 теоремы 1 [23], найдем нормальную функцию распределения  $\Phi(O_1^*)$  с параметрами  $m = (b + a)/2$ ,  $\sigma = (m - a)/3$ ,  $a = 0,5$  м,  $b = 1,5$  м. Тогда

$$\Phi(O_1^*) = 0,5(1 + P\{O_1 = 1\}) = 0,5(1 + 0,8) = 0,9.$$

Найдем интервал величины  $O_1^*$ . Он находится между  $-1,29(-O_1^*)$  и  $+1,29(+O_1^*)$ . Для нахождения интервалов  $a^I, b^I$  логики-интервальной переменной  $O_1^I$  используем выражение

$$(-O_1^*) = ((a^I - m)/\sigma), (+O_1^*) = ((b^I - m)/\sigma).$$

Отсюда получаем, что  $a^I = 0,78, b^I = 1,22$ .

Таким образом, получим, что  $0,78 < O_1^I < 1,22$ .

В дальнейшем к расстояниям  $d_{R1,B1}$  и  $d_{R1,R2}$  добавляются  $a^I, b^I$  в виде «штрафа» и вычисляются средние значения этих расстояний, т. е. получаем

$$d_{R1,B1}^{cp} = ((d_{R1,B1} + a^I) + (d_{R1,B1} + b^I))/2;$$

$$d_{R2,B2}^{cp} = ((d_{R1,R2} + a^I) + (d_{R1,R2} + b^I))/2.$$

### АЛГОРИТМ 3

При ограничениях логико-лингвистического типа, например:

$$x_i \otimes y_j \rightarrow v_i \otimes w_j, \mu(x_i), \mu(y_j), \mu(v_i), \mu(w_j),$$

$$i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m,$$

где  $\mu(x_i), \mu(y_j), \mu(v_i), \mu(w_j)$  — функции принадлежности логических переменных, используется алгоритм 3.

В этом случае, зная интервалы, принятые при фаззификации, т. е. при получении логических переменных, и используя теорему 3, приведенную в работе [23], переходят от логико-лингвистических переменных к интервальным, и задачу оптимального управления, соответственно, переводят в классическую задачу математического программирования.

При этом введем следующие логические переменные, характеризующие случайные препятствия:

$O_1$  — логико-лингвистическая переменная «маленькое», которая соответствует препятствию длиной от 0,5 до 1,5 м;

$O_2$  — логико-лингвистическая переменная «среднее», которая соответствует препятствию длиной от 1,3 до 2,5 м;

$O_3$  — логико-лингвистическая переменная «большое», которая соответствует препятствию длиной от 2 до 4 м.

Например, если на пути робота  $R_2$  до точки пересечения  $B_1(X_{B1}, Y_{B1})$  (для роботов  $R_1$  и  $R_2$ ) появляется случайным образом препятствие  $O_1$  «маленькое», которое соответствует длине от 0,5 до 1,5 м, то пп. 3, 4 алгоритма будут изменяться, т. е. текущие расстояния между  $R_2$  и точкой  $B_1$  ( $d_{R1,B1}$ ) и между  $R_1$  и  $R_2$  ( $d_{R1,R2}$ ) будут другие.

Пусть  $\mu\{O_1\} = 0,8$ . Преобразуем логико-лингвистическую переменную  $O_1$  в логико-интервальную  $O_1^I$ . Для этого используем следствие 1 теоремы 3 [23].

**Теорема 3.** Если лингвистическая переменная  $v$ , имеющая значение функции принадлежности  $\mu(v)$ , была получена путем фаззификации из нечеткой величины  $x$ , имеющей на интервале  $[x_{\min}; x_{\max}]$  функцию распределения  $f(x)$ , то  $a = x_{\min} + \mu(v) f(x), b = x_{\max} + \mu(v) f(x)$ .

*Следствие 1.* Если задан треугольный вид функции  $f(x)$ , т. е.

$$f(x) = 0,5(x_{\max} - x_{\min})$$

при  $x_{\min} \leq x \leq 0,5(x_{\max} - x_{\min});$

$$f(x) = -0,5(x_{\max} - x_{\min})$$

при  $0,5(x_{\max} - x_{\min}) < x \leq x_{\max},$

то получим следующие интервалы:

$$a = x_{\min} + \mu(v)0,5(x_{\max} - x_{\min}),$$

$$b = x_{\max} - \mu(v)0,5(x_{\max} - x_{\min}).$$

Для нахождения интервалов  $a^I, b^I$  логико-интервальной переменной  $O_1^I$  используем выражения

$$a^I = x_{\min} + \mu(O_1)0,5(x_{\max} - x_{\min}),$$

$$b^I = x_{\max} - \mu(O_1)0,5(x_{\max} - x_{\min}),$$

где  $x_{\min} = 0,5; x_{\max} = 1,5$ .

Отсюда  $a^I = 0,9, b^I = 1,1$ .

Таким образом, получим, что  $0,9 < O_1^I < 1,1$ .

В дальнейшем к расстояниям  $d_{R1,B1}$  и  $d_{R1,R2}$  добавляются  $a^I, b^I$  в виде «штрафа» и вычисляются средние значения этих расстояний, т. е. получаем

$$d_{R1,B1}^{cp} = ((d_{R1,B1} + a^I) + (d_{R1,B1} + b^I))/2;$$

$$d_{R2,B2}^{cp} = ((d_{R1,R2} + a^I) + (d_{R1,R2} + b^I))/2.$$

Разумеется, что таким же способом будут изменены пункты алгоритма безопасного движения роботов в зависимости от разных видов неопределенностей окружающей среды.

### Движение роботов по нелинейным траекториям

Пусть часть траекторий (путей) роботов имеет нелинейные формы.

#### АЛГОРИТМ 4

Роботы действуют в детерминированной среде. Пусть часть пути (например, участок  $A_1B_1$ ) имеет нелинейные формы. Применяем метод кусочно-линейной аппроксимации, заключающийся в замене сложной кривой ломаной линией. Такая линия состоит из отрезков прямых, по возможности максимально совпадающих с основной кривой. Таких линий может быть несколько. Обозначим такие ломаные линии через  $l_i^{(j)}$ , где  $i$  — число прямых в ломаной линии;  $j$  — число ломаных линий. Надо найти среди этих ломаных одну (оптимальную), по которой должен двигаться робот. Критерий оптимальности

$$d = \min_j d^{(j)},$$

где  $d$  — длина оптимальной ломаной линии;  $d^{(j)}$  — длина  $j$ -й ломаной линии;

$$d^{(j)} = \sum_{i=1}^n l_i^{(j)}.$$

После решения задачи, например переборным методом, получаем оптимальную ломаную линию  $l^{(k)}$ . Далее действуем по алгоритму 1.

#### АГОРИТМ 5 и АЛГОРИТМ 6

Пусть часть пути (например, участок  $A_1B_1$ ) можно пройти по трем маршрутам (по трем ломаными линиям) и присутствуют ограничения в виде логико-вероятностного (алгоритм 5) или логико-лингвистического (алгоритм 6) типа. Требуется найти маршрут проезда робота из точки  $A_1(x_{A_1}, y_{A_1})$  в точку  $B_1(x_{B_1}, y_{B_1})$  за минимальное время  $J$ :

$$J(M_\nu) \rightarrow \min,$$

где  $\nu = 1, 2, 3$ . Функционал  $J(M_\nu)$  характеризуется длинами прямых линий, углами между прямыми линиями и временем задержки на пересечении прямых линий ломаной траектории.

1. Имеются вычисленные по алгоритму 4 следующие варианты маршрутов (оптимальные ломаные линии) для роботов, например для  $R_1: M_1, M_2, M_3$ .

2. Вычисляются интервалы логических переменных, характеризующих окружающую среду (см. алгоритм 2 и алгоритм 3). При этом осуществляется переход от логико-вероятностных (алгоритм 5) и логико-лингвистических (алгоритм 6) ограничений к логико-интервальным, и данная задача сводится к классической задаче математического программирования.

3. В любом текущем динамическом пространстве конфигураций, соответствующем выделенному фрагменту  $A_1B_1$ , будут присутствовать несколько ограничений, для каждого из которых вычисляются функционалы  $J(M_\nu)$  для всех вариантов движения.

4. В качестве оптимального выбирается тот маршрут  $M_\nu$ , которому будет соответствовать минимум среднего значения функционала  $J(M_\nu)$ .

5. Далее действуем по алгоритму 1.

#### Заключение

Анализ примеров безопасного движения роботов показал, что группы роботов в зависимости от условий функционирования могут эффективно использовать различные алгоритмы оптимального управления. В частности, при управлении согласованным движением группы роботов в условиях полной определенности могут использоваться классические алгоритмы терминальных задач. Один из примеров (алгоритм 1) приведен для движения трех роботов.

В случае если на пути движения роботов случайным образом появляются препятствия разного вида, задача безопасного управления роботами превращается в задачу оптимального управления в условиях неполной определенности. Тогда ограничения можно описать в виде логико-вероятностных или логико-лингвистических выражений и использовать, например, алгоритм 2 или алгоритм 3.

В случае если траектории движения роботов имеют нелинейные формы, можно применить метод кусочно-линейной аппроксимации и использовать, например, алгоритм 3, если роботы действуют в детерминированной среде, либо алгоритм 4, если имеются ограничения логико-вероятностного типа, или алгоритм 5, если имеются ограничения логико-лингвистического типа.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 16-29-04424, 18-01-00076, 19-08-00079).

#### Литература

1. *Smart electromechanical systems/Studies in systems, decision and control*. Vol. 49. Ed. Andrey E. Gorodetskiy. Springer International Publishing, 2016. 277 p. doi:10.1007/978-3-319-27547-5
2. *Smart electromechanical systems: The central nervous system / Studies in systems, decision and control*. Vol. 95. Eds. Andrey E. Gorodetskiy, Vugar G. Kurbanov. Springer International Publishing, 2017. 270 p. doi:10.1007/978-3-319-53327-8
3. Сахаров В. В., Чертков А. А., Тормашев Д. С. Алгоритм оптимального планирования группового взаимодействия роботов. *Морской вестник*, 2014, № 4(52), с. 119–122.
4. Васильев И. А., Половко С. А., Смирнова Е. Ю. Организация группового управления мобильными роботами для задач специальной робототехники. *Научно-технические ведомости СПбГПУ*, 2013, № 1, с. 119–123.
5. Архипкин А. В., Комченков В. И., Корольков Д. Н., Петров В. Ф., Симонов С. Б., Терентьев А. И. Задачи группового управления роботами в робототехническом комплексе пожаротушения. *Тр. СПИИРАН*, 2016, № 45, с. 116–129.
6. Городецкий А. Е., Курбанов В. Г., Тарасова И. Л. Принятие решений в центральной нервной системе робота. *Информационно-управляющие системы*, 2018, № 1, с. 21–30. doi:10.15217/issn1684-8853.2018.1.21
7. Fridman A. Ya. *SEMS-based control in locally organized hierarchical structures of robots collectives*. In: *Smart electromechanical systems: The central nervous system / Studies in systems, decision and control*.

- Vol. 95. Eds. Andrey E. Gorodetskiy, Vugar G. Kurbanov. Springer International Publishing, 2017. P. 31–47. doi:10.1007/978-3-319-53327-8
8. Rubenstein M., Ahler C., Nagpal R. Kilobot: a low cost scalable robot system for collective behaviors. *Proc. of IEEE Intern. Conf. on Robotics and Automation (IRCA 2012)*, Saint Paul, Minnesota, May 14–18, 2012, pp. 3293–3298. doi:10.1109/ICRA.2012.6224638
  9. Mondada F., Gambardella L. M., Floreano D., Dorigo M. The cooperation of swarm-bots: Physical interactions in collective robotics. *IEEE Robot. Autom. Mag.*, 2005, vol. 12, no. 2, pp. 21–28. doi:10.1109/MRA.2005.1458313
  10. Мартынова Л. А., Розенгауз М. Б. Определение эффективного поведения группы АНПА в сетцентрической системе освещения подводной обстановки. *Информационно-управляющие системы*, 2017, № 3, с. 47–57. doi:org/10.15217/issn1684-8853.2017.3.47
  11. Моторин Д. Е., Попов С. Г. Алгоритм многокритериального поиска траекторий движения робота на многослойной карте. *Информационно-управляющие системы*, 2018, № 3, с. 45–53. doi:org/10.15217/issn1684-8853.2018.3.45
  12. Andreychuk A., Yakovlev K. Path finding for the coalition of co-operative agents acting in the environment with destructible obstacles. *Proc. of Third Intern. Conf. "Interactive collaborative robotics", ICR 2018*, Leipzig, Germany, Sept. 18–22, 2018, pp. 13–22.
  13. Dorigo M., Floreano D., Gambardella L. M., Mondada F., Nolffi S., Baaboura T., Birattari M., et al. Swarmanoid: a novel concept for the study of heterogeneous robotic swarms. *IEEE Robot. Autom. Mag.*, 2013, vol. 20, no. 4, pp. 60–71.
  14. Воробьев В. В. Логический вывод и элементы планирования действий в группах роботов. *Шестнадцатая Национальная конференция по искусственному интеллекту КИИ-2018*: тр. конф., Москва, 24–27 сентября 2018 г., т. 1, М., 2018, с. 88–96.
  15. Иванов Д. Я., Шабанов И. Б. Модель применения коалиций интеллектуальных мобильных роботов при ограниченных коммуникациях. *Шестнадцатая Национальная конференция по искусственно-*  
*му интеллекту КИИ-2018*: тр. конф., Москва, 24–27 сентября 2018 г., т. 1, М., 2018, с. 97–105.
  16. Поспелов Д. А. *Ситуационное управление: Теория и практика*. М., Наука, 1986. 286 с.
  17. Куц Г., О’Доннел С. *Управление: системный и ситуационный анализ управленческих функций*. М., Прогресс, 2002. 588 с.
  18. Kulik B. A., Fridman A. Ya. *Logical analysis of data and knowledge with uncertainties in SEMS*. In: *Smart electromechanical systems: The central nervous system / Studies in systems, decision and control*. Vol. 95. Eds. Andrey E. Gorodetskiy, Vugar G. Kurbanov. Springer International Publishing, 2017. P. 45–59. doi:10.1007/978-3-319-53327-8
  19. Юдин Д. Б. *Вычислительные методы теории принятия решений*. М., Наука, 1989. 320 с.
  20. Sing G. Lee, Yancy Diaz-Mercado, Magnus Egerstedt. Multirobot control using time-varying density functions. *IEEE Transactions on Robotics*, 2015, vol. 31, iss. 2, pp. 489–493. doi:10.1109/TRO.2015.2397771
  21. Фридман А. Я. *Ситуационное управление структурой промышленно-природных систем. Методы и модели*. Saarbrucken, Germany, LAP, 2015. 503 с.
  22. Tarasova I. L., Gorodetskiy A. E., Kurbanov V. G. *Mathematical models of the automatic control systems SEMS modules*. In: *Smart electromechanical systems: The central nervous system / Studies in systems, decision and control*. Vol. 95. Eds. Andrey E. Gorodetskiy, Vugar G. Kurbanov. Springer International Publishing, 2017. P. 149–158. doi:10.1007/978-3-319-27547-5
  23. Andrey E. Gorodetskiy, Irina L. Tarasova, Vugar G. Kurbanov. *Reduction of logical-probabilistic and logical-linguistic constraints to interval constraints in the synthesis of optimal SEMS*. In: *Smart electromechanical systems: Group interaction / Studies in systems, decision and control*. Vol. 174. Eds. Andrey E. Gorodetskiy, Irina L. Tarasova. Springer International Publishing, 2019. P. 77–90. doi:10.1007/978-3-319-99759-9-7

UDC 62-52

doi:10.31799/1684-8853-2019-1-23-31

### Safe control of SEMS in group interaction

A. E. Gorodetskiy<sup>a</sup>, Dr. Sc., Tech., Professor, orcid.org/0000-0002-3465-4438

V. G. Kurbanov<sup>a,b</sup>, PhD, Phys.-Math., Associate Professor, orcid.org/0000-0002-2450-9341, vugar.kurbanov@gmail.com

I. L. Tarasova<sup>a,c</sup>, PhD, Tech., Associate Professor, orcid.org/0000-0002-2282-150X

<sup>a</sup>Institute of Problems of Mechanical Engineering of RAS, 61, Bol’shoi Pr. V. O., 199178, Saint-Petersburg, Russian Federation

<sup>b</sup>Saint-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, 67, B. Morskaia St., 190000, Saint-Petersburg, Russian Federation

<sup>c</sup>Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, 29, Politekhnicheskaja St., 195251, Saint-Petersburg, Russian Federation

**Introduction:** In control over a group of interacting smart electromechanical systems (SEMS), situations may arise when the operator’s instructions and/or the automatic control system at a higher level contradict the internal state of the controlled SEMS

and/or the environment of choice. Such situations can be prevented by algorithms which check the fulfillment of conditions for the admissibility of movements. These algorithms can be based on modeling the SEMS behavior using logical-probabilistic or logical-linguistic descriptions of situations, and on non-scalar quality criteria when making decisions. **Purpose:** The development of algorithms for safe control over robots based on SEMS modules with phase constraints, under incomplete certainty of the environment. **Results:** Algorithms have been developed for safe control over three robots, using a mathematical description of situational control over a group of SEMS and the methodology of organizing the situational control over a group of mobile SEMS. The algorithms move the robots from certain current positions to specified terminal positions, avoiding their collisions with each other. In order to avoid collisions, the decision-making system in a robot's central nervous system uses robot's priorities based on the distance between the robots. An approach has been proposed to overcome uncertainty on the way (trajectory) of the robots. Uncertainties in the form of logical-probabilistic and logical-linguistic type constraints are considered. It is shown that these restrictions can be translated into a logical-interval form. This allows you to use standard mathematical programming procedures when searching for the optimal solution. **Practical relevance:** The obtained algorithms can be used for decision-making in the central nervous system and when controlling robots.

**Keywords** — safe control, intelligent robots, smart electromechanical systems, group situational interaction, dynamic configuration space, central nervous system.

**For citation:** Gorodetskiy A. E., Kurbanov V. G., Tarasova I. L. Safe control of SEMS in group interaction. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2019, no. 1, pp. 23–31 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2019-1-23-31

## References

1. *Smart electromechanical systems*/Studies in systems, decision and control. Vol. 49. Ed. Andrey E. Gorodetskiy. Springer International Publishing, 2016. 277 p. doi:10.1007/978-3-319-27547-5
2. *Smart electromechanical systems: The central nervous system* / Studies in systems, decision and control. Vol. 95. Eds. Andrey E. Gorodetskiy, Vugar G. Kurbanov. Springer International Publishing, 2017. 270 p. doi:10.1007/978-3-319-53327-8
3. Gorodetskiy A. E., Kurbanov V. G., Tarasova I. L. Decision-making in central nervous system of a robot. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2018, no. 1, pp. 21–30 (In Russian). doi:org/10.15217/issn1684-8853.2018.1.21
4. Sakharov V. V., Chertkov A. A., Tormashev D. S. Algorithm for optimal planning of group interaction of robots. *Morskoy vestnik*, 2014, no. 4(52), pp. 119–122 (In Russian).
5. Vasilyev I. A., Polovko S. A., Smirnova E. Yu. Organization of group control of mobile robots for the tasks of special robotics. *Nauchno-tehnicheskie vedomosti SPbGPU*, 2013, no. 1, pp. 119–123 (In Russian).
6. Arkhipkin A. V., Komchenkov V. I., Korolkov D. N., Petrov V. F., Simonov S. B., Terentev A. I. Problems of group control of robots in the robotic complex of fire extinguishing. *Trudy SPIIRAN* [SPIIRAS Proceedings], 2016, no. 45, pp. 116–129 (In Russian).
7. Fridman A. Ya. *SEMS-based control in locally organized hierarchical structures of robots collectives*. In: *Smart electromechanical systems: The central nervous system* / Studies in systems, decision and control. Vol. 95. Eds. Andrey E. Gorodetskiy, Vugar G. Kurbanov. Springer International Publishing, 2017. P. 31–47.
8. Rubenstein M., Ahler C., Nagpal R. Kilobot: a low cost scalable robot system for collective behaviors. *Proc. of IEEE Intern. Conf. on Robotics and Automation (IRCA 2012)*, Saint Paul, Minnesota, May 14–18, 2012, pp. 3293–3298. doi:10.1109/ICRA.2012.6224638
9. Mondada F., Gambardella L. M., Floreano D., Dorigo M. The cooperation of swarm-bots: Physical interactions in collective robotics. *IEEE Robot. Autom. Mag.*, 2005, vol. 12, no. 2, pp. 21–28. doi:10.1109/MRA.2005.1458313
10. Martynova L. A., Rozengauz M. B. Efficient operation of a group of standalone unmanned submersibles in a network-centric system of underwater illumination. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2017, no. 3, pp. 47–57 (In Russian). doi:org/10.15217/issn1684-8853.2017.3.47
11. Motorin D. E., Popov S. G. Multi-criteria path planning algorithm for a robot on a multilayer map. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2018, no. 3, pp. 45–53 (In Russian). doi:org/10.15217/issn1684-8853.2018.3.45
12. Andreychuk A., Yakovlev K. Path finding for the coalition of co-operative agents acting in the environment with destructible obstacles. *Proc. of Third Intern. Conf. "Interactive collaborative robotics"*, ICR 2018, Leipzig, Germany, Sept. 18–22, 2018, pp. 13–22.
13. Dorigo M., Floreano D., Gambardella L. M., Mondada F., Nolfi S., Baaboura T., Birattari M., et al. Swarmanoid: a novel concept for the study of heterogeneous robotic swarms. *IEEE Robot. Autom. Mag.*, 2013, vol. 20, no. 4, pp. 60–71.
14. Vorobev V. V. Logical inference and action planning elements in robot groups. *Proc. 16th National Conf. on Artificial Intelligence KII-2018*, Moscow, 2018, vol. 1, pp. 88–96 (In Russian).
15. Ivanov D. YA., Shabanov I. B. Model of application of coalitions of intelligent mobile robots with limited communications. *Proc. 16th National Conf. on Artificial Intelligence KII-2018*, Moscow, 2018, vol. 1, pp. 97–105 (In Russian).
16. Pospelov D. A. *Situacionnoe upravlenie: Teoriya i praktika* [Situation management: Theory and practice]. Moscow, Nauka Publ., 1986. 286 p. (In Russian).
17. Kunc G., O Donnel S. *Upravlenie: sistemnyj i situacionnyj analiz upravlencheskih funkcij* [Management: system and situation analysis of management functions]. Moscow, Progress Publ., 2002. 588 p. (In Russian).
18. Kulik B. A., Fridman A. Ya. *Logical analysis of data and knowledge with uncertainties in SEMS*. In: *Smart electromechanical systems: The central nervous system* / Studies in systems, decision and control. Vol. 95. Eds. Andrey E. Gorodetskiy, Vugar G. Kurbanov. Springer International Publishing, 2017. P. 45–59. doi:10.1007/978-3-319-53327-8
19. Yudin D. B. *Vychislitel'nyye metody teorii prinyatiya resheniy* [Computational methods of decision theory]. Moscow, Nauka Publ., 1989. 320 p. (In Russian).
20. Sing G. Lee, Yancy Diaz-Mercado, Magnus Egerstedt. Multi-robot control using time-varying density functions. *IEEE Transactions on Robotics*, 2015, vol. 31, iss. 2, pp. 489–493. doi:10.1109/TRO.2015.2397771
21. Fridman A. Ya. *Situatsionnoye upravleniye strukturoy promyshlennno-prirodnokh sistem. Metody i modeli* [Situational control of the structure of industrial natural systems. Methods and models]. Saarbrücken, Germany, LAP, 2015. 503 p. (In Russian).
22. Tarasova I. L., Gorodetskiy A. E., Kurbanov V. G. *Mathematical models of the automatic control systems SEMS modules*. In: *Smart electromechanical systems: The central nervous system* / Studies in systems, decision and control. Vol. 95. Eds. Andrey E. Gorodetskiy, Vugar G. Kurbanov. Springer International Publishing, 2017. P. 149–158. doi:10.1007/978-3-319-27547-5
23. Andrey E. Gorodetskiy, Irina L. Tarasova, Vugar G. Kurbanov. *Reduction of logical-probabilistic and logical-linguistic constraints to interval constraints in the synthesis of optimal SEMS*. In: *Smart electromechanical systems: Group interaction*/ Studies in systems, decision and control. Vol. 174. Eds. Andrey E. Gorodetskiy, Irina L. Tarasova. Springer International Publishing, 2019. P. 77–90. doi:10.1007/978-3-319-99759-9-7

УДК 004.942

doi:10.31799/1684-8853-2019-1-32-39

## Временной анализ системы управления в сети обработки данных

К. Н. Рождественская<sup>а</sup>, ассистент, [orcid.org/0000-0003-4930-6898](https://orcid.org/0000-0003-4930-6898), [rogdkn@yandex.ru](mailto:rogdkn@yandex.ru)

<sup>а</sup>Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, Б. Морская ул., 67, Санкт-Петербург, 190000, РФ

**Постановка проблемы:** система управления в сети обработки данных взаимодействует с сетью с помощью отправки команд и приема ответа на них. Такая система управления отвечает за жизнеспособность сети, следовательно, требуется ее проанализировать, в частности, с точки зрения поведения во времени без применения полного перебора вариантов управления. **Цель:** изучить и проанализировать поведение исследуемой системы управления в сети обработки данных с помощью математического моделирования, основанного на использовании известных положений теории конечных автоматов, и выполнить компьютерное моделирование полученных теоретических положений. **Результаты:** построен конечный автомат, представленный в виде графа переходов, отражающий поведение во времени части конкретной системы управления в сети обработки данных менеджера Plug-and-Play. Построены правила проведения и определена задача анализа конечного автомата менеджера Plug-and-Play. В результате получены виды управляющих векторов, которые приводят менеджер Plug-and-Play к правильному поведению во времени. Произведено компьютерное моделирование с помощью написанной программы-сценария в математическом пакете MatLab. Результаты моделирования приведены в виде временных диаграмм переходов конечного автомата. Поведение его изменяется в зависимости от поступающих сигналов и начального состояния автомата. На временных диаграммах можно отследить поведение и переходы между состояниями, частоту попадания в то или иное состояние, обход состояний автомата. **Практическая значимость:** найденные виды управляющих векторов для менеджера Plug-and-Play без использования полного перебора не приводят к неправильным ситуациям обработки данных в сети.

**Ключевые слова** – администрирование бортовой сети, Plug-and-Play, менеджер, конечный автомат, граф переходов, MatLab.

Для цитирования: Рождественская К. Н. Временной анализ системы управления в сети обработки данных. *Информационно-управляющие системы*, 2019, № 1, с. 32–39. doi:10.31799/1684-8853-2019-1-32-39

For citation: Rozhdestvenskaya K. N. Temporal analysis of a control system in a data processing network. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2019, no. 1, pp. 32–39 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2019-1-32-39

### Введение

Система управления в сетях обработки данных предназначена для организации управления сетью и должна обеспечить правильную передачу данных между сетевыми единицами. В качестве последних могут выступать различные устройства (компьютеры, коммутаторы, терминальные узлы и т. д.). Самым перспективным стандартом для организации сетевой структуры на борту космического аппарата является стандарт SpaceWire, который предназначен для передачи данных и управления информацией на борту летательных и космических аппаратов. Одной из основных целей стандарта является обеспечение совместимости с различными видами оборудования и многофункциональное использование конечных элементов и подсистем. SpaceWire поддерживает интегрирование и тестирование сложных бортовых систем путем внедрения соответствующего оборудования непосредственно в аппаратуру обработки данных. Мониторинг и тестирование могут быть проведены без создания отдельного физического интерфейса с аппаратурой обработки данных [1]. Подробно обзор и сравнение стандартов передачи данных на бор-

товых сетях и преимущество выбора стандарта SpaceWire представлены в работе [2].

Управление в сети обработки данных осуществляется с помощью специальных менеджеров. Примером может служить менеджер Plug-and-Play бортовой сети SpaceWire. Plug-and-Play (PnP) дословно переводится как «включи и работай». Эта технология была предложена для быстрого автоматического определения и конфигурирования устройств на компьютере, теперь данный подход существует и для сети. Иными словами, пользователю не нужно ничего настраивать, достаточно подключить устройство и можно начинать работу.

По мере того как сеть развивается и расширяется, она становится все более важным и необходимым ресурсом организации, у нее увеличиваются размеры и сложность, и неизбежно возрастает вероятность каких-либо сбоев или неисправностей. Низкая производительность неприемлема для пользователей, как и нехватка сетевых ресурсов. Сеть необходимо управлять, диагностировать проблемы, предотвращать ситуации отказов и обеспечивать максимально возможную производительность сети.

Технология PnP для сети SpaceWire подробно описана в работах [2–5]. В работах [2, 3] сде-

лан обзор стандартов: InfiniBand [6], AFDX [7], MIL-STD-1553B [8], Fibre Channel [9], SOIS [10], SPA [11, 12], MSV Bus [13, 14]. Существует несколько вариантов PnP для сети SpaceWire (алгоритм NASA, алгоритм Dundee) [15, 16] с точки зрения предлагаемых разработчиками решений администрирования, конфигурирования и мониторинга сети. В работе [3] определены термины конфигурирования, администрирования и мониторинга. В работе [5] рассматривается программное обеспечение, настраивающее сеть SpaceWire требуемым образом без участия человека (PnP-технология) и представляющее результаты в виде выходных файлов, описывающих систему.

В настоящей статье основное внимание уделяется менеджеру PnP. Он выполняет ключевые сервисы по настройке, мониторингу и реконфигурированию сети [17–19]. На рис. 1 показана PFDD-диаграмма IDEF3-технологии процесса управления сетью [20]. Взаимодействие менеджера с сетью будет представлено в виде соответствующего конечного автомата [21–24].

Выполним, без использования полного перебора, временной анализ конечного автомата и поиск векторов управлений, который приводит

систему взаимодействия с сетью к правильным ситуациям. Для подтверждения результатов временного анализа конечного автомата используется программа-сценарий, написанная в математическом пакете MatLab.

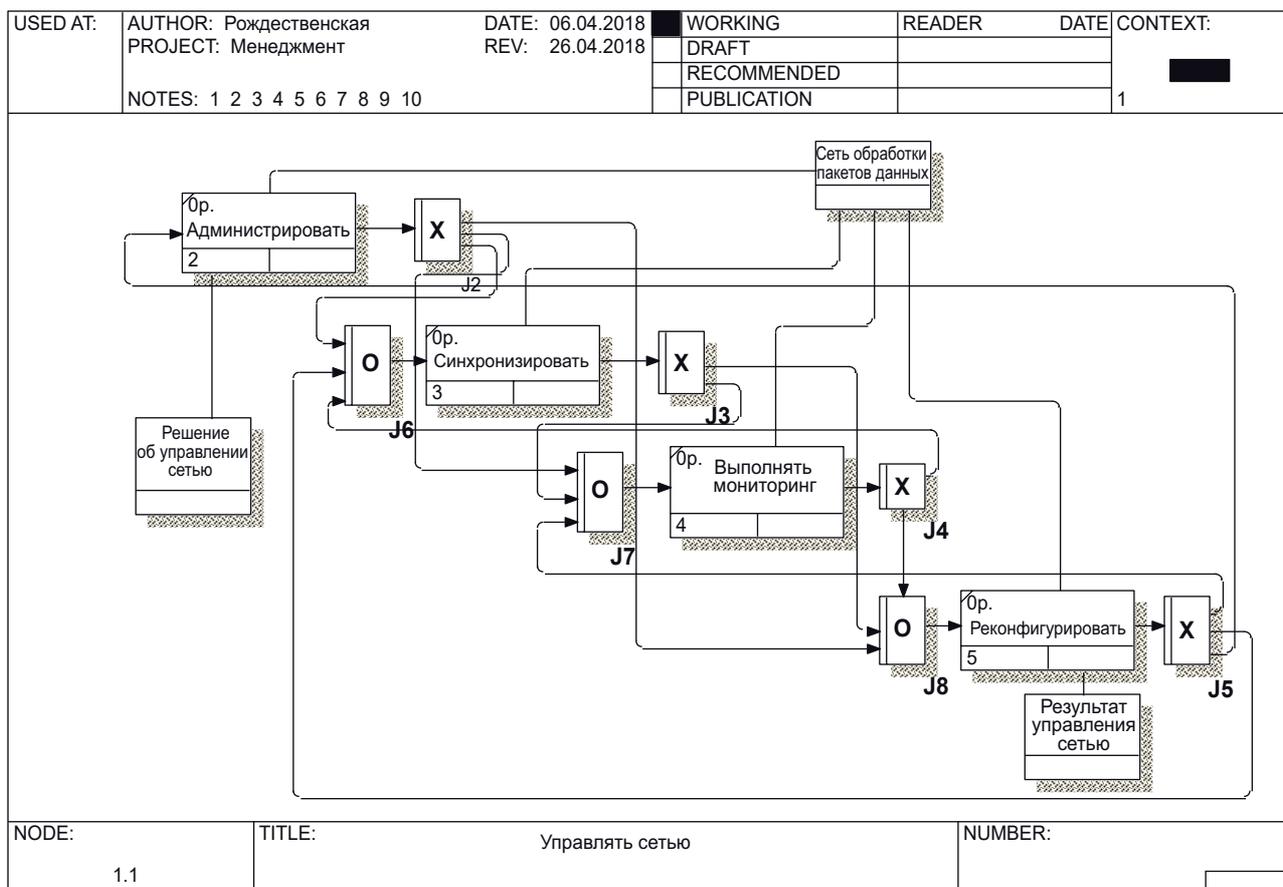
### Модель переходов, описывающая взаимодействие менеджера PnP с сетью

С точки зрения взаимодействия с сетью SpaceWire менеджеру PnP необходимо уметь принимать пакеты и отправлять пакеты в сеть.

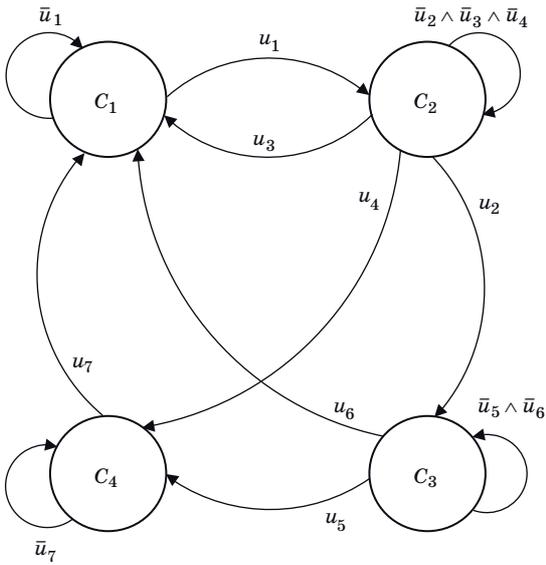
Модель переходов может быть построена с использованием разных математических инструментов. В статье модель переходов имеет вид графа переходов. Граф переходов с четырьмя состояниями изображен на рис. 2.

Четыре состояния графа переходов:

- $C_1$  — формирование команды;
  - $C_2$  — прием пакета;
  - $C_3$  — обработка пакета;
  - $C_4$  — обновление служебных структур.
- Переходы в графе:  
 $C_1 \rightarrow C_2$  — команда в сеть отправлена;



■ **Рис. 1.** PFDD-диаграмма технологического процесса управления сетью  
 ■ **Fig. 1.** The PFDD-diagram of technological process of network management



■ **Рис. 2.** Граф переходов отправки и приема пакета  
 ■ **Fig. 2.** The transition graph of the send and receive packet

- $C_2 \rightarrow C_3$  — пакет принят;
- $C_2 \rightarrow C_1$  — пакет не принят, таймаут ожидания истек, количество попыток не израсходовано;
- $C_2 \rightarrow C_4$  — пакет не принят, таймаут ожидания истек, количество попыток израсходовано;
- $C_3 \rightarrow C_4$  — команда обработана сетевым устройством, команда может быть успешно выполнена или нет;
- $C_3 \rightarrow C_1$  — команда не выполнена сетевым устройством, количество попыток не израсходовано;
- $C_4 \rightarrow C_1$  — формирование следующей команды для следующего регистра или устройства;
- $C_i \rightarrow C_i$  — при отсутствии сигнала, который бы переводил систему из состояния в состояние, текущее состояние будет сохранено. Например, когда на очередном этапе мониторинга будут опрошены все устройства, это приведет к остановке автомата на некоторое время в состоянии  $C_4$ .

Введем для описания состояний автомата соответствующие булевы переменные  $x_1, x_2, x_3, x_4$ . Четырехмерный вектор  $\mathbf{x} = [x_1; x_2; x_3; x_4]$  характеризует ситуацию, возникающую в конечном автомате. Поведение его будем рассматривать в дискретном времени  $t$ . В качестве единицы времени считаем время подачи команды для перехода в графе. Тогда вектор  $\mathbf{x}(t)$  — вектор состояний в конечном автомате в момент времени  $t$ . Ситуация — это вид вектора  $\mathbf{x}(t)$ . Правильная ситуация — это когда  $\mathbf{x}(t)$  есть орт в любой момент времени. Неправильная ситуация возникает в противном случае, и попадание в эти ситуации означает неправильную работу автомата (менеджера PnP).

Введем для описания переходов соответствующие управляющие, булевы переменные  $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7$ . Семимерный вектор управления  $\mathbf{u} = [u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7]$  характеризует работу, происходящую в конечном автомате. Вектор  $\mathbf{u}$  не изменяется во времени и известен при анализе описываемого автомата. Значения вектора определяются поступающими сигналами сети и активными переходами автомата. Вектор  $\mathbf{u}$  предписывает поведение автомата с начала запуска. Всего множество комбинаций управляющих воздействий составляет  $2^7$  вариантов. Анализ временного поведения автомата предполагает изучение ситуаций  $\mathbf{x}(t)$  при возможных управляющих воздействиях из указанного множества.

Определим правила поведения менеджера PnP.

1. Анализ проводится при начальном условии  $\mathbf{x}(0) = [1; 0; 0; 0]$  (в виде первого орта), что соответствует стартовому состоянию менеджера PnP, при котором он готов к принятию пакетов.

2. Правильными считаются ситуации, при которых состояния в любой момент времени представляют собой соответствующий орт.

3. Число шагов должно быть не меньше числа состояний.

Для анализа используются рекуррентные уравнения, описывающие состояния конечного автомата:

$$\mathbf{x}(t + 1) = \mathbf{A}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0.$$

Здесь  $\mathbf{A}(\mathbf{u})$  —  $(4 \times 4)$ -матрица, элементы которой зависят от вектора управления  $\mathbf{u}$  согласно переходам в графе конечного автомата менеджера PnP. В соответствии с рис. 2 матрица конечного автомата будет иметь следующий вид:

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \bar{u}_1 & u_3 & u_6 & u_7 \\ u_1 & \bar{u}_2 \wedge \bar{u}_3 \wedge \bar{u}_4 & 0 & 0 \\ 0 & u_2 & \bar{u}_5 \wedge \bar{u}_6 & 0 \\ 0 & u_4 & u_5 & \bar{u}_7 \end{bmatrix}.$$

Матрица  $\mathbf{A}(\mathbf{u})$  является стохастической, следовательно, в поведении автомата должны наблюдаться стационарные режимы. Они могут быть как постоянными, так и циклическими.

Задачей анализа поведения менеджера PnP является поиск векторов управлений, которые обеспечивают правильные ситуации, как постоянные, так и циклические, не прибегая к полному перебору управлений. Ситуация  $\mathbf{x}(t)$  вычисляется как решение рекуррентных уравнений по формуле

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}^t(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{x}(0).$$

С учетом правила 1 анализа интерес представляет только первый столбец матрицы  $A^i(u)$ .

Рассмотрим два крайних вектора управления. Первое управление — это нулевой вектор  $u = [0,0,0,0,0,0]$ . При таком управлении автомат сохранит свое состояние с течением времени (постоянное правильное состояние), что демонстрирует табл. 1.

Второе крайнее значение вектора управления — единичное, т. е.  $u = [1,1,1,1,1,1]$ . Такое управление приведет к нарушению второго правила анализа поведения менеджера PnP. В табл. 2 показано поведение автомата при единичном управлении.

Существует управление, которое приводит к появлению цикла между состояниями  $C_1$  и  $C_2$ . Его можно характеризовать следующей записью:  $u = [1,0,1,0,*,*,*]$ , где \* — значение, равное 1 или 0. Таким образом, определено, что из  $2^7$  возможных векторов управления  $2^3$  вектора приведут к правильной циклической ситуации. В табл. 3 приведены состояния автомата по шагам при таком типе управления.

По аналогии находим векторы управления, приводящие и к другим правильным циклическим ситуациям:

$u = [1,1,0,0,0,1,*]$  — всего  $2^1$  вектора управлений;

■ **Таблица 1.** Поведение автомата во времени при нулевом управлении

■ **Table 1.** The behavior of the machine in time at zero control

Ситуация	Состояние конечного автомата по шагам				
	1-й шаг	2-й шаг	3-й шаг	4-й шаг	5-й шаг
$x_1$	1	1	1	1	1
$x_2$	0	0	0	0	0
$x_3$	0	0	0	0	0
$x_4$	0	0	0	0	0

■ **Таблица 2.** Поведение автомата во времени при единичном управлении

■ **Table 2.** The behavior of the machine in time with single control

Ситуация	Состояние конечного автомата по шагам				
	1-й шаг	2-й шаг	3-й шаг	4-й шаг	5-й шаг
$x_1$	0	1	0	0	0
$x_2$	1	0	1	0	0
$x_3$	0	1	0	1	0
$x_4$	0	1	1	1	1

■ **Таблица 3.** Поведение автомата во времени при управлении  $u = [1,0,1,0,0,0,1]$

■ **Table 3.** The behavior of the machine in time with  $u = [1,0,1,0,0,0,1]$

Ситуация	Состояние конечного автомата по шагам				
	1-й шаг	2-й шаг	3-й шаг	4-й шаг	5-й шаг
$x_1$	0	1	0	1	0
$x_2$	1	0	1	0	1
$x_3$	0	0	0	0	0
$x_4$	0	0	0	0	0

■ **Таблица 4.** Поведение автомата во времени при управлении  $u = [1,1,1,0,0,0,1]$

■ **Table 4.** The behavior of the machine in time with  $u = [1,1,1,0,0,0,1]$

Ситуация	Состояние конечного автомата по шагам				
	1-й шаг	2-й шаг	3-й шаг	4-й шаг	5-й шаг
$x_1$	0	1	0	1	0
$x_2$	1	0	1	0	1
$x_3$	0	1	1	0	0
$x_4$	0	0	0	0	0

$u = [1,0,0,1,*,*,1]$  — всего  $2^2$  вектора управлений;

$u = [1,1,0,0,1,0,1]$ .

Описанные векторы управления допустимы, так как не нарушают ни одно из правил поведения менеджера PnP. Помимо правильных циклических ситуаций, существуют правильные постоянные ситуации, которые достигаются при следующих векторах управления:

$u = [0,*,*,*,*,*]$  — всего  $2^6$  вектора управлений;

$u = [1,0,0,0,*,*,*]$  — всего  $2^3$  вектора управлений;

$u = [1,1,0,0,0,0,*]$  — всего  $2^1$  вектора управлений;

$u = [1,1,0,0,1,0,0]$ .

Общее число векторов допустимых управлений равно 91. Прочие векторы (37 комбинаций) приведут к нарушению правил поведения, а значит, и к некорректной работе менеджера PnP.

Примером недопустимого вектора управления может быть  $u = [1,1,1,0,0,0,1]$ . В табл. 4 приведено поведение автомата во времени при таком управлении, второе правило поведения очевидно нарушено.

Компьютерное моделирование должно показать поведение автомата во времени наглядным образом.

Компьютерное моделирование

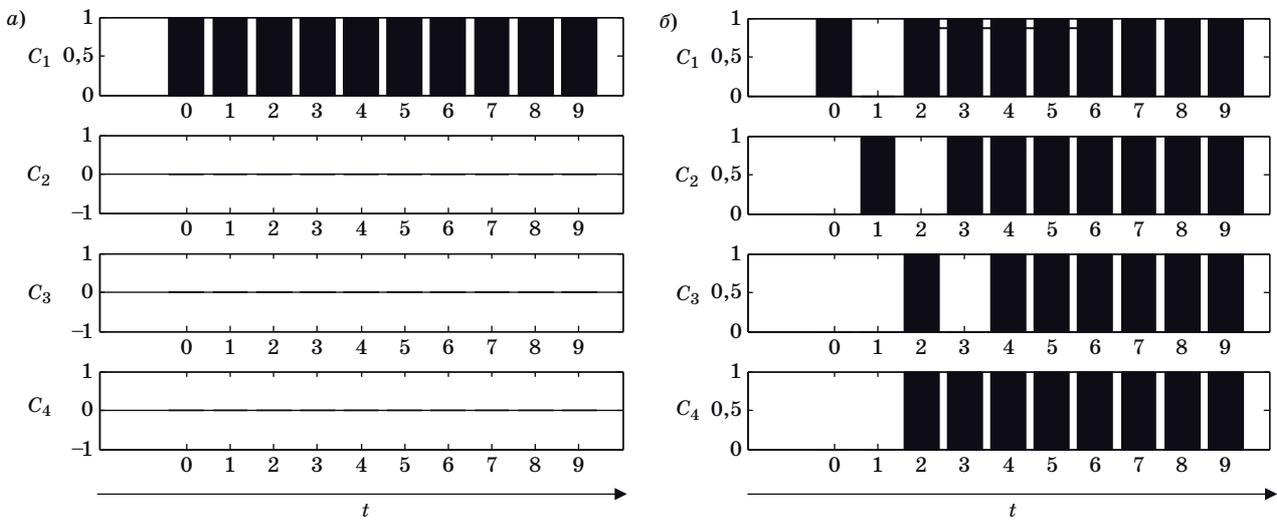
Результаты анализа поведения менеджера PnP были промоделированы с помощью написанной программы-сценария в математическом пакете MatLab. В этой программе реализованы рекуррентные уравнения рассматриваемого конечного автомата и построены временные диаграммы работы менеджера PnP.

Поведение автомата при крайних значениях вектора управления отображено на рис. 3. При нулевом управлении сохраняется начальное состояние автомата  $x(0)$  (рис. 3, а). При единичном управлении менеджер PnP на втором шаге

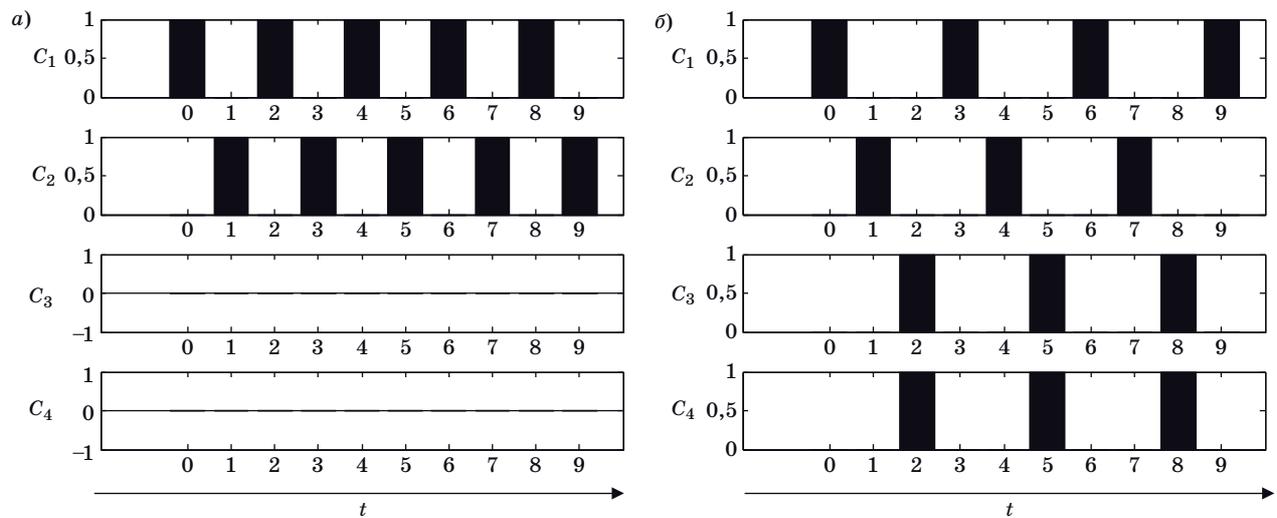
оказывается сразу в трех состояниях одновременно, что является неправильной ситуацией (рис. 3, б).

При подаче управления  $u = [1,0,1,0,*,*,*]$  диаграмма изменений состояний конечного автомата во времени показана на рис. 4, а. Рисунок подтверждает, что автомат останется в цикле между первым и вторым состояниями независимо от того, какие сигналы поданы в векторе управления на позициях 5, 6 и 7.

При векторе управления  $u = [1,1,0,1,0,0,1]$ , не входящем во множество управляющих векторов, которые приводят к правильной циклической или постоянной ситуации, конечный автомат



■ Рис. 3. Изменение состояний в течение 10 шагов при нулевом (а) и единичном (б) векторе  $u$   
 ■ Fig. 3. Diagram a change of state for 10 steps at zero (a) and when the single (б) vector  $u$



■ Рис. 4. Изменение состояний в течение 10 шагов с управляющим воздействием  $u = [1,0,1,0,1,1,1]$  (а) и  $u = [1,1,0,1,0,0,1]$  (б)  
 ■ Fig. 4. Diagram a change of state within 10 steps when the single vector  $u = [1,0,1,0,1,1,1]$  (a) and  $u = [1,1,0,1,0,0,1]$  (б)

уже на втором шаге окажется в двух состояниях одновременно (рис. 4, б).

Таким образом, приведенные временные диаграммы хорошо согласуются с рассмотренными ситуациями в конечном автомате.

## Заключение

Для проведения временного анализа поведения менеджера PnP построен конечный автомат, описывающий работу по приему и отправке пакетов в сеть, определены правила проведения анализа и рассмотрены правильные и неправильные ситуации обработки данных в сети. Найдены векторы управления, которые задают правильное поведение конечного автомата.

Не прибегая к полному перебору, а основываясь на анализе векторов управления и использовании решения рекуррентных уравнений для описания состояний конечного автомата, автор получил три множества векторов управления. Первое множество содержит 76 векторов, приводящих к постоянным ситуациям. Второе множество содержит 15 векторов, приводящих к циклическим ситуациям. Третье множество содержит 37 векторов, приводящих к неправильным ситуациям.

Для подтверждения полученных теоретических положений выполнено компьютерное моделирование с использованием математического пакета MatLab. Результаты моделирования в виде временных диаграмм поведения менеджера PnP подтвердили найденные с помощью временного анализа решения.

## Литература

- Standards ECSS-E-50-12A. Space engineering. SpaceWire — Links, nodes, routers and networks. Noordwijk, ESA, European cooperation for space standardization, 2003. 124 p.
- Khramenkova K., Oleynikova S.** Review methods configuration, administration and network monitoring in high-rate onboard networking standards. *12th Conf. of Open Innovations Framework Program FRUCT*, Oulu, Finland, 2012, pp. 244–249.
- Храменкова К. Н.** Стандарты и протоколы автоматизированного администрирования и мониторинга бортовой локальной вычислительной сети. *Теоретические и практические аспекты развития отечественного авиастроения: тез. Всерос. науч.-техн. конф.*, Ульяновск, 2014, с. 137–139.
- Koblyakova L. V., Oleynikova S. A., Khramenkova K. N.** Network management algorithm for high speed onboard systems. *Proc. 5th Intern. SpaceWire Conf.*, Göteborg, Sweden, 2013, pp. 226–232.
- Khramenkova K. N.** Automated SpaceWire network administration. *Proc. 6th Intern. SpaceWire Conf.*, Athens, Greece, 2014, pp. 86–89.
- InfiniBand Architecture Specification. Release 1.2 Final Release.* InfiniBandSM Trade Association, 2004, vol. 1, pp. 709–930. <https://www.infinibandta.org/ibta-specification/> (дата обращения: 15.09.2018).
- Taubrich J., Reinhard von Hanxleden.** Formal specification and analysis of AFDX redundancy management algorithms. *26th Intern. Conf. SAFECOMP*, 2007, pp. 1–3.
- MIL\_STD\_1553 Tutorial v 2.3.* Germany, Freiburg, AIM GmbH Avionics Databus Solutions, 2010. 82 p.
- McCloghrie K.** *Fibre channel management MIB.* Cisco Systems, 2015, pp. 1–5. <https://www.rfc-editor.org/pdf/rfc/rfc4044.txt.pdf> (дата обращения: 15.09.2018)
- CCSDS 854.0-M-1. Spacecraft Onboard Interface Services-Subnetwork Device Discovery Service.* Washington, DC, The Consultative Committee for Space Data Systems, 2009. 22 p. <https://public.ccsds.org/Publications/SOIS.aspx> (дата обращения: 15.09.2018).
- Space Plug-and-Play Architecture Standards Development Guidebook.* Reston, Virginia, American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2011. 46 p.
- Space Plug-and-Play Architecture Standard SpaceWire Subnet Adaptation.* Reston, Virginia, American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2011. 38 p.
- Modular Space Vehicle Bus. Means Faster, Flexible, Small Satellite Launch Capabilities.* USA, Washington, Northrop Grumman Mission Systems, 2014. 2 p.
- Modular Space Vehicle Bus. Systems Rapid Multi-mission spacecraft bus development.* USA, Washington, Northrop Grumman Mission, 2013. 2 p.
- SpaceWire-PnP Protocol Definition.* UK, Scotland, Dundee, Space Technology Centre, University of Dundee, 2009. 211 p.
- Romanowski K., Tyczka P., Holubowicz W., Renk R., Kollias V. D., Pogkas N., Jameux D.** SpaceWire network management using network discovery and configuration protocol. *Proc. 7th Intern. SpaceWire Conf.*, 2016, Yokohama, Japan, 2016, pp. 45–50.
- Шейнин Ю. Е., Пятлина Е. О., Рождественская К. Н.** Механизм распределенных прерываний для SpaceWire-Plug-and-Play. *Актуальные проблемы науки XXI века: сб. ст. международной исследовательской организации по материалам XVI Международ. науч.-практ. конф.*, Москва, 2016, с. 66–71.
- Khramenkova K. N., Fortyshev E. U.** Tasks of decentralized SpaceWire-Plug-and-Play algorithm. *17th Conf. of the Open Innovations Association FRUCT*, 2015, pp. 287–290.
- Fortyshev E. U., Khramenkova K. N.** SpaceWire network support algorithm as a part of decentralized Plug-and-Play algorithm. *17th Conf. of the Open Innovations Association FRUCT*, 2015, pp. 283–286.
- Бритов Г. С.** Метод формального описания PFDD-диаграмм IDEF3-технологии. *Информационно-управляющие системы*, 2014, № 2, с. 25–32.

21. Кузнецова М. С. Методы задания автоматов. *Молодой ученый*, 2015, № 7(87), с. 7–11. <https://moluch.ru/archive/87/16905/> (дата обращения: 15.09.2018).
22. Страшинин Е. Э. *Основы теории автоматического управления*. Екатеринбург, УГТУ, 2000. 217 с.
23. Поликарпова Н. И., Шалыто А. А. *Автоматное программирование*. СПб., СПбГУ ИТМО, 2007.

[http://is.ifmo.ru/books/\\_umk.pdf](http://is.ifmo.ru/books/_umk.pdf) (дата обращения: 16.06.2018).

24. Гуренко В. В. *Введение в теорию автоматов*. Электронное издание. М., МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2013. [http://e-learning.bmstu.ru/moodle/file.php/1/common\\_files/library/TZA/bmstu\\_IU-6\\_automates\\_theory.pdf](http://e-learning.bmstu.ru/moodle/file.php/1/common_files/library/TZA/bmstu_IU-6_automates_theory.pdf) (дата обращения: 15.09.2018).

UDC 004.942

doi:10.31799/1684-8853-2019-1-32-39

### Temporal analysis of a control system in a data processing network

K. N. Rozhdestvenskaya<sup>a</sup>, Assistant Professor, [orcid.org/0000-0003-4930-6898](https://orcid.org/0000-0003-4930-6898), [rogdkn@yandex.ru](mailto:rogdkn@yandex.ru)

<sup>a</sup>Saint-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, 67, B. Morskaya St., 190000, Saint-Petersburg, Russian Federation

**Introduction:** A control system for a data processing network interacts with the network by sending commands and receiving responses. Such a control system is responsible for the network viability, and therefore should be analyzed, in particular, in terms of behavior over time, without exhaustive search for possible control options. **Purpose:** Studying and analyzing the behavior of a control system in a data processing network using mathematical modeling based on finite automata theory, and performing computer simulation of the obtained theoretical positions. **Results:** A finite state machine is constructed, presented in the form of a transition graph, reflecting the temporal behavior of a part of a specific control system in the data processing network by Plug-and-Play manager. Rules of conduct are specified, and the problem of the manager FSM analysis is defined. As a result, the control vector types have been obtained which lead the PnP manager to the correct temporal behavior. Computer simulation was performed using a script program in MatLab mathematical package. The simulation results are presented as time diagrams of finite state machine transitions. Its behavior varies depending on the incoming signals and the starting state of the machine. On the time diagrams, you can trace the behavior and transitions between states, estimate the frequency of getting into a particular state, or bypass the machine states. **Practical relevance:** The control vector types found for the PnP manager without an exhaustive search do not lead to incorrect situations in network data processing.

**Keywords** — onboard network administration, Plug-and-Play, manager, finite state machine, transition graph, MatLab.

**For citation:** Rozhdestvenskaya K. N. Temporal analysis of a control system in a data processing network. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2019, no. 1, pp. 32–39 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2019-1-32-39

### References

- Standards ECSS-E-50-12A. Space engineering. SpaceWire — Links, nodes, routers and networks. Noordwijk, ESA, European cooperation for space standardization, 2003. 124 p.
- Khramenkova K. N. Review methods configuration, administration and network monitoring in high-rate onboard networking standards. *12th Conf. of Open Innovations Framework Program FRUCT*, Oulu, Finland, 2012, pp. 244–249.
- Khramenkova K. N. Standards and protocols for automated administration and monitoring of the onboard local network. *Tezisy Vserossiiskoi nauchno-tekhnicheskoi konferentsii "Teoreticheskie i prakticheskie aspekty razvitiia otechestvennogo aviastroeniia"* [Proc. All-Russian Scientific and Technical Conf. "Theoretical and practical aspects of the development of domestic aircraft building"], Ul'ianovsk, 2014, pp. 137–139 (In Russian).
- Koblyakova L. V., Oleynikova S. A., Khramenkova K. N. Network management algorithm for high speed onboard systems. *Proc. 5th Intern. SpaceWire Conf.*, Göteborg, Sweden, 2013, pp. 226–232.
- Khramenkova K. N. Automated SpaceWire network administration. *Proc. 6th Intern. SpaceWire Conf.*, Athens, Greece, 2014, pp. 86–89.
- InfiniBand Architecture Specification. Release 1.2 Final Release*. InfiniBandSM Trade Association, 2004, vol. 1, pp. 709–930. Available at: <https://www.infinibandta.org/ibta-specification/> (accessed 15 September 2018).
- Taubrich J., Reinhard von Hanxleden. Formal specification and analysis of AFDX redundancy management algorithms. *26th Intern. Conf. SAFECOMP*, 2007, pp. 1–3.
- MIL STD 1553 Tutorial v 2.3*. Germany, Freiburg, AIM GmbH Avionics Databus Solutions, 2010. 82 p.
- McCloghrie K. *Fibre Channel Management MIB*. Cisco Systems, 2015, pp. 1–5. Available at: <https://www.rfc-editor.org/pdfrfc/rfc4044.txt.pdf> (accessed 15 September 2018).
- CCSDS 854.0-M-1. Spacecraft Onboard Interface Services-Subnetwork Device Discovery Service*. Washington, DC, The Consultative Committee for Space Data Systems, 2009. 22 p. Available at: <https://public.ccsds.org/Publications/SOIS.aspx> (accessed 15 September 2018).
- Space Plug-and-Play Architecture Standards Development Guidebook*. Reston, Virginia, American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2011. 46 p.
- Space Plug-and-Play Architecture Standard SpaceWire Subnet Adaptation*. Reston, Virginia, American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2011. 38 p.
- Modular Space Vehicle Bus. Means Faster, Flexible, Small Satellite Launch Capabilities*. USA, Washington, Northrop Grumman Mission Systems, 2014. 2 p.
- Modular Space Vehicle Bus. Systems Rapid Multi-mission spacecraft bus development*. USA, Washington, Northrop Grumman Mission, 2013. 2 p.
- SpaceWire-PnP Protocol Definition*. UK, Scotland, Dundee, Space Technology Centre, University of Dundee, 2009. 211 p.
- Romanowski K., Tyczka P., Hołubowicz W., Renk R., Kollias V. D., Pogkas N., Jameux D. SpaceWire network management using network discovery and configuration protocol. *Proc. 7th Intern. SpaceWire Conf.*, 2016, Yokohama, Japan, 2016, pp. 45–50.
- Sheinin Iu. E., Piatlina E. O., Rozhdestvenskaya K. N. The distributed interrupts mechanism of SpaceWire for Plug-and-Play. *Sbornik statei mezhdunarodnoi issledovatel'skoi organizatsii po materialam XVI Mezhdunarodnoi nauchno-prakticheskoi konferentsii "Aktual'nye problemy nauki XXI veka"* [Collection of articles of the international research organization based on the XVI Intern. Scientific Conf. "Actual problems of science of the XXI century"], Moscow, 2016, pp. 66–71 (In Russian).

18. Khramenkova K. N., Fortyshev E. U. Tasks of decentralized SpaceWire-Plug-and-Play algorithm. *17th Conf. of the Open Innovations Association FRUCT*, 2015, pp. 287–290.
19. Fortyshev E. U., Khramenkova K. N. SpaceWire network support algorithm as a part of decentralized Plug-and-Play algorithm. *17th Conf. of the Open Innovations Association FRUCT*, 2015, pp. 283–286.
20. Britov G. S. Method of formal description of DFD-diagrams of IDEF3-technology. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2014, no. 2, pp. 25–32 (In Russian).
21. Kuznetsova M. S. Methods for setting automata. *Molodoi uchenyi*, 2015, no. 7(87), pp. 7–11. Available at: <http://moluch.ru/archive/87/16905/> (accessed 15 September 2018) (In Russian).
22. Strashinin E. E. *Osnovy teorii avtomaticheskogo upravleniya* [Fundamentals of automatic control theory]. Ekaterinburg, Ural'skij federal'nyj universitet Publ., 2000. 217 p. (In Russian).
23. Polikarpova N. I., Shalyto A. A. *Avtomatnoe programirovanie* [Automata-based programming]. Saint-Petersburg, ITMO Publ., 2007. Available at: [http://is.ifmo.ru/books/\\_umk.pdf](http://is.ifmo.ru/books/_umk.pdf) (accessed 16 June 2018) (In Russian).
24. Gurenko V. V. *Vvedenie v teoriiu avtomatov*. Elektronnoe izdanie [Introduction to automata theory. Electronic publication]. Moscow, Moskovskij gosudarstvennyj tekhnicheskij universitet im. N. E.H. Baumana Publ., 2013. 62 p. Available at: [http://e-earning.bmstu.ru/moodle/file.php/1/common\\_files/library/TZA/bmstu\\_IU-6\\_automates\\_theory.pdf](http://e-earning.bmstu.ru/moodle/file.php/1/common_files/library/TZA/bmstu_IU-6_automates_theory.pdf) (accessed 15 September 2018) (In Russian).

## Уважаемые авторы!

При подготовке рукописей статей необходимо руководствоваться следующими рекомендациями.

Статьи должны содержать изложение новых научных результатов. Название статьи должно быть кратким, но информативным. В названии недопустимо использование сокращений, кроме самых общепринятых (РАН, РФ, САПР и т. п.).

Объем статьи (текст, таблицы, иллюстрации и библиография) не должен превышать эквивалента в 20 страниц, напечатанных на бумаге формата А4 на одной стороне через 1,5 интервала Word шрифтом Times New Roman размером 13, поля не менее двух сантиметров.

Обязательными элементами оформления статьи являются: индекс УДК, заглавие, инициалы и фамилия автора (авторов), ученая степень, звание (при отсутствии — должность), полное название организации, аннотация и ключевые слова на русском и английском языках, электронные адреса авторов, которые по требованию ВАК должны быть опубликованы на страницах журнала. При написании аннотации не используйте аббревиатур и не делайте ссылок на источники в списке литературы. Предоставляйте подрисовочные подписи и названия таблиц на русском и английском языках.

Статьи авторов, не имеющих ученой степени, рекомендуется публиковать в соавторстве с научным руководителем, наличие подписи научного руководителя на рукописи обязательно; в случае самостоятельной публикации обязательно предоставляйте заверенную по месту работы рекомендацию научного руководителя с указанием его фамилии, имени, отчества, места работы, должности, ученого звания, ученой степени — эта информация будет опубликована в ссылке на первой странице.

**Формулы** набирайте в Word, не используя формульный редактор (Mathtype или Equation), при необходимости можно использовать формульный редактор; для набора одной формулы не используйте два редактора; при наборе формул в формульном редакторе знаки препинания, ограничивающие формулу, набирайте вместе с формулой; для установки размера шрифта никогда не пользуйтесь вкладкой Other..., используйте заводские установки редактора, не подгоняйте размер символов в формулах под размер шрифта в тексте статьи, не растягивайте и не сжимайте мышью формулы, вставленные в текст; в формулах не отделяйте пробелами знаки: + = -.

Для набора формул в Word никогда не используйте Конструктор (на верхней панели: «Работа с формулами» — «Конструктор»), так как этот ресурс предназначен только для внутреннего использования в Word и не поддерживается программами, предназначенными для изготовления оригинал-макета журнала.

При наборе символов в тексте помните, что символы, обозначаемые латинскими буквами, набираются светлым курсивом, русскими и греческими — светлым прямым, векторы и матрицы — прямым полужирным шрифтом.

**Иллюстрации** предоставляются отдельными исходными файлами, поддающимися редактированию:

— рисунки, графики, диаграммы, блок-схемы предоставляйте в виде отдельных исходных файлов, поддающихся редактированию, используя векторные программы: Visio (\*.vsd, \*.vsdx); Coreldraw (\*.cdr); Excel (\*.xls); Word (\*.docx); Adobe Illustrator (\*.ai); AutoCad (\*.dxf); Matlab (\*.ps, \*.pdf или экспорт в формат \*.ai);

— если редактор, в котором Вы изготавливаете рисунок, не позволяет сохранить в векторном формате, используйте функцию экспорта (только по отношению к исходному рисунку), например, в формат \*.ai, \*.esp, \*.wmf, \*.emf, \*.svg;

— фото и растровые — в формате \*.tif, \*.png с максимальным разрешением (не менее 300 pixels/inch).

Наличие подрисовочных подписей обязательно (желательно не повторяющих дословно комментарии к рисункам в тексте статьи).

**В редакцию предоставляются:**

— сведения об авторе (фамилия, имя, отчество, место работы, должность, ученое звание, учебное заведение и год его окончания, ученая степень и год защиты диссертации, область научных интересов, количество научных публикаций, домашний и служебный адреса и телефоны, e-mail), фото авторов: анфас, в темной одежде на белом фоне, должны быть видны плечи и грудь, высокая степень четкости изображения без теней и отблесков на лице, фото можно представить в электронном виде в формате \*.tif, \*.png с максимальным разрешением — не менее 300 pixels/inch при минимальном размере фото 40×55 мм;

— экспертное заключение.

**Список литературы** составляется по порядку ссылок в тексте и оформляется следующим образом:

— для книг и сборников — фамилия и инициалы авторов, полное название книги (сборника), город, издательство, год, общее количество страниц;

— для журнальных статей — фамилия и инициалы авторов, полное название статьи, название журнала, год издания, номер журнала, номера страниц;

— ссылки на иностранную литературу следует давать на языке оригинала без сокращений;

— при использовании web-материалов указывайте адрес сайта и дату обращения.

Список литературы оформляйте двумя отдельными блоками по образцам lit.dot на сайте журнала (<http://i-us.ru/paperrules>): Литература и References.

Более подробно правила подготовки текста с образцами изложены на нашем сайте в разделе «Правила для авторов».

### Контакты

Куда: 190000, Санкт-Петербург,  
Б. Морская ул., д. 67, ГУАП, РИЦ

Кому: Редакция журнала «Информационно-управляющие системы»

Тел.: (812) 494-70-02

Эл. почта: [ius.spb@gmail.com](mailto:ius.spb@gmail.com)

Сайт: [www.i-us.ru](http://www.i-us.ru)

УДК 519.72

doi:10.31799/1684-8853-2019-1-40-47

## Компактная спецификация полярных кодов

Р. А. Морозов<sup>а</sup>, инженер-исследователь, [orcid.org/0000-0003-0077-1246](https://orcid.org/0000-0003-0077-1246)

П. В. Трифонов<sup>а</sup>, доктор техн. наук, доцент, [orcid.org/0000-0001-6960-0942](https://orcid.org/0000-0001-6960-0942), [petert@dcn.icc.spbstu.ru](mailto:petert@dcn.icc.spbstu.ru)

<sup>а</sup>Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Политехническая ул., 29, Санкт-Петербург, 195251, РФ

**Постановка проблемы:** для практической реализации системы связи, использующей семейство полярных кодов, требуется либо хранить множество достаточно объемных спецификаций, либо строить коды по запросу. Первый подход требует большого количества памяти, что делает схему непрактичной для многих приложений, например для мобильных устройств. Недостатки второго подхода – уязвимость к численным проблемам и сложность аппаратной реализации. Одним из решений является задание семейства кодов последовательностью подканалов, отсортированных по надежности. Однако данное решение приводит к невозможности оптимизировать каждый код семейства по отдельности. **Цель:** разработка метода компактного задания полярных кодов и подкодов. **Результаты:** предложен метод компактной спецификации полярных кодов. Его можно рассматривать как компромисс между построением кодов в реальном времени и хранением полного описания кодов в памяти. Предлагается хранить компактные спецификации заранее построенных кодов, содержащие разности между замороженным множеством оригинального кода и кода, построенного для двоичного стирающего канала с некоторой вероятностью стирания. Полная спецификация, необходимая алгоритму декодирования, может быть получена из компактной с помощью процедуры, имеющей низкую сложность и использующей только простые в аппаратной реализации операции умножения и сложения. Предлагаемый метод работает как с полярными кодами, так и с полярными подкодами и позволяет снизить количество требуемой памяти в 15–50 раз. **Практическая значимость:** возможность использовать семейства оптимизированных по отдельности полярных кодов в устройствах с ограниченным объемом памяти.

**Ключевые слова** – компактная спецификация, полярные коды, полярные подкоды, двоичный стирающий канал.

Для цитирования: Морозов Р. А., Трифонов П. В. Компактная спецификация полярных кодов. *Информационно-управляющие системы*, 2019, № 1, с. 40–47. doi:10.31799/1684-8853-2019-1-40-47

For citation: Morozov R. A., Trifonov P. V. Compact specification of polar codes. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2019, no. 1, pp. 40–47 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2019-1-40-47

### Введение

Полярные коды [1, 2] — первый класс кодов, достигающих пропускной способности широкого класса каналов [3] с низкой сложностью построения, кодирования и декодирования. Полярные коды приняты в качестве стандарта для контрольного канала в сетях 5G [4].

Классический  $(n = 2^m, k)$ -полярный код задается множеством из  $(n - k)$  индексов замороженных символов, которые обычно выбираются как индексы наименее надежных подканалов. Надежность подканала может характеризоваться его пропускной способностью, параметром Бхаттачарьи или вероятностью ошибки на бит. Для вычисления параметра Бхаттачарьи битовых подканалов в случае двоичного стирающего канала (ДСтК) существуют очень простые рекурсивные выражения. В общем случае для вычисления надежности битовых подканалов может быть использован метод Тала и Варди [5]. Приближенные методы предложены для случаев канала с аддитивным белым гауссовым шумом (АБГШ) [6] и канала с рэлеевскими замираниями [7]. В работе [8] показано, что вероятность ошиб-

ки декодирования всех этих конструкций полярных кодов примерно равна.

Надежность подканалов может быть вычислена со сложностью  $O(n)$  операций. Однако эти операции могут быть сложны в аппаратной реализации. Например, метод Тала и Варди требует дискретизации распределения вероятности логарифмических отношений правдоподобия с малым шагом, а также сложных преобразований этих распределений. Аппроксимации, предложенные в работах [6, 7], используют трансцендентные функции.

Практическая реализация системы связи, использующей семейство полярных кодов, требует либо хранения множества спецификаций, длина которых может быть большой, либо построения кодов по запросу, «на лету». Первый подход ведет к потреблению большого количества памяти, что неприменимо для многих приложений, например для мобильных устройств. Второй подход численно не устойчив и очень сложен для аппаратной реализации.

В этой работе предложен метод компактной спецификации полярных кодов. Предлагаемый подход можно рассматривать как компромисс

между хранением заранее построенных полных спецификаций кодов и построением кодов на лету. Предлагается хранить компактные спецификации, которые содержат разность между оригинальным множеством замороженных символов и множеством замороженных символов для некоторого кода, построенного для ДСтК, а также параметры ДСтК. Полная спецификация может быть восстановлена из компактной с помощью простой процедуры, не использующей трансцендентные функции.

### Построение полярного кода для двоичного стирающего канала

#### Определение полярных кодов

Полярный  $(n = 2^m, k)$ -код определяется как множество векторов из  $\mathbb{F}_2^n$  вида  $\mathbf{c}_0^{n-1} = \mathbf{u}_0^{n-1} \mathbf{A}_m$ , где  $\mathbf{A}_m = \mathbf{F}^{\otimes m}$  —  $m$ -я степень Кронекера матрицы

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{u}_0^{n-1} \in \mathbb{F}_2^n \text{ — двоичный вектор длины}$$

$n$ , состоящий из двух частей: для всех  $i \in \mathcal{F} \subset [n]$  полагается  $u_i = 0$ , а для всех  $i \in \mathcal{J} = [n] \setminus \mathcal{F}$  значения  $u_i$  содержат биты исходных данных, где  $|\mathcal{J}| = n - |\mathcal{F}|$ . Здесь и в дальнейшем  $[n] = \{0, 1, \dots, n-1\}$ , а краткая запись  $\mathbf{a}_b^c$  обозначает вектор  $(a_b, a_{b+1}, \dots, a_c)$ . В случае когда  $c < b$ , запись  $\mathbf{a}_b^c$  обозначает пустой вектор. Множество  $\mathcal{F}$  назовем замороженным множеством, а множество  $\mathcal{J}$  — информационным множеством. Соответственно, символы  $u_i, i \in \mathcal{F}$  будем называть замороженными символами, а символы  $u_i, i \in \mathcal{J}$  — информационными символами. Множество  $\mathcal{F}$  предполагается известным приемнику.

#### Подканалы поляризирующего преобразования

Рассмотрим передачу кодового слова полярного кода  $\mathbf{c}_0^{n-1} = \mathbf{u}_0^{n-1} \mathbf{A}_m$  по симметричному по выходу каналу без памяти с двоичным входом  $W: \mathbb{F}_2 \rightarrow \mathcal{Y}$ . Вектор на выходе канала передачи данных  $\mathbf{y}_0^{n-1}$  будем называть принятым сигналом. Канал  $W$  задан величинами  $W(y|x) \in \mathbb{R}_+$ , имеющими смысл вероятности при конечном или счетном множестве  $\mathcal{Y}$  или плотности вероятности в случае, когда  $\mathcal{Y}$  несчетно. После приема сигнала  $\mathbf{y}_0^{n-1}$  демодулятором вычисляются апостериорные вероятности

$$W(c_i | y_i) = \frac{W(y_i | c_i)}{W(y_i | 0) + W(y_i | 1)}.$$

Для вычисления данных величин предполагается, что демодулятору известен исходный канал. Алгоритм декодирования методом последовательного исключения состоит в последовательном вычислении величин

$$W_m^{(\phi)}(\mathbf{u}_0^{\phi-1}, u_\phi | \mathbf{y}_0^{n-1}) = \sum_{\mathbf{u}_{\phi+1}^{n-1} \in \mathbb{F}_2^{n-\phi-1}} W^n(\mathbf{u}_0^{n-1} \mathbf{A}_m | \mathbf{y}_0^{n-1})$$

для каждого  $u_\phi \in \mathbb{F}_2$ , где

$$W^n(\mathbf{c}_0^{n-1} | \mathbf{y}_0^{n-1}) = \prod_{i=0}^{n-1} W(c_i | y_i),$$

и принятии решения

$$\hat{u}_\phi = \begin{cases} 0, & \phi \in \mathcal{F} \\ \arg \max_{u_\phi \in \mathbb{F}_2} W_m^{(\phi)}(\hat{\mathbf{u}}_0^{\phi-1}, u_\phi | \mathbf{y}_0^{n-1}), & \phi \in \mathcal{J}. \end{cases}$$

Таким образом,  $n$  копий исходного канала передачи данных  $W$  преобразуются в  $n$  различных синтезированных каналов  $W_m^{(\phi)}(\mathbf{u}_0^\phi | \mathbf{y}_0^{n-1})$  для  $\phi \in [n]$ , которые также в дальнейшем будут именовать подканалами поляризирующего преобразования или просто подканалами.

Показано [9–11], что множество синтезированных подканалов частично упорядочено по надежности независимо от исходного канала. Следовательно, множества замороженных символов полярных кодов с одинаковыми параметрами, построенных для разных каналов, будут схожи.

Для выходов подканалов справедливы рекурсивные формулы

$$\begin{aligned} W_N^{(2i)}(\mathbf{u}_0^{2i} | \mathbf{y}_0^{N-1}) &= \\ &= \sum_{u_{2i+1} \in \mathbb{F}_2} W_{N/2}^{(i)}(\mathbf{u}_{0,e}^{2i+1} + \mathbf{u}_{0,o}^{2i+1} | \mathbf{y}_0^{N/2-1}) \times \\ &\quad \times W_{N/2}^{(i)}(\mathbf{u}_{0,o}^{2i+1} | \mathbf{y}_{N/2}^{N-1}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_N^{(2i+1)}(\mathbf{u}_0^{2i+1} | \mathbf{y}_0^{N-1}) &= \\ &= W_{N/2}^{(i)}(\mathbf{u}_{0,e}^{2i+1} + \mathbf{u}_{0,o}^{2i+1} | \mathbf{y}_0^{N/2-1}) W_{N/2}^{(i)}(\mathbf{u}_{0,o}^{2i+1} | \mathbf{y}_{N/2}^{N-1}), \end{aligned}$$

где  $\mathbf{a}_{b,e}^c$  ( $\mathbf{a}_{b,o}^c$ ) — вектор, состоящий из элементов вектора  $\mathbf{a}$  с четными (нечетными) индексами  $i$ :  $b \leq i \leq c$ .

#### Построение полярных кодов для двоичного стирающего канала

Пусть  $W$  — ДСтК с вероятностью стирания  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon < 1$ , заданный переходными вероятностями  $W(x|x) = 1 - \varepsilon$ ,  $W(\theta|x) = \varepsilon$ , где  $\theta$  — символ стирания. Заметим, что в этом случае все подканалы  $W_\lambda^{(i)}$  также являются ДСтК. Обозначим под  $\varepsilon_\lambda^{(i)}$  вероятность стирания в канале  $W_\lambda^{(i)}$ . Тогда справедливо

$$\varepsilon_\lambda^{(2i)} = \varepsilon_{\lambda-1}^{(i)} (2 - \varepsilon_{\lambda-1}^{(i)}); \quad \varepsilon_\lambda^{(2i+1)} = \varepsilon_{\lambda-1}^{(i) 2}.$$

При построении полярных кодов для ДСтК в качестве информационного множества  $\mathcal{I}$  выбираются  $k$  индексов подканалов  $W_m^{(i)}$  с наименьшей вероятностью стирания  $\varepsilon_m^{(i)}$ .

### Полярные подкоды

Полярные подкоды [12] — обобщение полярных кодов. Полярный  $(n = 2^m, k)$ -подкод определяется как множество векторов  $\mathbf{c}_0^{n-1} = \mathbf{u}_0^{n-1} \mathbf{A}_m$  таких, что вектор  $\mathbf{u}$  удовлетворяет ограничениям замораживания  $\mathbf{u}_0^{n-1} \mathbf{V}^T = \mathbf{0}$ , где  $\mathbf{V}$  —  $(n - k) \times n$ -матрица ограничений полного ранга. Пусть  $t_i$  — позиция последнего ненулевого элемента  $i$ -й строки матрицы  $\mathbf{V}$ . Без потери общности можно предположить, что все  $t_i$  различны. Тогда

$$u_{t_i} = \sum_{j=0}^{t_i-1} V_{i,j} u_j, \quad t_i \in \mathcal{F}, \quad |\mathcal{F}| = n - k. \quad (1)$$

Множество  $\mathcal{F}$  замороженных символов разбивается на два множества  $\mathcal{F} = \mathcal{S} \cup \mathcal{T}$ , где  $\mathcal{S}$  состоит из всех номеров  $t_i$ , для которых вес  $i$ -й строки матрицы  $\mathbf{V}$  равен единице, а  $\mathcal{T}$  состоит из всех  $t_i$ , для которых вес  $i$ -й строки матрицы  $\mathbf{V}$  больше единицы. Множество  $\mathcal{S}$  будем называть статически замороженным, как и символы  $u_i$ ,  $i \in \mathcal{S}$ , а множество  $\mathcal{T}$  будем называть динамически замороженным. Заметим, что полярные коды являются полярными подкодами без динамически замороженных символов, т. е. при  $\mathcal{T} = \emptyset$   $\mathcal{F} = \mathcal{S}$ .

### Компактная спецификация

#### Аппроксимация замороженного множества

Пусть дан  $(n = 2^m, k)$ -полярный код с замороженным множеством  $\mathcal{F}$ . Предлагается найти полярный код, построенный для ДСтК с почти таким же замороженным множеством  $\mathcal{B}_{\mathcal{F}} = \mathcal{B}_{\varepsilon^*, f^*}^{(m)}$ , которое назовем ДСтК-аппроксимацией множества  $\mathcal{F}$ , где

$$(\varepsilon^*, f^*) = \arg \min_{\substack{0 < \varepsilon < 1 \\ 0 \leq f < n}} |\mathcal{F} \Delta \mathcal{B}_{\varepsilon, f}^{(m)}|, \quad (2)$$

$\mathcal{B}_{\varepsilon, f}^{(m)}$  — замороженное множество  $(2^m, 2^m - f)$  полярного кода, построенного, как описано выше. Тогда данный полярный код может быть задан четверкой  $S(m, \mathcal{F}) = (m, \varepsilon^*, f^*, \mathcal{F} \Delta \mathcal{B}_{\mathcal{F}})$ .

Псевдокод построения ДСтК-аппроксимации представлен на рис. 1. Для упрощения реализации предлагается оптимизировать  $|\mathcal{F} \Delta \mathcal{B}_{\varepsilon, f}^{(m)}|$  не по всем значениям  $\varepsilon \in (0, 1)$ , а по значениям из конечного множества  $\mathcal{E}$ . Для каждого  $\varepsilon \in \mathcal{E}$  алгоритм

```

Вход :  $m, \mathcal{F}$ 
Выход: ДСтК-аппроксимация замороженного множества  $\mathcal{F}$ 
 $D \leftarrow \mathcal{F}, \varepsilon^* \leftarrow 0, f^* \leftarrow 0$ 
for  $\varepsilon \in \mathcal{E}$  do
     $\varepsilon_{0,0} \leftarrow \varepsilon$ 
    for  $\lambda \leftarrow 0 \dots m - 1$  do
        for  $i \leftarrow 0 \dots 2^\lambda - 1$  do
             $\varepsilon_{\lambda+1}^{(2i)} \leftarrow \varepsilon_\lambda^{(i)} \cdot (2 - \varepsilon_\lambda^{(i)})$ 
             $\varepsilon_{\lambda+1}^{(2i+1)} \leftarrow \varepsilon_\lambda^{(i)^2}$ 
        end for
         $\Pi \leftarrow (\varepsilon_{m,i}, i)_{i=0}^{2^m-1}$ 
        отсортировать  $\Pi$  по  $\varepsilon_{m,i}$  в убывающем порядке
         $\delta \leftarrow |\mathcal{F}|$ 
        for  $f = 1, \dots, 2^m$  do
            if  $\Pi_{f-1}[1] \notin \mathcal{F}$  then  $\delta \leftarrow \delta + 1$  else  $\delta \leftarrow \delta - 1$ ;
            if  $\delta < |D|$  then
                 $D \leftarrow \mathcal{F} \Delta \{\Pi_i[1] \mid 0 \leq i < f\}$ 
                 $\varepsilon^* \leftarrow \varepsilon, f^* \leftarrow f$ 
            end if
        end for
    end for
return :  $(m, \varepsilon^*, f^*, D)$ 
    
```

- **Рис. 1.** Вычисление ДСтК-аппроксимации  $S(m, \mathcal{F})$
- **Fig. 1.** Computing BEC-approximation  $S(m, \mathcal{F})$  of a frozen set

находит вероятности стирания  $\varepsilon_m^{(i)}$  в подканалах и сортирует подканалы по вероятности стирания в убывающем порядке. Таким образом, для любого  $f \in [n]$  множество  $\mathcal{B}_{\varepsilon, f}^{(m)}$  может быть получено как  $f$  первых элементов отсортированного массива  $\Pi_i[1]$ ,  $i = 0, \dots, f - 1$ . Для каждого  $f \in [n]$  вычисляется мощность симметрической разности исходного замороженного множества  $\mathcal{F}$  и аппроксимирующего множества  $\mathcal{B}_{\varepsilon, f}^{(m)}$ . Алгоритм возвращает четверку  $(m, \varepsilon^*, f^*, D)$ , соответствующую минимуму величины  $|D| = |\mathcal{F} \Delta \mathcal{B}_{\varepsilon, f}^{(m)}|$ .

Для упрощения реализации можно заменить строку  $\varepsilon_{\lambda+1}^{(2i)} \leftarrow \varepsilon_\lambda^{(i)} \cdot (2 - \varepsilon_\lambda^{(i)})$  псевдокода на рис. 1 на

$$\varepsilon_{\lambda+1}^{(2i)} \leftarrow 2\varepsilon_\lambda^{(i)}, \quad (3)$$

а также заменить вероятности  $\varepsilon_\lambda^{(i)}$  на их логарифмы. Тогда алгоритм построения ДСтК-аппроксимации будет использовать только операции сложения. Эксперименты показывают, что замена (3) практически не влияет на итоговый размер спецификации, но зато делает возможным переход в логарифмическую область, что позволяет избежать операций умножения и численно неустойчивых операций вычитания.

### Рекурсивная спецификация

Предлагается использовать представление полярных кодов как обобщенных каскадных кодов (ОКК) для дальнейшего уменьшения размера получаемой спецификации следующим образом.

Обобщенный каскадный код [13, 14] над полем  $\mathbb{F}_2$  может быть определен следующей опера-

цией кодирования. Пусть  $\mathbb{A}^{(0)}, \mathbb{A}^{(1)}, \dots, \mathbb{A}^{(N-1)}$  — последовательность  $(n, k_j)$ -внешних кодов над  $\mathbb{F}_2$ ,  $0 \leq k_j \leq n$ . Пусть  $\mathbb{B}^{(0)} \supset \mathbb{B}^{(1)} \supset \dots \supset \mathbb{B}^{(N-1)}$  — последовательность вложенных внутренних кодов над  $\mathbb{F}_2$  с параметрами  $(N, K_j = N - j)$  такая, что порождающая матрица кода  $\mathbb{B}^{(j)}$  состоит из  $K_j$  последних строк некоторой матрицы  $\mathbf{G}$ .

Заданный блок данных  $\mathbf{a}_0^{k-1}$  размера  $k = \sum_{i=0}^{N-1} k_i$  кодируется внешними кодами. В результате получается  $N$  кодовых слов длины  $n$ . Запишем их построчно в таблицу и закодируем каждый из  $n$  столбцов кодом  $\mathbb{B}^{(0)}$ . Тогда полученные  $Nn$  бит формируют кодовое слово  $(Nn, k)$ -ОКК.

Разобьем исходное замороженное множество  $\mathcal{F}$  на два подмножества  $\mathcal{F}_l = \{i \in \mathcal{F} \mid i < 2^{m-1}\}$  и  $\mathcal{F}_r = \{i - 2^{m-1} \mid i \in \mathcal{F} \wedge i \geq 2^{m-1}\}$ . Заметим, что исходный полярный код можно представить как ОКК с двумя внешними полярными кодами длины  $2^{m-1}$  с замороженными множествами  $\mathcal{F}_l$  и  $\mathcal{F}_r$  и внутренним полярным кодом длины 2.

Рекурсивная спецификация строится следующим образом. Сначала вычисляется спецификация  $S(m, \mathcal{F})$ , как показано на рис. 1. Затем вычисляются спецификации внешних кодов  $S(m-1, \mathcal{F}_l)$  и  $S(m-1, \mathcal{F}_r)$ . Если конкатенация двух спецификаций  $S(m-1, \mathcal{F}_l)S(m-1, \mathcal{F}_r)$  короче, чем  $S(m, \mathcal{F})$ , то исходный код может быть задан в более компактном виде. В некоторых случаях дальнейшее разбиение замороженных множеств внешних полярных кодов приводит к еще более компактной спецификации.

В алгоритме построения компактной спецификации полярного кода (рис. 2)  $\|S\|$  обозначает длину спецификации  $S = (m, \varepsilon^*, f^*, D)$ , определяемую как  $\|S\| = \|(m, \varepsilon^*, f^*, D)\| = |D| + 4$ . Действительно, чтобы обеспечить однозначное восстановление кода, необходимо хранить значения  $m, \varepsilon^*, f^*, |D|$  и элементы множества  $D$ . Длина конкатенации двух спецификаций равна  $\|S'.S''\| = \|S'\| + \|S''\|$ . Заметим, что для определения

конца спецификации (в общем случае составленной из спецификаций нескольких замороженных множеств) необходимо в начале компактной спецификации указать длину кода.

### Границы на значение $|D|$

Для полярных кодов было показано, что множество подканалов поляризующего преобразования частично упорядочено по пропускной способности, что позволяет получить некоторые из элементов замороженного множества независимо от канала, для которого был построен полярный код. В теореме 1 статьи [9] была определена верхняя граница на число неизвестных (зависящих от исходного канала передачи данных) элементов замороженного множества  $\mathcal{F}$ , равная  $U(m) = M(m) \log(2^{m+1}/M(m))$ , где  $M(m)$  — максимальное число подмножеств с одинаковой суммой элементов (целочисленная последовательность номер A025591 в [15]). Асимптотически  $U(m) = O(n \log \log n / \log^{3/2} n)$ . Можно рассматривать  $U(m)$  как верхнюю границу на длину компактной спецификации. Действительно, в худшем случае все подканалы, которые не являются всегда замороженными или информационными вне зависимости от исходного канала, меняют свой статус при переходе от ДСтК-аппроксимации к исходному полярному коду, т. е.  $|D| \leq U(m)$ . Такой случай недостижим на практике, так как при построении ДСтК-аппроксимации выбирается ДСтК, минимизирующий  $|D|$ . Результаты на рис. 3 показывают, что для  $m = 5 \dots 15$  данная оценка неточная.

### Спецификация полярных подкодов

Хорошие полярные подкоды [16–18], как правило, имеют относительно небольшое число динамически замороженных символов, т. е. символов  $u_{t_i}, t_i \in \mathcal{T}$ .

Пусть  $\tilde{\mathbf{V}}$  — матрица, состоящая из строк матрицы  $\mathbf{V}$ , определенной в (1), веса не менее двух.

**Вход :**  $m, \mathcal{F}$

**Выход:** Компактная спецификация полярного кода длины  $2^m$  с замороженным множеством  $\mathcal{F}$

```

if  $m \leq 1$  then
  return :  $S(m, \mathcal{F})$ 
 $S_l \leftarrow S(m, \mathcal{F})$ 
 $s_l \leftarrow S(m-1, \mathcal{F}_l)$ 
 $s_r \leftarrow S(m-1, \mathcal{F}_r)$ 
if  $\|s_l.s_r\| < \|S_l\|$  then
  return :  $S^*(m-1, \mathcal{F}_l).S^*(m-1, \mathcal{F}_r)$ 
else
  return :  $S_l$ 
    
```

- **Рис. 2.** Компактная спецификация полярного кода
- **Fig. 2.** Compact specification of a polar code

Матрица  $\tilde{\mathbf{V}}$  обычно разреженная. Тривиальный метод описания матрицы  $\tilde{\mathbf{V}}$  — указать для каждой строки число ненулевых элементов и их позиции. Однако для хороших полярных подкодов множества индексов ненулевых элементов для разных строк обычно имеют общие элементы. Поэтому предлагается представить матрицу  $\tilde{\mathbf{V}}$  списком индексов ненулевых столбцов в совокупности со списком битовых масок, соответствующих ненулевым столбцам. Оставшиеся строки могут быть заданы элементами множества  $\mathcal{S}$ . Множество таких значений может быть задано с помощью рекурсивной компактной спецификации.

**Пример.** Рассмотрим (16, 6, 6)-полярный подкод расширенного кода БЧХ [19, 20] с матрицей ограничений

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{V}} \\ \tilde{\mathbf{V}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1000000000000000 \\ 0100000000000000 \\ 0010000000000000 \\ 0001000000000000 \\ 0000100000000000 \\ 0000001000000000 \\ 0000000010000000 \\ 0000000001000000 \\ 0000000000100000 \\ 0000000000010100 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, множество статически замороженных символов равно  $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, 3, 4, 6, 8\}$ . Ограничения динамического замораживания следующие:  $u_9 = u_5$ ,  $u_{10} = u_5$ ,  $u_{12} = u_{10}$ .

Спецификация статически замороженного множества для  $\mathcal{E} = \{i/32\}_{i=1}^{31}$  выглядит следующим образом:

$$S(4, \mathcal{S}) = \left( m = 4, \varepsilon^* = \frac{1}{32}, f^* = 6, D = \{6\} \right),$$

ее длина равна  $\|S(4, \mathcal{F}^{(s)})\| = 5$ . Множество ненулевых столбцов матрицы  $\tilde{\mathbf{V}}$  составляет  $N = \{5, 9, 10, 12\}$ . Соответствующие битовые маски равны

$$B = [011_2, 001_2, 110_2, 100_2] = [3, 1, 6, 4].$$

Таким образом, компактная спецификация полярного кода имеет вид

$$\underbrace{16}_n, \underbrace{4}_m, \underbrace{0.03125}_\varepsilon^*, \underbrace{6}_f^*, \underbrace{1}_D, \underbrace{6}_D, \underbrace{4}_N, \underbrace{5, 9, 10, 12}_N, \underbrace{3, 1, 6, 4}_B.$$

Спецификация содержит 15 целых чисел (вместо дроби  $\varepsilon^* = \frac{1}{32}$  можно хранить ее числитель).

Все числа по порядку не превосходят длины кода, а элементы множества  $B$  находятся в диапазоне до  $2^{|N|} = 8$ . Развернутая спецификация имеет размер 19 целых чисел и включает в себя числа  $n, k, |\mathcal{S}|$ , множество  $\mathcal{S}$ , веса строк матрицы  $\tilde{\mathbf{V}}$  и индексы ненулевых элементов строк матрицы  $\tilde{\mathbf{V}}$ . Веса строк нужны для обнаружения конца одного ограничения и начала другого.

### Развертывание компактной спецификации

Рассмотрим процедуру развертывания компактной спецификации как алгоритм, принимающий на вход компактную спецификацию и возвращающий матрицу ограничений  $\mathbf{V}$ .

Сначала вычисляется матрица  $\hat{\mathbf{V}}$  следующим образом.

1. Считывается длина кода  $n$ .
2. Пока общая длина обработанных внешних кодов  $n_i = \sum_{j=0}^{i-1} 2^{m_j} < n$ , считывается  $S_i = (m_i, p_i, f_i, D_i)$ . Восстанавливается множество  $\mathcal{S}_i$  статически замороженных символов:

$$\mathcal{S}_i = \left\{ j + n_i \mid j \in \mathcal{B}_{p_i, f_i}^{(m_i)} \Delta D_i \right\}.$$

Множество  $\mathcal{B}_{p_i, f_i}^{(m_i)}$  вычисляется по значениям  $m_i, p_i, f_i$  как  $\{P_j[0] \mid j = 0, \dots, f_i - 1\}$ , где  $P_j$  вычисляется, как показано на рис. 2.

3. Статически замороженное множество вычисляется как  $\mathcal{S} = \cup_i \mathcal{S}_i$ . Матрица  $\hat{\mathbf{V}}$  представляет собой строки единичной матрицы  $I_n$  с номерами из  $\mathcal{S}$ .

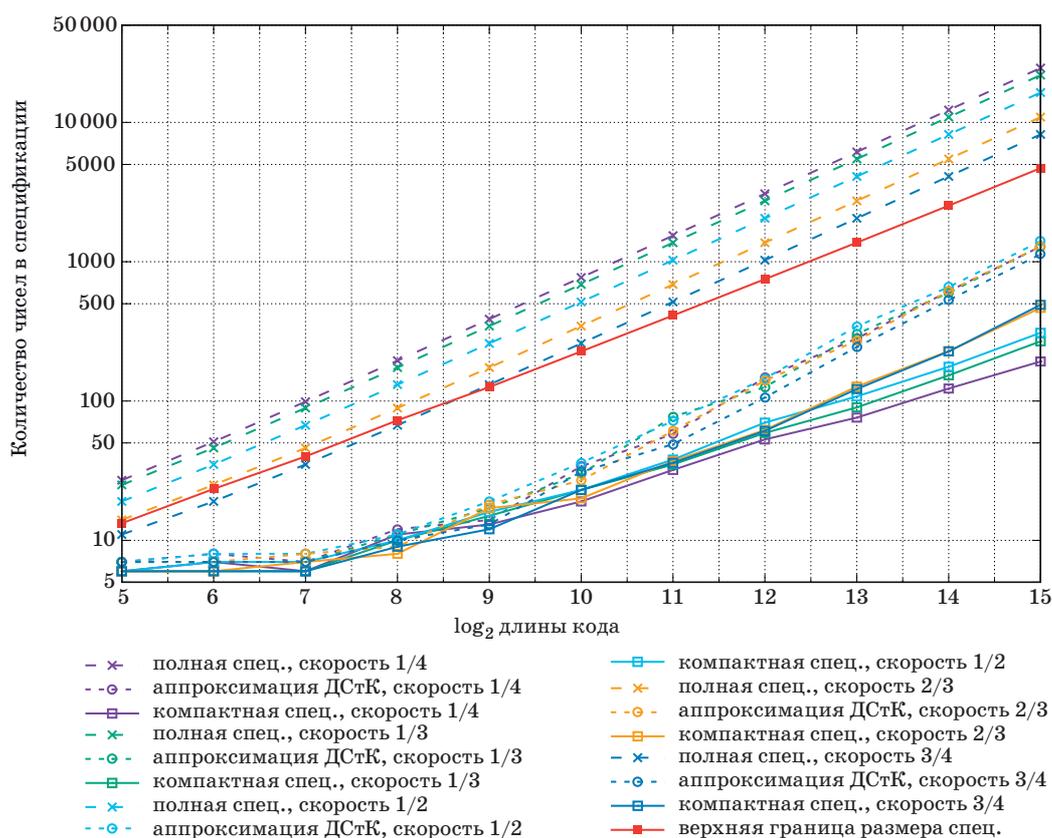
Затем считываются битовые маски и по ним вычисляется матрица ограничений динамического замораживания  $\tilde{\mathbf{V}}$ . Общая матрица ограничений полярного подкода выражается в виде

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{V}} \\ \tilde{\mathbf{V}} \end{pmatrix}.$$

### Численные результаты

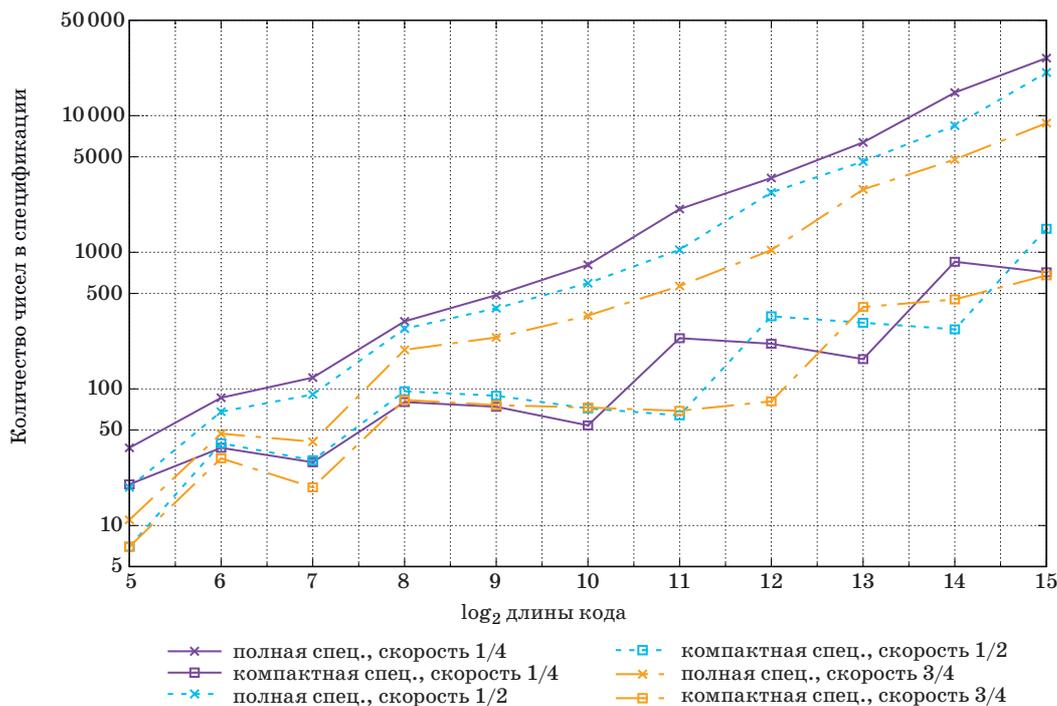
Компактные спецификации были построены для двух семейств полярных кодов с использованием аппроксимации (3).

Первое семейство состоит из 55 полярных кодов длин  $2^m$ ,  $5 \leq m \leq 15$  и скоростей  $r_0 = \frac{1}{4}$ ,  $r_1 = \frac{1}{3}$ ,  $r_2 = \frac{1}{2}$ ,  $r_3 = \frac{2}{3}$ ,  $r_4 = \frac{3}{4}$ . Коды были построены с помощью гауссовской аппроксимации для значений отношения сигнал/шум на бит  $E_b/N_0$ , вычисленных по формуле  $\eta_i = 1 + 0,5i$  дБ. Общий размер полных спецификаций 163 936 целочисленных значений, а общий размер компактных спецификаций 4016 целочисленных значений, что примерно в 41 раз меньше. На рис. 3 дано сравнение размера полных спецификаций, ДСтК-аппроксимаций и компактных спецификаций кодов различной



■ **Рис. 3.** Размер полных и компактных спецификаций (ДСтК-аппроксимации и рекурсивной спецификации) полярных кодов

■ **Fig. 3.** Comparison of the size of straightforward specification, BEC-approximation and recursive compact specification, of polar codes



■ **Рис. 4.** Размер полных и компактных спецификаций полярных подкодов

■ **Fig. 4.** The size of straightforward and compact specifications of polar subcodes

длины. Можно видеть, что ДСтК-аппроксимация позволяет снизить объем потребляемой памяти в 10 раз. Компактная спецификация позволяет снизить объем потребляемой памяти еще до 5 раз. Второе семейство состоит из полярных подкодов кодов БЧХ [12] тех же длин и скоростей, что и первое семейство. Конструктивное минимальное расстояние соответствующих кодов БЧХ выбрано как наименьшее минимальное расстояние, приводящее к появлению нетривиальных ограничений динамического замораживания (непустой матрице  $\tilde{\mathbf{V}}$ ). Битовые маски таких кодов могут быть представлены как 16-битовые целые. Полные спецификации содержат 182 308 целых чисел, компактные спецификации содержат 10 582 целых числа, что примерно в 17 раз меньше. На рис. 4 представлено сравнение размеров полных и компактных спецификаций полярных подкодов. Во

всех рассмотренных случаях минимизация в (2) происходила по множеству вероятностей стирания

$$\mathcal{E} = \left\{ \frac{i}{32} \mid 1 \leq i \leq 31 \right\}.$$

## Заключение

В данной статье предложен метод компактной спецификации полярных (под)кодов. Метод использует сходство множеств замороженных символов полярных кодов, построенных для различных каналов, а также представление полярных кодов как обобщенных каскадных. Размер компактной спецификации на порядок меньше размера полной спецификации, что позволяет описывать большие семейства полярных кодов, используя небольшой объем памяти.

## Литература

1. **Arikan E.** Channel polarization: A method for constructing capacity achieving codes for symmetric binary-input memoryless channels. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2009, vol. 55, no. 7, pp. 3051–3073. doi:10.1109/TIT.2009.2021379
2. **Arikan E.** Serially concatenated polar codes. *IEEE Access*, 2018, vol. 6, pp. 64549–64555. doi:10.1109/ACCESS.2018.2877720
3. **Sasoglu E., Telatar E., Arikan E.** Polarization for arbitrary discrete memoryless channels. *Proc. of IEEE Information Theory Workshop*, 2009, pp. 144–148.
4. **Hui D., Sandberg S., Blankenship Y., Andersson M., Grosjean L.** Channel coding in 5G new radio: Tutorial overview and performance comparison with 4G LTE. *IEEE Vehicular Technology Magazine*, 2018, pp. 60–69. doi:10.21227/dq3x-8a54
5. **Tal I., Vardy A.** How to construct polar codes. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2013, vol. 59, pp. 6562–6582. doi:10.1109/TIT.2013.2272694
6. **Trifonov P. V.** Efficient design and decoding of polar codes. *IEEE Transactions on Communications*, 2012, vol. 60, pp. 3221–3227. doi:10.1109/TCOMM.2012.081512.110872
7. **Trifonov P. V.** Design of polar codes for Rayleigh fading channel. *Proc. of Intern. Symp. on Wireless Communication Systems*, 2015, pp. 331–335. doi:10.1109/ISWCS.2015.7454357
8. **Vangala H., Viterbo E., Hong Y.** A comparative study of polar code constructions for the AWGN channel. *CoRR*, 2015, vol. abs/1501.02473.
9. **Mondelli M., Hassani H., Urbanke R. L.** Construction of polar codes with sublinear complexity. *Proc. of IEEE Intern. Symp. on Information Theory*, 2017, pp. 1853–1857.
10. **Schurich C.** A partial order for the synthesized channels of a polar code. *Proc. of IEEE Intern. Symp. on Information Theory*, 2016, pp. 220–224. doi:10.1109/ISIT.2016.7541293
11. **Bardet M., Dragoi V., Otmani A., Tillich J.-P.** Algebraic properties of polar codes from a new polynomial formalism. *Proc. of IEEE Intern. Symp. on Information Theory*, 2016, pp. 230–234. doi:10.1109/ISIT.2016.7541295
12. **Trifonov P. V., Miloslavskaya V. D.** Polar subcodes. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 2016, vol. 34, pp. 254–266. doi:10.1109/JSAC.2015.2504269
13. **Blokh E. L., Zyablov V. V.** Coding of generalized concatenated codes. *Problems of Information Transmission*, 1974, vol. 10, no. 3, pp. 45–50.
14. **Zyablov V. V., Shavgulidze S. A., Bossert M.** An introduction to generalized concatenated codes. *European Transactions on Telecommunications*, 1999, vol. 10, no. 6, pp. 609–622.
15. **Sloane N. J. A.** *The on-line encyclopedia of integer sequences*. Available at: <https://oeis.org/> (accessed 22 December 2018).
16. **Trifonov P. V., Trofimiuk G. A.** A randomized construction of polar subcodes. *Proc. of IEEE Intern. Symp. on Information Theory*, 2017, pp. 1863–1867.
17. **Trifonov P. V.** Randomized chained polar subcodes. *Proc. of IEEE Wireless Communications and Networking Conf. Workshops*, 2018, pp. 292–297. doi:10.1109/WCNCW.2018.8369001
18. **Wang T., Qu D., Jiang T.** Parity-check-concatenated polar codes. *IEEE Communications Letters*, 2016, vol. 20, pp. 2342–2345. doi:10.1109/LCOMM.2016.2607169
19. **Bose R. C., Ray-Chaudhuri D. K.** On a class of error correcting binary group codes. *Information and Control*, 1960, vol. 3, pp. 68–79.
20. **Hocquenghem A.** Codes correcteurs d'Erreurs. *Chiffres (Paris)*, 1959, vol. 2, pp. 147–156.

UDC 519.72

doi:10.31799/1684-8853-2019-1-40-47

**Compact specification of polar codes**R. A. Morozov<sup>a</sup>, Engineer-Researcher, orcid.org/0000-0003-0077-1246P. V. Trifonov<sup>a</sup>, Dr. Sc., Tech., Associate Professor, orcid.org/0000-0001-6960-0942, petert@dcn.icc.spbstu.ru<sup>a</sup>Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, 29, Politekhnicheskaya St., 195251, Saint-Petersburg, Russian Federation

**Introduction:** Practical implementation of a communication system which employs a family of polar codes requires either to store a number of large specifications or to construct the codes by request. The first approach assumes extensive memory consumption, which is inappropriate for many applications, such as those for mobile devices. The second approach can be numerically unstable and hard to implement in low-end hardware. One of the solutions is specifying a family of codes by a sequence of subchannels sorted by reliability. However, this solution makes it impossible to separately optimize each code from the family. **Purpose:** Developing a method for compact specifications of polar codes and subcodes. **Results:** A method is proposed for compact specification of polar codes. It can be considered a trade-off between real-time construction and storing full-size specifications in memory. We propose to store compact specifications of polar codes which contain frozen set differences between the original pre-optimized polar codes and the polar codes constructed for a binary erasure channel with some erasure probability. Full-size specification needed for decoding can be restored from a compact one by a low-complexity hardware-friendly procedure. The proposed method can work with either polar codes or polar subcodes, allowing you to reduce the memory consumption by 15–50 times. **Practical relevance:** The method allows you to use families of individually optimized polar codes in devices with limited storage capacity.

**Keywords** — compact specification, polar codes, polar subcodes, binary erasure channel.

**For citation:** Morozov R. A., Trifonov P. V. Compact specification of polar codes. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2019, no. 1, pp. 40–47 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2019-1-40-47

**References**

1. Arikan E. Channel polarization: A method for constructing capacity achieving codes for symmetric binary-input memoryless channels. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2009, vol. 55, no. 7, pp. 3051–3073. doi:10.1109/TIT.2009.2021379
2. Arikan E. Serially concatenated polar codes. *IEEE Access*, 2018, vol. 6, pp. 64549–64555. doi:10.1109/ACCESS.2018.2877720
3. Sasoglu E., Telatar E., Arikan E. Polarization for arbitrary discrete memoryless channels. *Proc. of IEEE Information Theory Workshop*, 2009, pp. 144–148.
4. Hui D., Sandberg S., Blankenship Y., Andersson M., Grosjean L. Channel coding in 5G new radio: Tutorial overview and performance comparison with 4G LTE. *IEEE Vehicular Technology Magazine*, 2018, pp. 60–69. doi:10.21227/dq3x-8a54
5. Tal I., Vardy A. How to construct polar codes. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2013, vol. 59, pp. 6562–6582. doi:10.1109/TIT.2013.2272694
6. Trifonov P. V. Efficient design and decoding of polar codes. *IEEE Transactions on Communications*, 2012, vol. 60, pp. 3221–3227. doi:10.1109/TCOMM.2012.081512.110872
7. Trifonov P. V. Design of polar codes for Rayleigh fading channel. *Proc. of Intern. Symp. on Wireless Communication Systems*, 2015, pp. 331–335. doi:10.1109/ISWCS.2015.7454357
8. Vangala H., Viterbo E., Hong Y. A comparative study of polar code constructions for the AWGN channel. *CoRR*, 2015, vol. abs/1501.02473.
9. Mondelli M., Hassani H., Urbanke R. L. Construction of polar codes with sublinear complexity. *Proc. of IEEE Intern. Symp. on Information Theory*, 2017, pp. 1853–1857.
10. Schurch C. A partial order for the synthesized channels of a polar code. *Proc. of IEEE Intern. Symp. on Information Theory*, 2016, pp. 220–224. doi:10.1109/ISIT.2016.7541293
11. Bardet M., Dragoi V., Otmani A., Tillich J.-P. Algebraic properties of polar codes from a new polynomial formalism. *Proc. of IEEE Intern. Symp. on Information Theory*, 2016, pp. 230–234. doi:10.1109/ISIT.2016.7541295
12. Trifonov P. V., Miloslavskaya V. D. Polar subcodes. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 2016, vol. 34, pp. 254–266. doi:10.1109/JSAC.2015.2504269
13. Blokh E. L., Zyablov V. V. Coding of generalized concatenated codes. *Problems of Information Transmission*, 1974, vol. 10, no. 3, pp. 45–50.
14. Zyablov V. V., Shavgulidze S. A., Bossert M. An introduction to generalized concatenated codes. *European Transactions on Telecommunications*, 1999, vol. 10, no. 6, pp. 609–622.
15. Sloane N. J. A. *The on-line encyclopedia of integer sequences*. Available at: <https://oeis.org/> (accessed 22 December 2018).
16. Trifonov P. V., Trofimiuk G. A. A randomized construction of polar subcodes. *Proc. of IEEE Intern. Symp. on Information Theory*, 2017, pp. 1863–1867.
17. Trifonov P. V. Randomized chained polar subcodes. *Proc. of IEEE Wireless Communications and Networking Conf. Workshops*, 2018, pp. 292–297. doi:10.1109/WCNCW.2018.8369001
18. Wang T., Qu D., Jiang T. Parity-check-concatenated polar codes. *IEEE Communications Letters*, 2016, vol. 20, pp. 2342–2345. doi:10.1109/LCOMM.2016.2607169
19. Bose R. C., Ray-Chaudhuri D. K. On a class of error correcting binary group codes. *Information and Control*, 1960, vol. 3, pp. 68–79.
20. Hocquenghem A. Codes correcteurs d'Erreurs. *Chiffres (Paris)*, 1959, vol. 2, pp. 147–156.

UDC 681.883; 629.35; 681.51; 621.396

doi:10.31799/1684-8853-2019-1-48-56

## Comparative characteristics of anti-collision processing of radio signal from identification tags on surface acoustic waves

A. V. Sorokin<sup>a</sup>, Assistant Professor, [orcid.org/0000-0002-5450-244X](https://orcid.org/0000-0002-5450-244X), [aleksandr.sorokin.v@gmail.com](mailto:aleksandr.sorokin.v@gmail.com)

A. P. Shepeta<sup>a</sup>, Dr. Sc., Tech., Professor, [orcid.org/0000-0003-0179-0166](https://orcid.org/0000-0003-0179-0166)

V. A. Nenashev<sup>a</sup>, PhD, Tech., Associate Professor, [orcid.org/0000-0001-5285-2051](https://orcid.org/0000-0001-5285-2051)

G. M. Wattimena<sup>b</sup>, Lecturer, [orcid.org/0000-0001-9376-4779](https://orcid.org/0000-0001-9376-4779)

<sup>a</sup>Saint-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, 67, B. Morskaya St., 190000, Saint-Petersburg, Russian Federation

<sup>b</sup>Ambon State Polytechnic, Jl. Ir. M. Putuhena, Ambon, Maluku, 16516, Indonesia

**Introduction:** Collision of information signals is a common problem in the measurement of physical magnitudes, such as temperature, pressure, stress, etc., with acoustic-electronic sensors. This problem is caused by overlapping response signals in the time domain, which makes it difficult to interpret correctly the device identification codes or the sensor data received. **Purpose:** Analysis of anti-collision algorithms for radio-frequency tag code detection and identification by response information signals from acoustic-electronic devices which use the methods of time, frequency and frequency-time division of the response radio signals. **Methods:** Probabilistic methods for calculating the parameters of digital detectors of radio pulse bursts with given false alarm values and gaussian white noise background; individual code group identification methods when studying the attenuation of acoustic-electric signal during their propagation in the tag substrate, taking into account the dependence of the attenuation on the tag topology. **Results:** We have derived analytical expressions to calculate the probability of the correct identification of each tag, taking into account the dependence on tag topology, attenuation characteristics, the anti-collision signal processing methods and the signal-to-noise ratios. Curves which allow you to compare the advantages and disadvantages of the considered anti-collision signal processing methods are calculated and shown in the article. The analysis of the graphic charts demonstrating the correct identification probability has shown that identification tags with frequency-time coding have better ratios as compared to frequency or time methods of collision prevention. **Practical relevance:** The obtained result allows you to effectively evaluate the condition of technical objects, improving the predictability and prevention of possible environmental and man-made disasters.

**Keywords** – RFID tag, surface acoustic wave, anti-collision, radar, onboard radars, multistatic radars, control, correct detection probability, false alarm, correct identification probability, digital detector, attenuation, environmental assessment, multistrip coupler, reflector gratings.

**For citation:** Sorokin A. V., Shepeta A. P., Nenashev V. A., Wattimena G. M. Comparative characteristics of anti-collision processing of radio signal from identification tags on surface acoustic waves. *Informatsionno-upravliayushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2019, no. 1, pp. 48–56. doi:10.31799/1684-8853-2019-1-48-56

### Introduction

In meeting the challenges of environmental monitoring and assessing the state of technology-induced objects, acoustoelectronic tags which are polled by onboard aircraft transceivers can be used as sensors for measuring physical quantities — temperature, humidity, pressure, stress and strain of materials, etc. [1].

It allows for the automation of data gathering and processing of information regarding objects placed in large areas. Using airborne synthetic-aperture radar system [2–9], or multistatic radar systems [10–13] provides us with the possibility of tag location with sufficient precision. It also makes possible the binding of their coordinates to a map or other specific map points of the objects.

It should be noted that to increase the information content and reliability of the evaluation of the physical state of monitoring objects, it is necessary to increase the number of tags in the interrogated

area that is being examined. Therefore, response tag signals could overlap, causing an RFID (Radio Frequency Identification) tag code collision, which reduces reliable data collection and processing ability.

We devote attention to a consideration of the question of tag's radio signals anti-collision processing. In this context, the paper focuses on the signal's energy ratio while the unique identification code determination in the collision case for three main encoding approaches: time position encoding, frequency and time-frequency encoding [14–16]. Such a review has been implemented for common RFID tag design, interrogation signal with the same energy characteristics as the signals and the same receiving conditions. It makes possible comparing different anti-collision methods with each other and outlining their advantages and disadvantages. Such methodology of the study could be adapted to the specific tag topology, specific interrogation signal and specific undesirable factors.

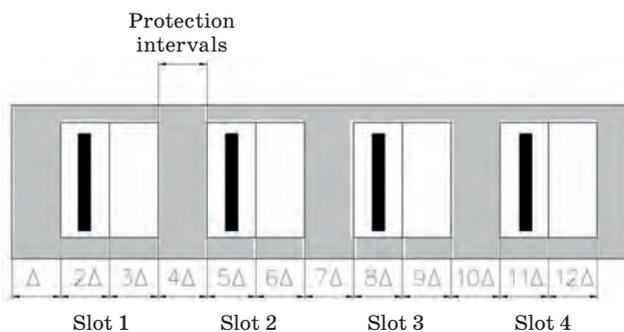
**A simple design of the typical surface acoustic wave device**

A typical surface acoustic wave (SAW) RFID tag design is shown in Fig. 1 [17–19]. For this case, we are limiting it to the image of only that part of the device that forms an individual RFID tag code. This shown design contains the reflectors placed on the piezoelectric substrate in the notional time slots, which are separated by guard intervals.

Each slot has one reflector — the location of the reflector on the left side of the slot corresponds to “1”, and on the right side to “0”. In the figure, the location of the reflectors corresponds to the identification code “1111”.

The interrogation signal coming from the reader to the tags’ reflectors is transduced to an acoustic wave that is propagated along the substrate.

The acoustic wave time delay corresponds to the distance  $\Delta$ , each of which is the same here. This fact is not really important for the issues considered in this paper. The acoustic waves propagate across the surface and impinge upon the reflector gratings. These reflectors produce delayed reflections of the pulse that are used to interrogate the tag. Part of the wave passes to the following structures, and part is reflected in the opposite direction. Here, we are implying that the reflection occurs in such a way that a part of the wave reflected from each reflector propagates to its interdigital transducer



■ Fig. 1. An example of a notional SAW tag design

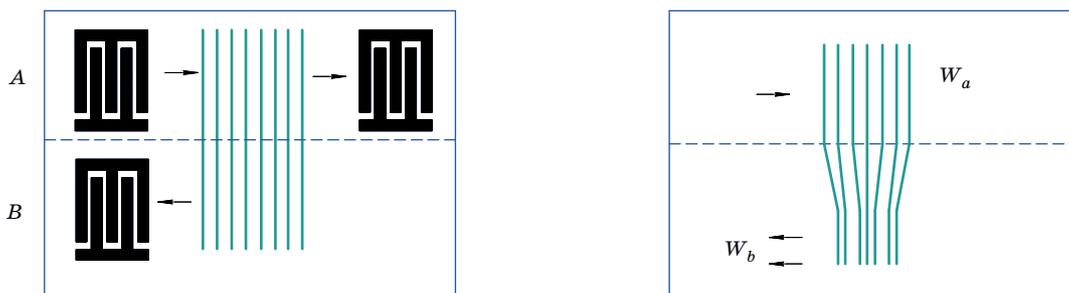
(IDT) emitter through its own acoustic channel, which is achieved with the use of a multistrip coupler, conventionally shown in Fig. 2 [20–29].

The unique identification code of the tag is coded in its delayed response, i. e., the reflector placement.

Receiving an electromagnetic signal emitted by the tag, the reader processes the tag code getting the information about the measured physical quantity. In this paper, we confine ourselves to anti-collision researching, which in effect means that we are interested in the possibility of determining only the tag codes. Therefore, we consider the problem of determining unique tag codes in the case of using anti-collision algorithm processing of the received signal.

Currently, two approaches to the signals’ separation are most widely used — time division and frequency division [16–18]. In practice, time division [17, 18] is frequently used. The authors did not find comparative anti-collision algorithm characteristics for the time and frequency encoding of tag signals in the literature. For narrowing the research area, further consideration refers to passive SAW RFID tags.

**Time division.** Two cases are possible here. First, when only one tag is interrogated, and this does not cause a collision. Second, when several tags are interrogated, and their signals are overlapping, which is the collision case [16]. In this case, the anti-collision algorithm for processing response signals is as follows: the interrogation signal and the topology of the tags provide for the possibility of blocking the response signal for all interrogated tags [14]. One tag “responds” to the request, and the rest are blocked. When you re poll a group of tags — “answer” another tag — the first and the rest are blocked. This algorithm repeats until all tags are interrogated. Thus, due to the specific interrogation signal and the specific tag topology design, a temporary orthogonalization of the response signals occurs. If there are  $N$  tags in the polling zone (for example, tags used to assess the state of a man-made object), the number of response signals from each tag decreases  $N$  times. This an-



■ Fig. 2. Example of a multistrip coupler

ti-collision signal processing algorithm solves the problem of collisions but reduces the energy of response information signals. This applies to reduce the signal energy used to measure physical quantities (temperature, pressure, strain and stress of materials, etc.).

**Frequency division.** In this case, each tag is tuned to its own specific frequency [16, 29]. The interrogation signal contains interrogation pulses at all frequencies of all tags that fall within the field of view of a transceiver. Tag signals are orthogonal in frequency and can be received simultaneously, ideally, without “interfering” with each other. The collision problem in this case is also solved, but at the expense of the energy of the response signal because if there are  $N$  tags in the polling zone, each receives energy  $N$  times less. Thus, here, just as with anti-collision algorithm based on time encoding, the problem of overcoming collisions is solved at the expense of the energy of signals [20–23]. In contrast to the previous case, the number of response signals from each label is (ideally) the number of interrogation signals, but the energy of each response signal is  $N$  times less.

**Time-frequency division.** This way of overcoming collisions is described in detail in [16]. Because of the complication of the topology of the label and the rather substantial complication of processing the response radio signals of the tags in the transceiver polling device, the authors managed to avoid the energy losses inherent in the above-described anti-collision processing methods. This statement applies only to passive tags and for the “ideal” implementation of such a topology. According to the authors, the presence of multistrip couplers (a passive six-terminal network) allows you to create various versions of such structures and implement the proposed anti-collision algorithm in practice. In this algorithm, the number of response signals is equal to the number of interrogations and, unlike the frequency method, the energy of the response signal is the same as with the time method [18].

### False alarm probabilities while the tag code identification by a transceiver

As was mentioned previously we confine ourselves to identifying correctly the tag code for the three considered anti-collision algorithms. Because of this, we consider only that part of the receiving-transmitting device that is intended to determine the identification codes of the tags. To compare correctly the characteristics of anti-collision algorithms, these parts of the receiving-transmitting devices should be the same for all three algorithms being analyzed. The problem statement considers identifying the tag codes with simultaneous

determination of their coordinates to “link” the sensors with identification code (ID) or tags to the map points or certain points of man-made objects, as well as the fact that the reader quickly moves relative to the sensor tags while monitoring. In this way, it is reasonable to set the identification task as the task of detecting packets of response radio pulses that determine the tag’s identification code because it is very difficult to implement optimal identification algorithms in such dynamic conditions. As for the Neyman — Pearson quasi-optimal digital detection algorithms of the type “ $k$  of  $n$ ” [2–4], they have certain robust properties, and their “loss” in relation to the optimal ones, with the requirements for the algorithms presented in this research, does not exceed 1–1.5 dB [30]. In addition, these detection algorithms allow a simple way for the determination of the sensors’ or tags’ coordinates with sufficiently high accuracy [10]. These algorithms are used in this work to solve the problem of identifying the tag code.

The “ $k$  of  $n$ ” detector composes of an envelope detector with output as the envelope of the a signal at the output of the receiving device in the corresponding time interval; an analog comparator with an analog threshold  $U_0$ , which converts the input signal into a sequence of single “1” and zero “0” signals; a digital adder which accumulates the  $n$  of “1” bits; a digital comparator with digital threshold  $k$ ; an output device, which gives “1”, in the case when total adder’s bits quantity, exceeds of the threshold  $k$ .

For each tag time slot which is shown in the Fig. 1, the two detectors are required while  $m$ -digit code identification. For the whole tag’s slots a  $2m$  detectors are required. In this paper for the proposed tag design we are considering 8 detectors.

The probabilities of the appearance of single “1” bits at the output of analogue comparators with only the noise  $P_n$  and the presence of an additive mixture of the information signal and the noise  $P_s$  are determined by the expressions:

$$P_n = \int_{U_0}^{\infty} f_n(U) dU = \int_{U_0}^{\infty} \frac{U}{\sigma_n} e^{-\frac{U^2}{2\sigma_n^2}} dU = e^{-\frac{U_0^2}{2\sigma_n^2}}; \quad (1)$$

$$P_s = \int_{U_0}^{\infty} f_{s+n}(U) dU = \int_{U_0}^{\infty} \frac{U}{\sigma_n^2 + \sigma_s^2} e^{-\frac{U^2}{2(\sigma_n^2 + \sigma_s^2)}} dU = e^{-\frac{U_0^2}{2(\sigma_n^2 + \sigma_s^2)}}, \quad (2)$$

where  $f_n(U)$  and  $f_{s+n}(U)$  — the corresponding probability density envelope of the signals at the detector output;  $\sigma_n$  and  $\sigma_s$  — of the noise power and signal. Formulas (1) and (2) are true for arbitrary

distributions of noise envelopes  $f_n(U)$  and signal convolutions with noise  $f_{s+n}(U)$ . But the final expressions of these formulas correspond to the normal distributed noise and rapid-fluctuating signal model [30].

When using such detectors to identify the tag code, it is necessary to clarify some concepts that we will use below, namely the concepts of false alarm detector, false alarm for each slot and false alarm for each tag. The first concept is commonly used [2–4], but the last two require clarification.

**False alarm detector.** False alarm detector  $P_{fa}$  is defined as the probability of detecting a signal in its absence. For the detector “ $k$  of  $n$ ”  $P_{fa}$  is calculated by the well-known expression:

$$P_{fa} = \sum_{l=k+1}^n C_n^l P_n^l (1-P_n)^{n-l}, \quad (3)$$

where  $C_n^l = \frac{n!}{l!(n-l)!}$ ;  $n$  — packet size of received pulses;  $k$  — digital comparator threshold [4, 30, 31].

**False alarm for each slot.** False alarm on slot concept here means as  $P_{fa}$  — probability of appearance “1” or “0” in the corresponding digit of the identification tag code in the absence of the real information signal at the inputs of the detectors of this slot. This event occurs only when one of the detectors generates a detection digit “1”, and the second detector — a digit “0”. The combination of “1” and “0” digits for one slot corresponds to the decision — this digit of the identification tag is equal “1”, and the combination of “0-1” — the digit of the identification tag is equal to “0”. Events “1-1” — detection of a signal by both detectors and “0-0” — non-detection of a signal by both detectors are ignored since in these cases the tag code is undefined.

Since all events “1-0”, “0-1”, “1-1”, “0-0” are independent,  $P_{fa_s}$  is equal to the sum of the probabilities of events “1-0” and “0-1”:

$$P_{fa_s} = P_n(1-P_n) + (1-P_n)P_n = 2P_n(1-P_n). \quad (4)$$

Expression (4) is written for the most common case of determining the tag code in the binary system, as shown in Fig. 1.

**False alarm for each tag.** False alarm for each tag  $P_{fa_t}$  — the probability of determining the tag code in the absence of information signals at the input of the receiving and transmitting device. This event occurs only when the presence of an information signal detected in each slot:

$$P_{fa_t} = P_{fa_s}^m = \left(2P_n(1-P_n)\right)^m, \quad (5)$$

where  $m$  — the number of binary digits of the tag code, in the example in Fig. 1,  $m = 4$ . Expression (5)

is valid for writing the tag code in the binary system.

In order to allow a proper comparison the characteristics of time, frequency, and time-frequency anti-collision signal processing algorithms, it is necessary to make the false alarm of each tag  $P_{fa_t}$  the same in all algorithms. At the same time, the requirements for the detectors parameters of the type “ $k$  of  $n$ ” — a false alarm for each detector  $P_{fa}$ , the threshold of the analog comparator  $U_0$ , the probabilities  $P_n$ , the threshold of the digital comparator  $k$  are different.

Let us determine the above parameters of the detectors “ $k$  of  $n$ ” for the three considered algorithms of anti-collision processing.

Suppose that  $M$  of tags placed in the notional area are interrogated by moving transceiver. During the time it takes to cross this area, the transceiver transmits  $n$  interrogation signals. In this case, for a time type anti-collision algorithm, each tag is polled  $n$  time =  $E(n/M)$  times, where  $E(\cdot)$  — floor function, and for frequency and time-frequency algorithms, tags are polled  $n$  times. In order to allow a proper comparison, it is necessary that  $n$  be divided by  $M$  without a remainder, which can always be achieved by an appropriate choice of  $M$ . From expression (5) it follows that with equal  $P_{fa_t}$  for these algorithms  $P_{time_s}$  will be the equal too. Therefore,  $P_{fa}$  will be equal for all types of the algorithms.

The “ $k$  of  $n$ ” detection dataset packet for the frequency and time-frequency algorithms is defined as  $n = n$  time  $M$ , for the time algorithm —  $n$  time. Therefore as it follows from expression (1) and (3), it is possible to achieve the equality of  $P_{fa}$  for detectors only by changing the  $U_0$  and  $k$  — thresholds of the analog and digital comparators. The radar handbook by Skolnik [31] recommends choosing a digital threshold defined as  $k = E(\sqrt{1.5n} + 0.5)$ . Following this recommendation, in our case, it is necessary for a given  $P_{fa}$  of (3) to determine  $P_n$ , and then, from expression (1), find the threshold  $U_0$  equal to:

$$U_0 = \sigma_n \sqrt{-2 \cdot \ln P_n}. \quad (6)$$

After all calculations we get following results.

False alarms for each tag are the same for all three algorithms  $P_{fa_t} = P_{fa_t\ time} = P_{fa_t\ freq} = P_{fa_t\ time-freq}$ , hereinafter an additional subscript is introduced, mnemonically associated with the name of the algorithm. False alarms on the slot are also the same  $P_{fa_s} = P_{fa_s\ time} = P_{fa_s\ freq} = P_{fa_s\ time-freq}$ . And, finally, false alarms on the detector are also the same  $P_{fa} = P_{fa\ d} = P_{fa\ d\ time} = P_{fa\ d\ freq} = P_{fa\ d\ time-freq}$ .

The parameters of the detectors for the time algorithm are determined by the expressions:  $n = n$  time,  $k = k$  time =  $E(\sqrt{1.5n\ time} + 0.5)$ ,  $P_n = P_{n\ time}$  by numerical solution of the equation:

$$P_{fa} = P_{fa\ time} = \sum_{l=k\ time+1}^{n\ time} C_n^l P_n^l (1 - P_n)^{n\ time-l}, \quad (7)$$

$U_0 = U_{0\ time}$  — the threshold of the analog comparator with an arbitrary distribution of interference is determined from the expression (1), for our case  $U_{0\ time} = \sigma_n \sqrt{-2 \cdot \ln P_n\ time}$ .

Detector parameters for the frequency and time-frequency algorithm are determined by the expressions

$$n = n\ freq = n\ time\ freq = n\ time\ M,$$

$$k = k\ freq = k\ time\ freq = E(\sqrt{1.5n\ freq} + 0.5) = E(\sqrt{1.5n\ time\ freq} + 0.5),$$

$$P_n = P_{n\ freq} = P_{n\ time\ freq}$$

by numerical solution of the equation:

$$P_{fa\ freq} = \sum_{l=k\ freq+1}^{n\ freq} C_n^l P_n^l (1 - P_n)^{n\ freq-l} = P_{fa\ time\ freq} = \sum_{l=k\ time\ freq+1}^{n\ time\ freq} C_n^l P_n^l \times P_n^l (1 - P_n)^{n\ time\ freq-l}, \quad (8)$$

$U_0 = U_{0\ time}$  — the threshold of the analog comparator with an arbitrary distribution of interference, as well as for the time algorithm, is determined from the expression (1) for our case

$$U_{0\ freq} = \sigma_n \sqrt{-2 \cdot \ln P_n\ freq} = U_{0\ time\ freq} = \sigma_n \sqrt{-2 \cdot \ln P_n\ time\ freq}.$$

### Probabilities of correct tag code identification by transceiver

Similar to the previous section, we introduce concepts that will be used in the further considering.

**Detection probabilities.** Detection probability  $P_d$  it is a commonly used concept, defined as probability that the search object will be detected under given conditions if it is in the area searched. For considered detectors “ $k$  of  $n$ ”  $P_d$  calculated by the expression:

$$P_d = \sum_{l=k+1}^n C_n^l P_s^l (1 - P_s)^{n-l}, \quad (9)$$

where, as well as in expression (3)  $C_n^l = \frac{n!}{l!(n-l)!}$ ,  $n$  — the size of the packet, the received pulses;  $k$  is

the threshold of the digital comparator [30, 31], and  $P_s$  is defined by formula (2).

When substituting into the expression (2) the threshold  $U_0$ , defined by the expression (1), we get:

$$P_s = \exp\left(\frac{\sigma_n \cdot \ln P_n}{\sigma_n^2 + \sigma_s^2}\right) = P_n^{\frac{1}{1+(\sigma_s/\sigma_n)^2}} = P_n^{\frac{1}{1+\rho^2}}, \quad (10)$$

where  $\rho^2 = (\sigma_s/\sigma_n)^2$  — signal-to-noise power ratio. While calculating for each anti-collision algorithm, it noteworthy feature is using specific parameters  $k$ ,  $n$ , and  $U_0$  and also parameters with appropriate subscripts.

### Probability of correct code bit identification.

The correct identification of the  $i$ -th slot when using “ $k$  of  $n$ ” detectors type occurs when the following conditions fulfilled: the detection of a signal at time corresponding the place in slot in which the reflector is present and the non-detection of a signal at time moment which is corresponding the place in the other slot part. This probability, denoted as  $P_{cis}$ , is calculated by the expression:

$$P_{cis} = P_d (1 - P_{fa}), \quad (11)$$

here it is necessary to use  $P_{fa}$  and  $P_d$  which are correspond with the respective algorithm with its subscripts. Unlike the definition of  $P_{fa\ s}$ , only one of the four possible events determines the probability of correct identification: if there is a “1” signal in the slot, the event “1-0” should be correctly defined, and the events “1-1” and “0-0” lead to ignoring the tag code, however, the event “0-1” could be defined as a false definition of the tag code, since it does not ignore the identification of the code, but we do not use this concept further.

Similarly, if there is a “0” signal in this slot, the “0-1” event must be correctly detected. In the example shown in Fig. 1, signal “1” corresponds to the presence of a reflector in the right half of the slot, and signal “0” in the left half.

**Probability of correct tag identification.** The tag code is determined correctly if in all  $m$  slots defining the binary  $m$  bit tag code, the correct identification of digits occurs. The probability of correct tag identification  $P_{cit}$  is determined by following expression:

$$P_{cit} = \prod_{i=1}^m P_{cis} = (1 - P_{fa})^m \prod_{i=1}^m P_{di}, \quad (12)$$

where  $P_{cis}$  — correct identification probability of a binary digit of  $i$ -th tag ID;  $P_{di}$  — probability of correct detection of an information pulse from the  $i$ -th digit of the tag code. Here it is necessary to substitute into the probability expression corresponding to the three anti-collision processing algorithms. From

expressions (9), (10) and (12) it follows that with an unlimited (hypothetical) increase in the power of the interrogation signal, which leads to an unlimited increase in the signal-to-noise ratio, the limit value will be  $P_{ci\ t} = (1 - P_{fa})^m < 1$ . This means that with a given  $n$  tag code cannot be identified correctly with probability one, physically this situation corresponds to the rapid movement of the interrogator relative to the tag (or tag relative to the interrogator). However, the consideration of this issue is beyond the scope of this work.

### Relative proportions of energy tag signals for time, frequency and time-frequency anti-collision algorithms

A calculation of probability correct tag ID codes identification demands taking into account SAW propagation attenuation, reflection  $k_r$  and transmission coefficients  $k_{tr} = 1 - k_r$  for reflectors.

The SAW propagation attenuation is described as an exponential function described as:  $\exp(-\alpha L)$ , where  $\alpha$  — attenuation coefficient;  $L$  — SAW wave path to reflector and back. The signal power  $P_i$ , which depends on the distance to  $i$ -th tag's reflector and back is equal:

$$P_i = P_0 e^{-\alpha L_i} k_{r\ i} \prod_{j=1}^{i-1} k_{tr\ j}, \quad (13)$$

where  $P_0$  — input signal power. Here we are not considering the reflection and transmission losses what could be expected in the real tags. We take into account the propagation losses only which are approximately constant on the way, with some attenuation coefficient  $\alpha$ . The signal-to-noise ratio  $\rho^2$ , shown in (10), it is proportional to  $P_i$ .

Anti-collision time and frequency algorithms allow the optimization of the reflection and transmission coefficients, objective to pulse-amplitude equalization reflected from tag slots, which leads to increasing the probability of correct identification of tag code. For time-frequency algorithm, such alignment and optimization are impossible [32].

For a time anti-collision algorithm, with optimized reflection coefficients, the power  $P_{time\ i}$  of the information signal at the input of the radiating IDT is equal to

$$P_{time\ i} = P_{time} = P_0 e^{-3\alpha\Delta} \frac{e^{6\alpha\Delta} - 1}{e^{6\alpha m\Delta} - 1}, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (14)$$

In expression (14), it is assumed that the guard intervals and half slots have the same size  $\Delta$ , as it's shown in Fig. 1. The reflection coefficient from the last slot is 1. In all slots are given the "1". Tag code

identification is carried out at the receiving a data packet with size  $n\ time = n/M$ , where  $M$  is the number of simultaneously polled tags in the interrogated area.

For frequency anti-collision algorithm with optimized reflection coefficients, the power  $P_{freq\ i}$  of the information signal at the input of the radiating IDT is equal to

$$P_{freq\ i} = P_{freq} = \frac{P_0 e^{-3\alpha\Delta}}{M} \frac{e^{6\alpha\Delta} - 1}{e^{6\alpha m\Delta} - 1}, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (15)$$

The tag replies on the corresponding interrogation signal only. But identifications occurs when data packet  $n\ freq = n$ .

For time-frequency anti-collision algorithm the power expressed as

$$P_{time-freq\ i} = \frac{P_0 e^{-3\alpha\Delta}}{M} e^{-6\alpha(i-1)\Delta}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (16)$$

here all  $P_{time-freq\ i}$  is different, the reflected signal with the lowest power comes from the last slot. The identifications occurs when data packet has a size  $n\ time-freq = n\ freq = n$ .

At the inputs of the transceiver detectors, the signal-to-noise ratio  $\rho^2$  is respectively equal:

— for the time algorithm

$$\rho_{time}^2 = \sigma_{s\ time}^2 / \sigma_n^2 = P_{time\ i} R / \sigma_n^2 = P_{time} R / \sigma_n^2;$$

— for the frequency algorithm

$$\rho_{freq}^2 = \sigma_{s\ freq}^2 / \sigma_n^2 = P_{freq\ i} R / \sigma_n^2 = P_{freq} R / \sigma_n^2;$$

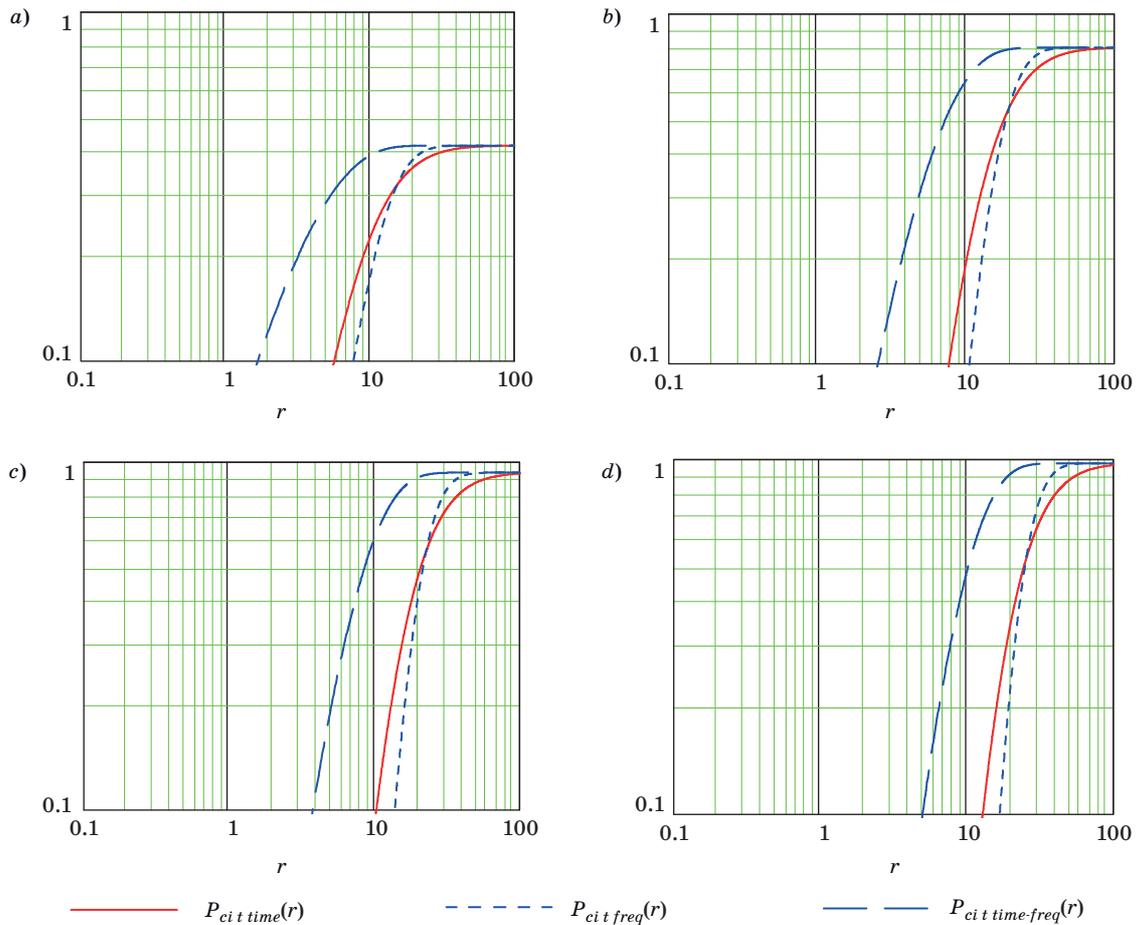
— for time-frequency anti-collision algorithm

$$\rho_{time-freq\ i}^2 = (\sigma_{s\ time-freq\ i} / \sigma_n)^2 = P_{time-freq\ i} R / \sigma_n^2,$$

where  $R$  — path loss (or path attenuation) coefficient [31]. The functions  $P_{ci\ t\ time}(r)$ ,  $P_{ci\ t\ freq}(r)$ ,  $P_{ci\ t\ time-freq}(r)$ , where  $r = P_0 / \sigma_n^2$  — probabilities of correct tag identification, calculated in (11), are shown in the Fig. 3, a-d.

The calculations were performed for the following values of the parameters of anti-collision algorithms: slots number  $m = 4$ ; tags number placed in the interrogation area  $M = 4$ ; false alarms for tag  $P_{fa\ t} = 10^{-2}, 10^{-4}, 10^{-6}, 10^{-8}$ ; number of tag polls  $n\ time = 8, n = n\ freq = n\ time-freq = 32$ ; digital comparators thresholds  $k\ time = 4, k = k\ freq = k\ time-freq = 7$ ; path attenuation between two neighboring reflectors taken as 20 dB.

These functions show that  $P_{ci\ t}$  remaining low in the case of using specific values of the algorithms and detectors coefficients and also, increasing response signal power. To increase the probability of



■ Fig. 3. Probabilities of correct tag identification  $P_{ci\ t\ time}(r)$ ,  $P_{ci\ t\ freq}(r)$ ,  $P_{ci\ t\ time-freq}(r)$  for  $P_{fa\ t} = 10^{-2}$  (a);  $10^{-4}$  (b);  $10^{-6}$  (c);  $10^{-8}$  (d)

correct identification of tags, in such cases, it is necessary to accumulate packets of response signals. With the accumulation of  $N$  pulse packets, the probability of correct identification is equal to  $P_{ci\ t\ pack} = 1 - (1 - P_{ci\ t})^N$ , tends to the “1” value for all three algorithms with any false alarm  $P_{fa\ t} < 1$ .

### Conclusion

Analysis of the three algorithms for anti-collision processing of response signals from RFID tags shows, that time-frequency algorithm has the highest probability of correctly identifying tag codes for all mathematical models of tags, their polling conditions, identification algorithms, interference characteristics, and response information signals. The time and frequency algorithms are approximately equivalent in the probability of correct identification, but both are given a way to the time-frequency algorithm. These conclusions correspond with the physical concepts. Despite the rather significant differences in the parameters of the time and frequency processing

algorithms and the differences in the observation conditions for the radio signals of the tags, the total energy of the received signals for these algorithms is approximately the same. For the time-frequency algorithm, the signal energy is higher, but the total increase of the correct tag identification probability is not proportional to the increase in energy due to the fact that, due to the specificity of this algorithm, there is no possibility to optimize the topology of the tags and, consequently, optimize its parameters. The above analysis of algorithms is easily summarized with other types of interference and information signals, which differ from normal noise and rapidly fluctuating packets of the radio signal pulses. However, with more complex models of interference and signals, the characteristics of the algorithms in the form of simple analytical expressions cannot be obtained. For this reason, only numerical analysis is possible, which makes research much more difficult. Despite the above fact the qualitative conclusions regarding the algorithms given above remain valid.

All of the three considered anti-collision algorithms suggest some modification of the tag topol-

ogy for the getting an individual object ID. It goes beyond the scope of the present research but we included some references to the patents and papers showing the possibility of implementing such tasks. In addition, the complexity of the polling devices for the time and frequency algorithms is about

the same, and for the time-frequency — the polling device It's a big task, but not as unattainable as it would seem. The advantages of the time-frequency anti-collision algorithm are due to the complexity of its structure in processing the received RFID tags information response signals.

## References

1. Wattimena M. G., Nenashev V. A., Sentsov A. A. and Shepeta A. P. On-board unlimited aircraft complex of environmental monitoring. *2018 Wave Electronics and its Application in Information and Telecommunication Systems (WECONF)*, Saint-Petersburg, Russia, 2018, pp. 1–5. doi:10.1109/WECONF.2018.8604382
2. Verba V. S. *Spravochnik po radiolokatsii* [Handbook of Radar]. M. I. Skolnick ed. In 2 books. Book 2. Moscow, Tekhnosfera Publ., 2014. 680 p. (In Russian).
3. Mahafza B. R. *Radar Systems Analysis and Design Using MATLAB*. Third ed. CRC Press, 2013. 772 p.
4. Melvin W. L., Scheer J. A. (Eds). *Principles of Modern Radar: Advanced Techniques*. SciTech Publishing, 2013. 846 p.
5. Maître H. (ed.) *Processing of Synthetic Aperture Radar Images*. STE/John Wiley, 2008. 411 p.
6. Sidiropoulos N. D., Gini F., Chellappa R., Theodoridis S. (eds.) *Academic Press Library in Signal Processing*. Vol. 2. *Communications and Radar Signal Processing*. Academic Press, 2014. 1349 p.
7. Chen V. C., Martorella M. *Inverse Synthetic Aperture Radar Imaging: Principles, Algorithms and Applications*. SciTech Publishing, 2014. 304 p.
8. Chen B., Wu J. *Synthetic Impulse and Aperture Radar (SIAR): A Novel Multi-Frequency MIMO Radar*. Wiley, 2014. 438 p.
9. Chen K.-S. *Principles of Synthetic Aperture Radar Imaging. A System Simulation Approach*. CRC Press, 2016. 217 p.
10. Podoplekin Y. F., Nenashev V. A., Shepeta A. P. *A method of synthesizing a front antenna aperture earth's surface except the blind zones in the front zone via rocker radar system*. The patent for the invention no. 2560082. The priority of the invention, the 01/09/2014.
11. Richard Klemm, Ulrich Nickel, Christoph Gierull, Pierfrancesco Lombardo, Hugh Griffiths and Wolfgang Koch (Eds.) *Novel Radar Techniques and Applications*. Vol. 1. *Real Aperture Array Radar, Imaging Radar, and Passive and Multistatic Radar*. SciTech Publishing, 2017. 952 p.
12. Wang R., Deng Y. *Bistatic SAR System and Signal Processing Technology*. Springer, 2018. 286 p.
13. Fourati H. (ed.) *Multisensor Data Fusion: From Algorithms and Architectural Design to Applications*. CRC Press, 2016. 639 p. (Devices circuits and systems).
14. Baghdasaryan A. S., Baghdasaryan A. S., Gulyaev Y. V., Karapetyan G. Ya., Nefedov N. A., Nikitov S. A., Nikolaev V. I., Nikolaev O. V. *Anti-collision radio frequency identification system*. The patent for the invention no. 2333513. The priority of the invention, the 30/10/2006.
15. Koigerov A. S., Dmitriev V. F. Radiomarked surface acoustic wave with an error-correcting frequency-manipulated code. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2010, no. 4, pp. 22–28 (In Russian).
16. Sorokin A. V., Shepeta A. P. Anti-collision radio-frequency identification system using passive SAW tags. *Proc. SPIE, Smart Sensors, Actuators, and MEMS VIII*, Barcelona, Spain, 2017, vol. 10246, pp. 1024613. doi:10.1117/12.2263223
17. Sorokin A., Shepeta A., Wattimena M. Wireless SAW passive tag temperature measurement in the collision case. *Proc. EECSI 2017*, Yogyakarta, Indonesia, 2017, vol. 1008 (1), pp. 012015. doi:10.1088/1742-6596/1008/1/012015
18. Sorokin A., Shepeta A., Wattimena M. Encoding of passive anticollision radio frequency identification surface acoustic waves tags. *Proc. of the Electrical Engineering Computer Science and Informatics*, 2017, vol. 4, pp. 605–609.
19. Hartmann C. S. Design of global SAW RFID tag devices. *Second Intern. Symp. on Acoustic Wave Devices for Future Mobile Communication Systems*, Chiba University, Japan, 2004, pp. 15–21.
20. Plessky V. P., Reindl L. M. Review on SAW RFID tags. *Proc. IEEE Trans Ultrason Ferroelectr Freq Control*, 2010, vol. 57(3), pp. 654–68.
21. Harma S., Arthur W. G., Hartmann C. S., Maev R. G., Plessky V. P. In-line SAW RFID tag using time position and phase encoding. *Proc. IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, 2008, vol. 55(8), pp. 145–158.
22. Hartmann C. S. A global SAW ID tag with large data capacity. *Proc. IEEE International Ultrasonics Symp.*, 2002, pp. 65–69.
23. Morgan D. *Surface Acoustic Wave Filters. With Applications to Electronic Communications and Signal Processing*. 2nd ed. Elsevier, 2007. 448 p.
24. Danicki E. Reversing multistrip coupler. *Ultrasonics*, vol. 31(6), pp. 421–424. doi:10.1016/0041-624X(93)90050-A
25. Chen D. P. and Haus H. A. Analysis of metal-strip SAW gratings and transducers. *IEEE Transactions*

- on *Sonics and Ultrasonics*, 1985, vol. Su-32, no. 3, pp. 395–408.
26. Steindi R., Hausleitner C., Hauser H., Bulst W. Wireless magnetic field sensor employing SAW-transponder. *Proc. of the 12th IEEE Intern. Symp. on Applications of Ferroelectrics (ISAF 2000)*; Honolulu, HI, USA, 2000, 21 July–2 August, pp. 855–858.
27. Malocha D. C., Gallagher M., Fisher B., Humphries J., Gallagher D., Kozlovski N. Passive wireless multi-sensor SAW technology device and system perspective. *Sensors*, 2013, vol. 13, pp. 1–27. doi:10.3390/s130505897
28. Malocha D. C., Gallagher D., Hines J. SAW sensors using orthogonal frequency coding. *Proc. of the 2004 IEEE Intern. Frequency Control Symp. and Exposition*, Montreal, Canada, 24–27 August 2004, pp. 307–310.
29. Puccio D., Malocha D. C., and Saldanha N. Implementation of orthogonal frequency coded SAW devices using apodized reflectors. *Proc. IEEE Intern. Frequency Control Symp.*, 2005, pp. 892–896.
30. Shepeta A. P., Makhlin A. M., Nenashev V. A. and Kryachko A. F. Performance of UWB signal detecting circuits. *2018 Wave Electronics and its Application in Information and Telecommunication Systems (WECONF)*, Saint-Petersburg, Russia, 2018, pp. 1–4. doi:10.1109/WECONF.2018.8604440
31. Skolnik Merrill I. *Radar Handbook*. 2008. 1352 p.
32. Sorokin A., Shepeta A., Smirnov Y. G. *Method of anti-collision radio frequency identification on acoustic waves surface and the system of its implementation*. The patent for the invention no. 2634308. The priority of the invention, the 2016-02-24

УДК 681.883; 629.35; 681.51; 621.396  
doi:10.31799/1684-8853-2019-1-48-56

#### Сравнительные характеристики методов антиколлизийной обработки ответных радиосигналов идентификационных меток на поверхностных акустических волнах

А. В. Сорокин<sup>а</sup>, ассистент, orcid.org/0000-0002-5450-244X, aleksandr.sorokin.v@gmail.com

А. П. Шепета<sup>а</sup>, доктор техн. наук, профессор, orcid.org/0000-0003-0179-0166

В. А. Ненашев<sup>а</sup>, канд. техн. наук, доцент, orcid.org/0000-0001-5285-2051

Г. М. Ваттимена<sup>б</sup>, преподаватель, orcid.org/0000-0001-9376-4779

<sup>а</sup>Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, Б. Морская ул., 67, Санкт-Петербург, 190000, РФ

<sup>б</sup>Амбонский государственный политехнический университет, Джл. Ир. М. Путухена ул., Амбон, Малуку, 16516, Индонезия

**Постановка проблемы:** при использовании акустоэлектронных устройств для измерения физических величин, таких как давление, температура, сила сжатия, напряжение и т. д., возникает проблема коллизий информационных сигналов, которые получены при опросе акустоэлектронных устройств. Проблема вызвана перекрытием ответных радиосигналов устройств во времени, что делает невозможным ни определение индивидуального кода устройства, ни считывание информации с него об измеряемой физической величине. **Цель:** анализ антиколлизийных алгоритмов обнаружения и идентификации кодов радиочастотных меток по ответным информационным сигналам акустоэлектронных устройств, использующих методы временного, частотного и частотно-временного разделения ответных радиосигналов. **Методы:** вероятностные методы расчета характеристик цифровых обнаружителей пачек радиоимпульсов при заданных значениях ложных тревог на фоне нормального белого шума; методы идентификации индивидуальных кодовых групп при учете затухания акустоэлектрических сигналов при распространении в подложке метки с учетом зависимости затухания от топологии используемых меток. **Результаты:** получены аналитические выражения для расчета вероятности правильной идентификации кодов меток в зависимости от топологии меток, характеристик затухания, способа антиколлизийной обработки информационных радиосигналов и отношения сигнал/шум; рассчитаны и приведены соответствующие кривые, позволяющие сравнить достоинства и недостатки рассмотренных антиколлизийных методов обработки ответных радиосигналов акустоэлектронных устройств. Анализ графиков, демонстрирующих вероятность правильной идентификации, показал, что идентификационные метки с частотно-временным кодированием имеют лучшие соотношения по сравнению с частотными и временными методами предотвращения коллизий. **Практическая значимость:** полученный результат позволит эффективно оценивать состояние технических объектов, что в свою очередь поможет благодаря своевременной информации предупредить и избежать экологических и техногенных катастроф.

**Ключевые слова** — радиочастотная идентификационная метка, поверхностная акустическая волна, антиколлизия, радиолокация, бортовые радиолокационные станции, многопозиционные радиолокационные станции, контроль, вероятность правильного обнаружения, ложная тревога, вероятность правильной идентификации, цифровой обнаружитель, затухание, экологический мониторинг, многополосковый ответитель, отражательные решетки.

**Для цитирования:** Sorokin A. V., Shepeta A. P., Nenashev V. A., Wattimena G. M. Comparative characteristics of anti-collision processing of radio signal from identification tags on surface acoustic waves. *Информационно-управляющие системы*, 2019, № 1, с. 48–56. doi:10.31799/1684-8853-2019-1-48-56

**For citation:** Sorokin A. V., Shepeta A. P., Nenashev V. A., Wattimena G. M. Comparative characteristics of anti-collision processing of radio signal from identification tags on surface acoustic waves. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2019, no. 1, pp. 48–56. doi:10.31799/1684-8853-2019-1-48-56

УДК 519.2

doi:10.31799/1684-8853-2019-1-57-64

## Статистические характеристики среднего уровня полезности элитной группы в процессе отбора

А. А. Монаков<sup>а</sup>, доктор техн. наук, профессор, [orcid.org/0000-0003-4469-0501](https://orcid.org/0000-0003-4469-0501), [a\\_monakov@mail.ru](mailto:a_monakov@mail.ru)<sup>а</sup>Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения,

Б. Морская ул., 67, Санкт-Петербург, 190000, РФ

**Введение:** развитие биологических и социальных систем во многом определяется уровнем полезности элитной группы, которая выделяется из основной популяции и характеризуется высоким статусным положением. Процесс формирования элитной группы носит случайный характер в силу неизбежных ошибок при отборе. Степень влияния этих ошибок на уровень полезности элитной группы различна в зависимости от правил отбора. **Цель:** оценка влияния правил отбора на динамику изменения среднего уровня полезности элитной группы. **Результаты:** определена динамика изменения вероятностных характеристик среднего уровня полезности элитной группы при двух сценариях отбора: с фиксированным порогом и порогом, который определяется достигнутым на момент отбора средним уровнем полезности группы. Установлено, что при отборе по первому сценарию средний уровень полезности элитной группы стремится к уровню, величина которого даже при больших вероятностях ошибки отбора больше среднего уровня полезности по всей популяции. Однако если считать недопустимым уменьшение среднего уровня полезности элиты ниже порога отбора, вероятность ошибок при отборе должна быть меньше или равна квадрату вероятности попадания члена популяции в элитную группу. Доказано, что при втором сценарии средний уровень полезности элитной группы стремится к среднему значению этого параметра по всей популяции независимо от вероятности ошибки отбора. Величина последней влияет только на длительность переходного процесса, в течение которого элита «растворяется» в популяции, и ее представители в среднем перестают отличаться от других членов популяции по уровню своей полезности. Введено понятие критической вероятности ошибки отбора, при котором средний уровень полезности элитной группы равен нижней допустимой границе. **Практическая значимость:** доказано, что для правильного формирования элиты должен использоваться сценарий отбора с фиксированным, высоким порогом отбора. Вычисленное значение критической вероятности ошибки отбора может быть использовано для контроля процесса формирования элитной группы.

**Ключевые слова** — элита, элитная группа, статус члена, уровень полезности, отбор, вероятность ошибки отбора.

**Для цитирования:** Монаков А. А. Статистические характеристики среднего уровня полезности элитной группы в процессе отбора. *Информационно-управляющие системы*, 2019, № 1, с. 57–64. doi:10.31799/1684-8853-2019-1-57-64

**For citation:** Monakov A. A. Statistical characteristics of the mean level of an elite group utility in selection. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2019, no. 1, pp. 57–64 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2019-1-57-64

### Введение

В биологических и социальных системах огромное значение имеют процессы формирования и эволюции элитной группы (ЭГ) (элиты), члены которой обладают более высоким значением некоторого статусного параметра по отношению к оставшейся части популяции. Благодаря этому превосходству элита имеет значительное влияние на состояние и развитие всей популяции в целом. Таким статусным параметром может быть положение в системе социальной иерархии (социальные группы) или чистота линии, продуктивность, технологические качества (биологические группы). Одновременно каждый член популяции, включая и членов ЭГ, может быть охарактеризован некоторым уровнем полезности, который объективно передает степень влияния члена на эволюцию популяции. Очевидно, если статусные положения членов элиты соответствуют высоким значениям уровня полезности, динамика развития популяции с большой вероятностью будет положительной (прогресс), и наоборот, несоответствие статуса и уровня полезности может привести всю популя-

цию к застою или даже отрицательной динамике развития (регресс).

Процесс изучения влияния элиты на жизнь общества имеет долгую историю. Согласно [1], она восходит к трудам Ибн Халдуна (1332–1406), арабского философа, историка, политического и общественного деятеля [2]. В настоящее время изучение процессов формирования, развития и влияния элит оформилось в отдельное направление — элитологию [3]. Признанными основателями элитологии являются итальянские социологи Н. Макиавелли (1469–1527), Г. Моска (1858–1941), В. Парето (1848–1923), Р. Михельс (1876–1936). В отечественной школе становление и развитие науки о роли элит в жизни общества связано с именем Л. Н. Гумилева (1912–1992). В настоящей статье не будет анализа учений названных авторов, во-первых, потому что он дан в многочисленных публикациях по элитологии (см. [1, 3–5] и ссылки в этих работах), и, во-вторых, по той причине, что статья посвящена математическому анализу процесса отбора в элиту.

Необходимо, однако, отметить, что у истоков зарубежной элитологии стоял Вильфредо

Парето — экономист, философ и инженер, чья теория циркуляции элит способствовала применению математических методов в теории эволюции общества [1, 6]. И все же исследования процессов в ЭГ и их влияния на общество в настоящее время в основном касаются исторических, экономических, социологических, политических, правовых, а также морально-нравственных аспектов [7–9]. По-видимому, такое положение дел объясняется существующим интересом к жизни элиты и тем резонансом, который имеют в обществе события, происходящие в ЭГ.

В то же время в элитологии математические методы давно нашли применение для анализа динамических процессов, происходящих внутри ЭГ и в обществе в целом [1, 10–14]. Настоящая статья близка к работам [15–17], которые посвящены процессам, развивающимся в ЭГ. В этих работах предполагается, что на этапе формирования элиты используется достаточно простое параметрическое правило, когда в элиту попадают только члены популяции (ЧП), уровень полезности которых превышает некоторый порог. Считается, что это правило при формировании элиты выполняется с ошибками. Эти ошибки ведут к засорению ЭГ членами с низким уровнем полезности. Кроме того, со временем происходит «изнашивание» членов ЭГ, следствием которого также является уменьшение уровня полезности элиты. Поэтому в вышеназванных работах основное внимание уделяется эволюции элиты, поддержанию ее высокого уровня путем отбраковки членов с низким уровнем полезности и делегирования в элиту новых членов.

Социальная значимость работ [15–17] была впервые раскрыта в публикации А. Н. Ефимова [18], опубликованной в 1988 г. В статье прямо было указано на возможность ошибок при отборе в ЭГ и влияние этих ошибок на качество элиты. Однако, как сказано в статье [19]: «... в связи с закатом перестройки, бурными процессами распада СССР и последующего передела власти все эти идеи моделирования и исследования механизмов эволюции элит были благополучно забыты. Одной из возможных причин забвения могло стать то, что озвученные в статье результаты были слишком нелицеприятны для пришедшей к власти новой волне элит».

В предлагаемой работе акцент делается на вероятностном анализе этапа создания ЭГ и влиянии правил отбора на средний уровень полезности ее членов. Отбор в ЭГ осуществляется в соответствии с некоторым сценарием. В статье рассматриваются два сценария, причем в обоих случаях при отборе допускается возникновение ошибок. Первый сценарий отбора такой же, как и в работе [15]. При втором сценарии порог формируется исходя из достигнутого на момент отбора среднего уровня полезности всей ЭГ. Целью

работы является исследование влияния правил отбора в ЭГ на динамику изменения ее среднего уровня полезности.

### Вероятностные характеристики среднего уровня полезности элиты в процессе отбора

Пусть случайная величина  $\xi$ , заданная на множестве  $X = [0, 1]$ , имеет равномерное распределение с интегральной функцией распределения вероятностей  $F(x; 0, 1)$ , где

$$F(x; a, b) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x < b \\ 1, & b \leq x < \infty \end{cases} \quad (1)$$

Случайная величина  $\xi$  с множеством ее значений  $X$  ассоциируется с уровнем полезности членов некоторой популяции  $P$ , перед которой стоит задача сформировать ЭГ  $E \subset P$ . Поскольку каждому ЧП соответствует свой уровень полезности, то в дальнейшем не будем различать членов популяции и их уровни полезности.

Элитная группа  $E(X)$  представляет собой подмножество членов, чей уровень полезности при отсутствии ошибок отбора должен быть выше некоторого порога  $x_{\text{пор}}$ :

$$E(X) = \{ \xi \in X : \xi \geq x_{\text{пор}} \}. \quad (2)$$

Заметим, что при сделанных предположениях порог  $x_{\text{пор}}$  определяет вероятность отбора случайно выбранного ЧП в ЭГ  $P_{\text{отб}}$ , которая для равномерного распределения равна  $P_{\text{отб}} = 1 - x_{\text{пор}}$ .

Допустим, что ЭГ формируется путем последовательного извлечения ЧП из популяции и сравнения с порогом. При этом на  $k$ -м шаге ЧП с уровнем  $\xi_k$  попадает в элиту, если  $\xi_k \geq x_{\text{пор}}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Тогда средний уровень ЭГ

$$\eta_k = \frac{\sum_{j=1}^k \xi_j u_j}{\sum_{j=1}^k u_j}, \quad (3)$$

где  $u_j$ ,  $j = 1, \dots, k$  — случайная величина, принимающая значения 1 при попадании  $j$ -й особи в элиту и 0 в противном случае. При этом  $\eta_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$  представляет собой дискретный случайный процесс. Целью настоящей статьи является определение статистических характеристик данного случайного процесса.

Вначале рассмотрим процесс формирования ЭГ, при котором ошибки отбора не возникают.

В данном случае  $u_j = \theta(\xi_k - x_{\text{пор}})$ ,  $j = 1, \dots, k$ , где  $\theta(x)$  — функция Хевисайда:

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0 \\ 1, & 0 \leq x < \infty \end{cases}. \quad (4)$$

Для определения статистических характеристик случайной величины  $\eta_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$  воспользуемся методом характеристических функций. Характеристическая функция (ХФ) совместного распределения случайных величин  $A = \xi u$  и  $a = u$  равна

$$\begin{aligned} \chi(p, q) &= \left\langle e^{i(pA + qa)} \right\rangle = \\ &= \int_0^1 \exp\left[i(px + q)\theta(x - x_{\text{пор}})\right] f_{\text{ст}}(x) dx = \\ &= \left[ x_{\text{пор}} + e^{iq} \frac{e^{ip} - e^{ipx_{\text{пор}}}}{ip} \right], \end{aligned} \quad (5)$$

где  $f_{\text{ст}}(x) = f(x; 0, 1)$  — плотность стандартного равномерного распределения и

$$f(x; a, b) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < a \cup b \leq x < \infty \\ \frac{1}{b-a}, & a \leq x < b \end{cases}. \quad (6)$$

Тогда, учитывая, что отдельные слагаемые в суммах  $A_k = \sum_{j=1}^k \xi_j u_j$  и  $a_k = \sum_{j=1}^k u_j$  статистически независимы, ХФ совместного распределения случайных величин  $A_k$  и  $a_k$  будет равна

$$\chi_k(p, q) = \left[ x_{\text{пор}} + e^{iq} \frac{e^{ip} - e^{ipx_{\text{пор}}}}{ip} \right]^k. \quad (7)$$

Вычисляя обратное преобразование Фурье от (6), получим совместную плотность распределения

$$\begin{aligned} f(A_k, a_k) &= \\ &= x_{\text{пор}}^k \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \frac{\delta(a_k - j)}{2\pi} \int \left[ \frac{e^{ip} - e^{ipx_{\text{пор}}}}{ipx_{\text{пор}}} \right]^j e^{ipA_k} dp, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $\delta(\cdot)$  — дельта-функция Дирака.

Тогда плотность распределения случайной величины  $\eta_k = A_k/a_k$  равна

$$f(\eta_k) = x_{\text{пор}}^k \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \frac{j}{2\pi} \int \left[ \frac{e^{ip} - e^{ipx_{\text{пор}}}}{ipx_{\text{пор}}} e^{-ip\eta_k} \right]^j dp. \quad (9)$$

Интеграл в (9) вычисляется просто, однако конечное выражение для плотности получается до-

статочно громоздким. Поэтому для дальнейшего анализа определим ХФ распределения:

$$\chi_k(s) = x_{\text{пор}}^k \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left[ \frac{\exp\left(i\frac{s}{j}\right) - \exp\left(ix_{\text{пор}}\frac{s}{j}\right)}{ix_{\text{пор}}\frac{s}{j}} \right]^j. \quad (10)$$

Полученная ХФ (10) позволяет легко найти моменты распределения. В частности математическое ожидание распределения

$$\bar{\eta}(k) = 0,5(1 + x_{\text{пор}})(1 - x_{\text{пор}}^k). \quad (11)$$

Как следует из (11), при  $k \rightarrow \infty$  математическое ожидание среднего уровня ЭГ достаточно быстро стремится к уровню

$$\bar{\eta}_{\infty} = 0,5(1 + x_{\text{пор}}), \quad (12)$$

т. е. к середине отрезка, в который попадают значения уровня полезности ЭГ.

Рассмотрим теперь, как влияют на средний уровень ЭГ ошибки отбора. При этом будем рассматривать два сценария возникновения ошибок:

1) ошибка при отборе возникает случайно, независимо от уровня предъявляемого к отбору ЧП, при неизменном пороговом уровне  $x_{\text{пор}}$ ;

2) ошибка при отборе возникает случайно, независимо от уровня предъявляемого к отбору ЧП, при пороговом уровне  $x_{\text{пор}}$ , который зависит от достигнутого на момент отбора среднего уровня элиты.

Для первого сценария средний уровень ЭГ по-прежнему вычисляется на основании уравнения (3), но случайная величина

$$\begin{aligned} u_k &= \theta(\xi_k - x_{\text{пор}}) + \\ &+ \theta(x_{\text{пор}} - \xi_k)\theta(P_{\text{ош}} - \zeta_k), \quad k = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (13)$$

где  $P_{\text{ош}}$  — вероятность ошибки;  $\zeta_k$  — равномерно распределенная на интервале  $[0, 1]$  случайная величина, которая характеризует возникновение ошибки и является статистически независимой от  $\xi_k$ . Как следует из (13), при  $\xi_k \geq x_{\text{пор}}$  ЧП отбирается в ЭГ с вероятностью 1. В противном случае ЧП также может попасть в ЭГ с вероятностью  $P_{\text{ош}}$ .

Нетрудно показать, что ХФ совместного распределения случайных величин  $A_k = \sum_{j=1}^k \xi_j u_j$  и  $a_k = \sum_{j=1}^k u_j$  в данном случае будет равна

$$\chi_k(p, q) = \left[ (1 - P_{\text{ош}})x_{\text{пор}} + \right.$$

$$+ e^{iq} \frac{P_{\text{ош}}(e^{ip} - 1) + (1 - P_{\text{ош}})(e^{ip} - e^{ipx_{\text{пор}}})}{ip} \Big]^k. \quad (14)$$

Как можно заметить, уравнения (7) и (14) совпадают при  $P_{\text{ош}} = 0$ . ХФ распределения среднего уровня ЭГ при этом будет равна

$$\chi_k(s) = (1 - P_{\text{ош}})^k x_{\text{пор}}^k \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \times \left[ \frac{P_{\text{ош}} \left( \exp\left(i \frac{s}{j}\right) - 1 \right) + (1 - P_{\text{ош}}) \left( \exp\left(i \frac{s}{j}\right) - \exp\left(ix_{\text{пор}} \frac{s}{j}\right) \right)}{i(1 - P_{\text{ош}})x_{\text{пор}} \frac{s}{j}} \right]^j. \quad (15)$$

На основании (15) легко можно вычислить математическое ожидание среднего уровня ЭГ

$$\bar{\eta}(k) = 0,5 \frac{1 - x_{\text{пор}}^2 (1 - P_{\text{ош}})}{1 - x_{\text{пор}} (1 - P_{\text{ош}})} \left[ 1 - x_{\text{пор}}^k (1 - P_{\text{ош}})^k \right]. \quad (16)$$

При  $k \rightarrow \infty$  математическое ожидание среднего уровня ЭГ быстро стремится к величине

$$\bar{\eta}_{\infty}^{\text{ош}} = 0,5 \frac{1 - x_{\text{пор}}^2 (1 - P_{\text{ош}})}{1 - x_{\text{пор}} (1 - P_{\text{ош}})}. \quad (17)$$

Это значение можно назвать асимптотическим средним уровнем полезности ЭГ.

Несложно показать, что это значение меньше  $\bar{\eta}_{\infty} = 0,5(1 + x_{\text{пор}})$ :

$$\bar{\eta}_{\infty}^{\text{ош}} - \bar{\eta}_{\infty} = -\frac{x_{\text{пор}} P_{\text{ош}}}{1 - x_{\text{пор}} (1 - P_{\text{ош}})} \leq 0. \quad (18)$$

Таким образом, происходит уменьшение среднего уровня ЭГ вследствие «загрязнения» сорными особями, проникающими в ЭГ из-за ошибок отбора. Как следует из (18), разница между уровнями  $\bar{\eta}_{\infty}^{\text{ош}}$  и  $\bar{\eta}_{\infty}$  тем больше, чем выше вероятность ошибки  $P_{\text{ош}}$  и уровень порога  $x_{\text{пор}}$ . При вероятности ошибки

$$P_{\text{крит}} = (1 - x_{\text{пор}})^2 / x_{\text{пор}}^2, \quad (19)$$

которая может быть названа *критической*,  $\bar{\eta}_{\infty}^{\text{ош}} = x_{\text{пор}}$  и средний уровень ЭГ равен порогу отбора  $x_{\text{пор}}$ , т. е. нижнему допустимому уровню полезности ЭГ. Учитывая, что величина порога  $x_{\text{пор}}$  близка к единице, *критическая вероятность*, как следует из (19), примерно равна квадрату вероятности попадания члена популяции в ЭГ и, следовательно, принимает очень малые значения. На-

пример, при  $x_{\text{пор}} = 0,95$  *критическая вероятность ошибки отбора* составляет всего  $P_{\text{ош}} = 0,0028$ . В то же время несложно показать, что  $\bar{\eta}_{\infty}^{\text{ош}} \geq 0,5$ , причем равенство достигается только при  $P_{\text{ош}} = 1$ . Следовательно, при реализации рассматриваемого сценария отбора с большой вероятностью средний уровень полезности ЭГ всегда будет выше среднего уровня полезности по всей популяции.

Рассмотрим теперь второй сценарий отбора с ошибкой. Пусть уровень порога, с которым сравнивается очередной кандидат в ЭГ, зависит от текущего среднего уровня (рис. 1):

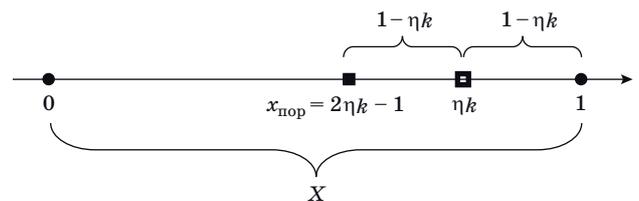
$$x_{\text{пор}}^{(k)} = \eta_k - (1 - \eta_k) = 2\eta_k - 1. \quad (20)$$

В данном случае свойство статистической независимости отобранных кандидатов, которое являлось основой проведенного ранее анализа, не выполняется, так как порог на текущем шаге зависит от результатов предыдущих шагов. Поэтому для статистического анализа рассматриваемого варианта перепишем уравнение (3) в виде

$$\eta_k = \frac{\sum_{j=1}^{k-1} \xi_j u_j + \xi_k u_k}{\sum_{j=1}^{k-1} u_j + u_k} = \frac{\eta_{k-1} a_{k-1} + \xi_k (a_k - a_{k-1})}{a_k} = \xi_k + (\eta_{k-1} - \xi_k) \frac{a_{k-1}}{a_k}. \quad (21)$$

Уравнение (20) позволяет легко определить условную плотность вероятностей

$$f(\eta_k, a_k | \eta_{k-1}, a_{k-1}) = P_{\text{ош}} (2\eta_{k-1} - 1) \delta(a_k - a_{k-1} - 1) \times f\left(\eta_k; \frac{a_{k-1} \eta_{k-1}}{a_k}, \frac{2\eta_{k-1} - 1 + a_{k-1} \eta_{k-1}}{a_k}\right) + (1 - P_{\text{ош}}) (2\eta_{k-1} - 1) \delta(a_k - a_{k-1} - 1) \times \delta(\eta_k - \eta_{k-1}) + 2(\eta_{k-1} - 1) \delta(a_k - a_{k-1} - 1) \times f\left(\eta_k; \frac{2\eta_{k-1} - 1 + a_{k-1} \eta_{k-1}}{a_k}, \frac{1 + a_{k-1} \eta_{k-1}}{a_k}\right), \quad (22)$$



■ **Рис. 1.** Средний уровень полезности  $\eta_k$  и порог отбора  $x_{\text{пор}}$  на  $k$ -м шаге

■ **Fig. 1.** The mean level of utility  $\eta_k$  and the threshold of selection  $x_{\text{пор}}$  at the  $k$ -th step

где  $f(x; a, b)$  — плотность равномерного распределения вероятностей (6). На основании (21) можно сделать вывод, что двухмерный случайный процесс  $\zeta_k = (\eta_k, a_k)$ ,  $k = 1, 2, \dots$  является марковским с плотностью перехода (22). Для полного описания этого процесса надо определить начальную безусловную плотность распределения  $f(\eta_1, a_1)$ . Поскольку начальный отбор в ЭГ соответствует событию  $a_1 = 1$ , данная плотность легко вычисляется:

$$f(\eta_1, a_1 = 1) = \frac{\delta(a_1 - 1)}{2(1 - x_{\text{пор}}(1 - P_{\text{ош}}))} \times \left[ \text{sign}(1 - \eta_1) - (1 - P_{\text{ош}})\text{sign}(x_{\text{пор}} - \eta_1) + P_{\text{ош}} \text{sign}(\eta_1) \right], \quad (23)$$

где  $\text{sign}(\cdot)$  — функция «знака».

Условное математическое ожидание распределения с плотностью перехода (22)

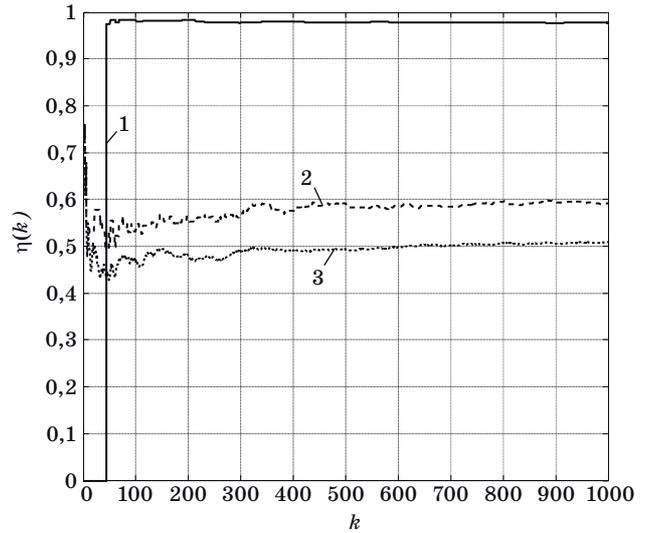
$$E\{\eta_k | \eta_{k-1}, a_{k-1}\} = \eta_{k-1} - P_{\text{ош}} \frac{2\eta_{k-1} - 1}{2(a_{k-1} + 1)}. \quad (24)$$

Поскольку при  $k \rightarrow \infty$   $a_{k-1} \rightarrow \infty$ , происходит стабилизация среднего уровня ЭГ на некотором асимптотическом значении  $\bar{\eta}_{\infty}^{\text{ош}}$ . Уравнение (24) позволяет определить этот уровень. Очевидно, что при  $\eta_{k-1} = 0,5$  второе слагаемое в (24) становится равным нулю, и, следовательно,  $\bar{\eta}_{\infty}^{\text{ош}} = 0,5$ . Таким образом, при  $P_{\text{ош}} > 0$  средний уровень элиты неминуемо становится равным среднему уровню популяции  $\bar{x} = 0,5$ . От вероятности ошибки отбора  $P_{\text{ош}}$  будет зависеть лишь длительность переходного процесса: чем меньше  $P_{\text{ош}}$ , тем большее время потребуется для стабилизации среднего уровня элиты.

Реализации процесса  $\bar{\eta}(k)$  для трех рассмотренных сценариев отбора представлены на рис. 2 при  $P_{\text{отб}} = 0,05$  ( $x_{\text{пор}} = 0,95$ ) и  $P_{\text{ош}} = 0,20$  в дискретном времени. Сравнение кривых на рисунке позволяет сделать следующие выводы.

1. При отборе без ошибок средний уровень элиты быстро стремится к значению  $\bar{\eta}_{\infty} = 0,975$  и в дальнейшем слабо флуктуирует около этого уровня. Дисперсия флуктуаций уменьшается с течением времени.

2. При отборе с ошибками по обоим сценариям наблюдается длительный переходный процесс, в результате которого  $\eta(k)$  стремится к асимптотическому значению  $\bar{\eta}_{\infty}^{\text{ош}}$  и в дальнейшем также слабо флуктуирует около этого уровня. Дисперсия флуктуаций тоже уменьшается с течением времени, но ее величина больше, чем при отборе без ошибок. При этом во время переходного процесса возможно значительное уменьшение среднего уровня элиты по сравнению с асимпто-



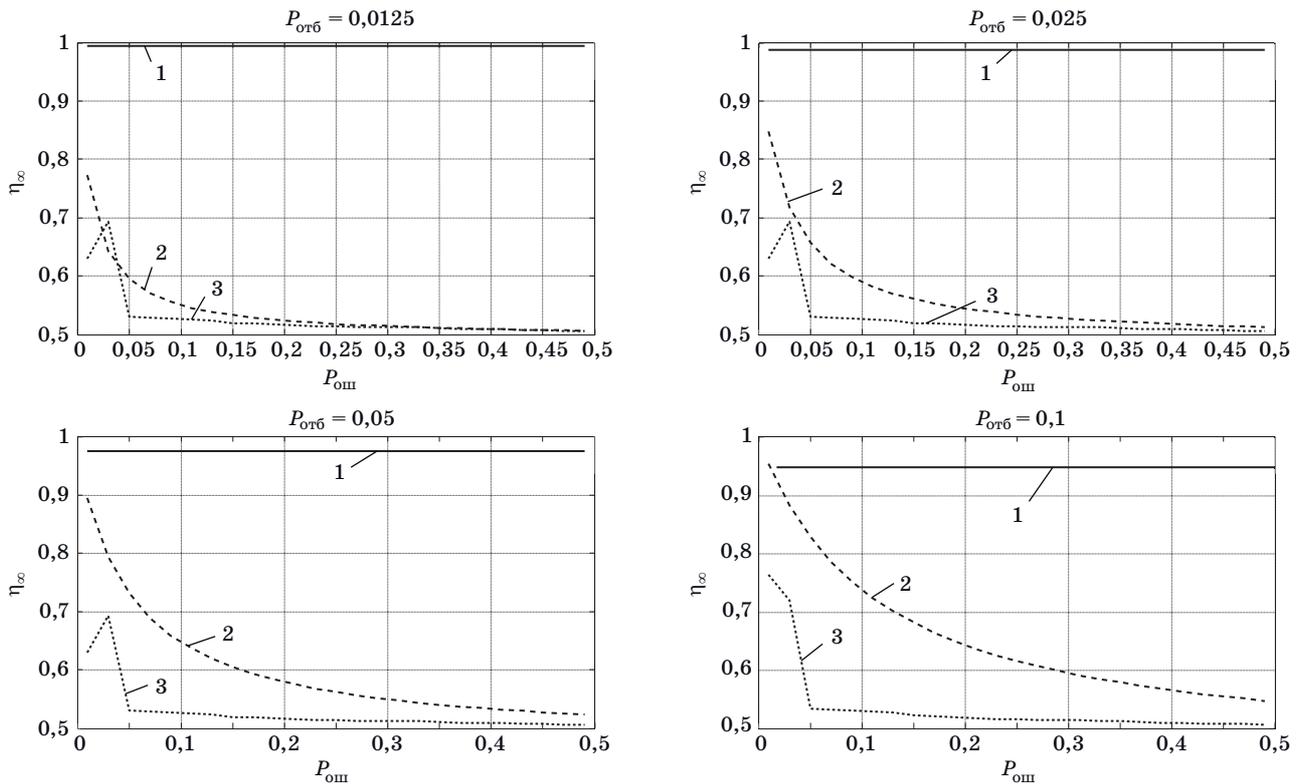
■ **Рис. 2.** Изменение среднего уровня полезности во времени для различных сценариев отбора при  $P_{\text{отб}} = 0,05$  ( $x_{\text{пор}} = 0,95$ ) и  $P_{\text{ош}} = 0,20$ : 1 — без ошибки; 2 — первый сценарий; 3 — второй сценарий

■ **Fig. 2.** Changing of the mean level of utility over time for different scenarios of selection for  $P_{\text{отб}} = 0,05$  ( $x_{\text{пор}} = 0,95$ ) and  $P_{\text{ош}} = 0,20$ : 1 — without error; 2 — first scenario; 3 — second scenario

тическим значением  $\bar{\eta}_{\infty}^{\text{ош}}$ . Так, для реализаций на рис. 2 средний уровень принимал значения ниже среднего уровня всей популяции  $\bar{x} = 0,5$ , причем для второго сценария промежуток времени, когда средний уровень ЭГ был ниже среднего уровня всей популяции, был достаточно продолжительным.

3. Ошибки при отборе резко снижают средний уровень ЭГ. Это может иметь катастрофические последствия, особенно для отбора с ошибками по второму сценарию, при котором средний уровень элиты только по прошествии достаточно продолжительного переходного процесса стабилизируется на уровне  $\bar{x} = 0,5$ .

В соответствии с уравнениями (12) и (17) рассчитаны зависимости математического ожидания  $\bar{\eta}_{\infty}$  от вероятности ошибки  $P_{\text{ош}}$  при различных значениях  $P_{\text{отб}}$  (рис. 3). Соответствующая кривая для второго сценария получена по результатам математического моделирования. Небольшие отклонения от уровня  $\bar{x} = 0,5$  для этой кривой объясняются необходимостью моделировать очень длинные серии отбора при малых значениях вероятности ошибки  $P_{\text{ош}}$ . Это невозможно в условиях конечности времени моделирования. Графики на рисунке свидетельствуют о значительной разнице результатов отбора по рассматриваемым сценариям. Для первого сценария асимптотический уровень полезности ЭГ, оставаясь больше среднего уровня полезности всей популяции, монотонно убывает с увеличением



■ **Рис. 3.** Зависимости асимптотического среднего уровня полезности элиты  $\bar{\eta}_\infty$  от вероятности ошибки  $P_{ош}$  при различных значениях вероятности отбора  $P_{отб}$  для трех сценариев отбора: 1 — без ошибки; 2 — первый сценарий; 3 — второй сценарий

■ **Fig. 3.** Plots of the asymptotic mean level of utility of the elite via the probability of the error  $P_{ош}$  for different probabilities of selection  $P_{отб}$  and selection scenarios: 1 — without error; 2 — first scenario; 3 — second scenario

вероятности ошибки  $P_{ош}$ . Для второго сценария при любом значении вероятности ошибки асимптотический уровень равен среднему уровню полезности популяции. Таким образом, в ситуации, когда элита сама начинает устанавливать правила отбора, неминуемо происходит ее засорение, и с течением времени представители элиты в среднем перестают отличаться от других членов популяции по уровню своей полезности.

**Заключение**

В работе дан вероятностный анализ процесса формирования ЭГ в популяции с равномерным распределением уровня полезности. Рассмотрены два сценария отбора в ЭГ: отбор с фиксированным порогом уровня полезности кандидатов и отбор с порогом, величина которого зависит от среднего уровня полезности членов самой ЭГ. В обоих случаях при отборе допускаются случайные ошибки с некоторой вероятностью. Установлено, что при отборе по первому сценарию средний уровень полезности элиты стремится к уровню, величина которого даже при больших вероятностях ошиб-

ки отбора больше среднего уровня полезности по всей популяции в целом. Однако если считать недопустимым уменьшение среднего уровня полезности элиты ниже порога отбора, вероятность ошибок при отборе должна быть меньше или равна квадрату вероятности попадания члена популяции в ЭГ. При втором сценарии, когда порог отбора фактически определяется самой элитой, средний уровень полезности стремится к значению этого параметра по всей популяции независимо от вероятности ошибки отбора. Величина последней влияет только на длительность переходного процесса, в течение которого элита «растворяется» в популяции, и ее представители в среднем перестают отличаться от других членов популяции по уровню своей полезности.

Учитывая, что ЭГ в значительной мере влияет на состояние популяции, следует признать, что для ее правильного формирования должен использоваться сценарий с фиксированным, высоким порогом отбора. Тогда, несмотря на возможные ошибки при отборе, вероятность появления которых надо по возможности уменьшать, в элиту с большой вероятностью будут попадать члены с высоким уровнем полезности.

## Литература

1. Бухарин С. Н., Малков С. Ю. *Эволюция элиты (материалы и исследования)*. М., Академический проект, Гаудеамус, 2014. 281 с.
2. Араби Б. Ибн-Хальдун — основоположник арабской социологии. *Социологические исследования*, 1990, № 11, с. 107–109.
3. Ашин Г. К. Элитология в системе общественных наук. *Общественные науки и современность*, 2003, № 4, с. 124–134.
4. Ашин Г. К. *Курс истории элитологии*. М., МГИМО, 2003. 302 с.
5. Lopez M. Elite theory. *Sociopedia.isa*, 2013. <http://www.sagepub.net/isa/resources/pdf/elitetheory.pdf> (дата обращения: 21.11.2018). doi:10.1177/2056846013112
6. Perez R. M. On Pareto theory of circulation of elites. *Archiv.org*, 2014. <https://arxiv.org/pdf/1412.4695.pdf> (дата обращения: 21.11.2018).
7. Волков С. В. *Элитные группы традиционных обществ*. М., Изд-во ун-та Дмитрия Пожарского; Русский фонд содействия образованию и науке, 2017. 343 с.
8. Amsden A. H., DiCaprio A., Robinson J. *The role of elites in economic development. UNU-WIDER studies in development economics*. Oxford, Oxford University Press, 2014. 398 p.
9. Fisman R., Jakiela P., Kariv S., Markovits D. The distributional preferences of an elite. *Science*, 2015, vol. 349, no. 6254. doi:10.1126/science.aab0096
10. Turchin P. *Historical dynamics: why states rise and fall*. Princeton, Princeton University Press, 2003. 257 p.
11. Малков С. Ю. *Социальная самоорганизация и исторический процесс: Возможности математического моделирования*. М., ЛИБРОКОМ, 2009. 236 с.
12. Михайлов А. П. Математическое моделирование динамики распределения власти в иерархических структурах. *Математическое моделирование*, 1994, № 6, с. 108–138.
13. Дмитриев М. Г., Павлов А. А., Петров А. П. *Развитие модели «власть — общество — экономика» / Математическое моделирование социальных процессов: сб.*, 2009, вып. 10, с. 17–29.
14. Бухарин С. Н., Малков С. Ю. Математическое моделирование эволюции элиты. *Информационные войны*, 2013, № 1(25), с. 21–31.
15. Ефимов А. Н., Кутеев В. М. Исследование и моделирование некоторых свойств элитных групп. *Изв. АН СССР. Техническая кибернетика*, 1980, № 3, с. 177–185.
16. Ефимов А. Н., Кутеев В. М. Ранговые процедуры управления эволюцией элитных групп. *Изв. АН СССР. Техническая кибернетика*, 1980, № 6, с. 3–12.
17. Ефимов А. Н., Кутеев В. М. Эволюция элитных групп, сформированных делегированием. *Автоматика и телемеханика*, 1990, № 12, с. 143–152.
18. Ефимов А. Н. Элитные группы, их возникновение и эволюция. *Образовательная политика*, 2011, № 1(51), с. 17–23 (впервые опубли. в журнале «Знание — сила», 1988, № 1, с. 56–64).
19. Кутлалиев А. Математический принцип выживания элит. Почему демократия — лучшая из худших политических систем. *Независимая газета*. [http://www.ng.ru/ng\\_politics/2014-03-04/14\\_elites.html?print=Y](http://www.ng.ru/ng_politics/2014-03-04/14_elites.html?print=Y) (дата обращения: 21.11.2018).

UDC 519.2

doi:10.31799/1684-8853-2019-1-57-64

## Statistical characteristics of the mean level of an elite group utility in selection

A. A. Monakov<sup>a</sup>, Dr. Sc., Tech., Professor, [orcid.org/0000-0003-4469-0501](http://orcid.org/0000-0003-4469-0501), [a\\_monakov@mail.ru](mailto:a_monakov@mail.ru)<sup>a</sup>Saint-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, 67, B. Morskaya St., 190000, Saint-Petersburg, Russian Federation

**Introduction:** The development of biological and social systems is largely determined by the utility level of the elite group which stands out from the main population, being characterized by a high status. An elite group development process is random due to unavoidable errors in selection. The degree of influence of these errors on the utility level of an elite group can differ depending on the selection rules. **Purpose:** Evaluation of the influence of selection rules on the dynamics of the mean level of an elite group utility. **Results:** We have studied the dynamically changing probabilistic characteristics of an average elite group utility level, following two different selection scenarios: with a fixed threshold, and with a threshold determined by the mean level of the group utility achieved by the moment of the selection. It has been found out that in the first scenario the mean level of the elite group utility tends to a level whose value, even when the selection error probability is high, is greater than the mean utility level for the whole population. However, if it is unacceptable to reduce the mean level of the elite utility below the selection threshold, the error probability should be less than or equal to the square of the probability that a population member is selected for the elite group. It is proved that in the second scenario the mean level of the elite group utility tends to the mean value of this parameter for the whole population, regardless of the selection error probability. The latter affects only the duration of the transition process during which the elite «dissolves» in the population and its representatives cease to differ on average from the other members of the population in terms of their utility. The concept of critical probability of selection errors is introduced, at which the mean level of the elite group utility is equal to the lowest permissible boundary. **Practical relevance:** It is proved that correct elite development requires a selection scenario with a fixed high threshold. The calculated value of the critical probability of selection errors can be used to control the development of an elite group.

**Keywords** — elite, elite group, member status, utility level, selection, selection error probability.

**For citation:** Monakov A. A. Statistical characteristics of the mean level of an elite group utility in selection. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2019, no. 1, pp. 57–64 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2019-1-57-64

## References

1. Bukharin S. N., Malkov S. Yu. *Evolucia elity (materially i issledovaniya)* [Evolution of the elite (materials and research)]. Moscow, Academicheskii proect, Gaudeamus Publ., 2014. 281 p. (In Russian).
2. Arabi B. Ibn Khaldun — the founder of Arab sociology. *Sociologicheskie issledovaniya* [Sociological Studies], 1990, no. 11, pp. 107–109 (In Russian).
3. Ashin G. K. Elitology in the system of social sciences. *Obshchestvennye nauki i sovremennost'*, 2003, no. 4, pp. 124–134 (In Russian).
4. Ashin G. K. *Kurs istorii elitologii* [The course of the history of elitology]. Moscow, Moskovskij gosudarstvennyj institut mezhdunarodnyh otnoshenij Publ., 2003. 302 p. (In Russian).
5. Lopez M. Elite theory. *Sociopedia.isa*, 2013. Available at: <http://www.sagepub.net/isa/resources/pdf/elitetheory.pdf> (accessed 21 November 2018). doi:10.1177/2056846013112
6. Perez R. M. On Pareto theory of circulation of elites. *Archiv.org*, 2014. Available at: <https://arxiv.org/pdf/1412.4695.pdf> (accessed 21 November 2018).
7. Volkov S. V. *Elitnye gruppy traditsionnyh obschestv* [Elite groups of traditional societies]. Moscow, Universitet Dmitriya Pozharskogo; Russkij fond sodejstviya obrazovaniyu i nauke Publ., 2017. 343 p. (In Russian).
8. Amsden A. H., DiCaprio A., Robinson J. *The role of elites in economic development. UNU-WIDER studies in development economics*. Oxford, Oxford University Press, 2014. 398 p.
9. Fisman R., Jakiela P., Kariv S., Markovits D. The distributional preferences of an elite. *Science*, 2015, vol. 349, no. 6254. doi:10.1126/science.aab0096
10. Turchin P. *Historical dynamics: why states rise and fall*. Princeton, Princeton University Press, 2003. 257 p.
11. Malkov S. Yu. *Social'naya samoorganizatsia i istoricheskii progress: Vozmozhnosti matematicheskogo modelirovaniya* [Social self-organization and historical process: Possibilities of mathematical modeling]. Moscow, LIBROKOM Publ., 2009. 236 p. (In Russian).
12. Mikhailov A. P. Mathematical modeling of the dynamics of the distribution of power in hierarchical structures. *Matematicheskoe modelirovanie* [Mathematical Models and Computer Simulations], 1994, vol. 6, no. 6, pp. 108–138 (In Russian).
13. Dmitriev M. G., Pavlov A. A., Petrov A. P. *Razvitie modeli "vlact" — obschestvo — ekonomika*. In: *Matematicheskoe modelirovanie social'nyh processov* [Development of the model "power — society — economy". In: Scientific and technical collection "Mathematical modeling of social processes"], 2009, iss. 10, pp. 17–29 (In Russian).
14. Bukharin S. N., Malkov S. Yu. Mathematical modeling of the evolution of the elite. *Informacionnye vojny*, 2013, no. 1(25), pp. 21–31 (In Russian).
15. Efimov A. N., Kuteev V. M. Research and modeling of some properties of elite groups. *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Tehnicheskaja kibernetika*, 1980, no. 3, pp. 177–185 (In Russian).
16. Efimov A. N., Kuteev V. M. Rank management procedures for the evolution of elite groups. *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Tehnicheskaja kibernetika*, 1980, no. 6, pp. 3–12 (In Russian).
17. Efimov A. N., Kuteev V. M. Evolution of elite groups formed by delegating. *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and Remote Control], 1990, vol. 51, no. 12, pp. 1725–1732 (In Russian).
18. Efimov A. N. Elite groups, their origin and evolution. *Obrazovatel'naya politika* [Educational Policy Journal], 2011, no. 1(51), pp. 17–23 (firstly published in "Znanie — sila", 1988, no. 1, pp. 56–64) (In Russian).
19. Kutlaliyev A. The mathematical principle of elite survival. Why democracy is the best of the worst political systems. *Nezavisimaya Gazeta*. Available at: [http://www.ng.ru/ng\\_politics/2014-03-04/14\\_elites.html?print=Y](http://www.ng.ru/ng_politics/2014-03-04/14_elites.html?print=Y) (accessed 21 November 2018) (In Russian).

## УВАЖАЕМЫЕ АВТОРЫ!

Научная электронная библиотека (НЭБ) продолжает работу по реализации проекта SCIENCE INDEX. После того как Вы регистрируетесь на сайте НЭБ (<http://elibrary.ru/defaultx.asp>), будет создана Ваша личная страничка, содержание которой составят не только Ваши персональные данные, но и перечень всех Ваших печатных трудов, имеющих в базе данных НЭБ, включая диссертации, патенты и тезисы к конференциям, а также сравнительные индексы цитирования: РИНЦ (Российский индекс научного цитирования), h (индекс Хирша) от Web of Science и h от Scopus. После создания базового варианта Вашей персональной странички Вы получите код доступа, который позволит Вам редактировать информацию, помогая создавать максимально объективную картину Вашей научной активности и цитирования Ваших трудов.

## Evolution of multiple-access networks – cellular and non-cellular – in historical perspective. Part 4

A. M. Sergeev<sup>a</sup>, Senior Lecturer, [orcid.org/0000-0002-4788-9869](https://orcid.org/0000-0002-4788-9869)

N. Sh. Blaunstein<sup>b</sup>, Dr. Sc., Phys.-Math., Professor, [nathan.blaunstein@hotmail.com](mailto:nathan.blaunstein@hotmail.com)

<sup>a</sup>Saint-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, 67, B. Morskaya St., 190000, Saint-Petersburg, Russian Federation

<sup>b</sup>Ben-Gurion University of the Negev, P.O.B. 653, 1, Ben-Gurion St., Beer-Sheva, 84105, Israel

**Introduction:** The goal of this issue is the analysis of evolution of the current and novel wireless networks, from second generation (2G) to fifth generation (5G), as well as changes in technologies and their corresponding theoretical background and protocols – from Bluetooth, WLAN, WiFi and WiMAX to LTE, OFDM/OFDMA, MIMO and LTE/MIMO advanced technologies with new hierarchy of cellular maps design – femto/pico/micro/macro. **Methods:** We use new theoretical frameworks for description of the advanced technologies, such as multicarrier diversity technique, OFDM and OFDM novel approach, MIMO aspects description based on multi-beam antennas approach, various cellular maps design based on a new algorithms of femto/pico/micro/macrocell deployment, and a new methodology of a new MIMO/LTE system integration based on multi-beam antennas. **Results:** We have created a new methodology of multi-carrier diversity description for novel multiple-access networks, of usage of OFDM/OFDMA modulation to obey inter-user and inter-symbol interference in multiple-access networks, of how to obey the multiplicative noises occurring in the multiple-access wireless networks, caused by multi-ray phenomena, and finally, of how to overcome propagation effects occurring in the terrestrial communication links by use combination of MIMO and LTE technologies based on multi-beam antennas. For these purposes we present new stochastic approach that accounts for the terrain features, such as buildings' overlay profile, buildings' density around the base station and each user antennas, and so forth. These parameters allow us to estimate for each situation occurs at the built-up terrain area the effects of fading, as a source of multiplicative noise. **Practical relevance:** New methodology of how to estimate effects of multiplicative noise, inter-user and inter-symbol interference, occurring in the terrestrial wireless networks, allows us to predict a-priori practical aspects of the current and new multiple-access wireless communication networks, such as: the users' capacity and user's links spectral efficiency for various configurations of cells deployment – femto, pico, micro, and macro, as well as the novel MIMO/LTE system configuration for future networks of 4<sup>th</sup> and 5<sup>th</sup> generation deployment.

**Keywords** – network capacity, LTE releases, multiple-input-multiple-output, MIMO, multiple user, MU, single-input-single-output, SISO, single-input-multiple-output, SIMO, single carrier, SC, single user, SU, spectral efficiency, user equipment, UE, wireless fidelity network, WiFi, wireless metropolitan area network, WiMAX.

**For citation:** Sergeev A. M., Blaunstein N. Sh. Evolution of multiple-access networks – cellular and non-cellular – in historical perspective. Part 4. *Informatsionno-upravliayushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2019, no. 1, pp. 65–75. doi:10.31799/1684-8853-2019-1-65-75

Ending.

Start in *Informatsionno-upravliayushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2018, no. 4, pp. 86–104, doi:10.31799/1684-8853-2018-4-86-104; 2018, no. 5, pp. 94–103, doi:10.31799/1684-8853-2018-5-94-103; 2018, no. 6, pp. 82–94, doi:10.31799/1684-8853-2018-6-82-94

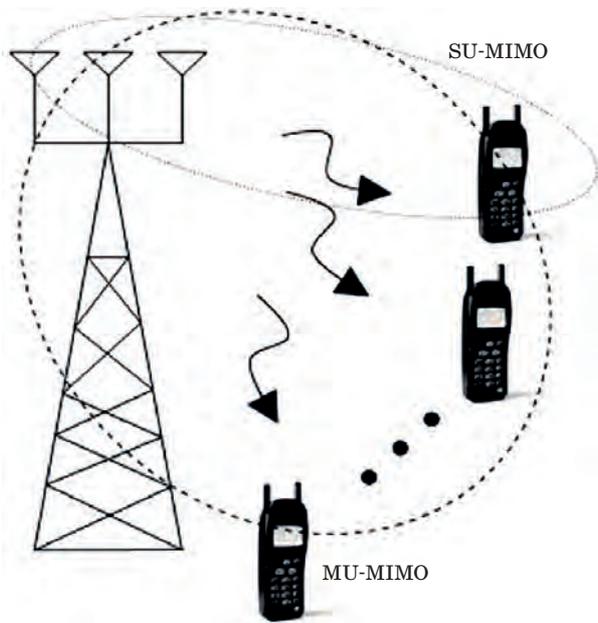
### SU/MU MIMO technology embedded into LTE network

However, even using a single-carrier (SC) or single-user (SU) FDMA modulation technique for uplink transmission and a SC-OFDMA technique for downlink transmissions (see definitions in [147]), it is difficult to provide a wide range of spectra allocations of different sizes for each subscriber located in various terrestrial conditions, as well as a significant increase in spectrum efficiency compared to previous 2G and 3G cellular networks. This can be achieved only by combining Advanced FDMA and OFDMA technologies with MIMO systems performed on the basis of multi-beam or phased-array antennas [135–143]. The LTE Release 8 was recently expanded from two to 4 antennas in downlink spatial multiplexing from a BS, as shown in Fig. 26

(called also SIMO (single-input-multiple-output)-LTE system).

Here, the layers can be defined as simultaneously transmitted streams of data to multiple UEs using the same time-frequency resource. In such a manner, any transmission of separate data streams is distributed among desired layers. The pre-coder matrix indicator (or selection suggestion matrix) is needed to transfer the selected data for each desired user (see details in reference [143]). The LTE Release 9, as a new dual-layer transmission mode, also was performed for supporting of up to 4 transmitted antennas at the BS in downlink channel.

Now we postulate the following question: if both LTE Releases 8 and 9 could be integrated with MIMO, can such a combined LTE-MIMO system satisfy the International Mobile Telephony (IMT) requirements. Table 2 presents a comparative anal-



■ Fig. 26. Geometrical configuration of SU-MIMO and MU (multiple user)-MIMO in integrated LTE-MIMO system

■ Table 2. Requirements of IMT-Advanced (LTE Release 10) vs. LTE Release 8 system (extracted from Internet)

		IMT-Advanced requirement	LTE Release 8
Transmission bandwidth, MHz	—	At least 40	Up to 20
Peak spectral efficiency, bps/Hz	DL	15	16
	UL	6.75	4
Latency, ms	Control plane	Less than 100	50
	User plane	Less than 10	4.9

ysis of these requirements with respect to those that satisfy the deployments of LTE Release 8 system. It is clear seen that, even giving better latency for each UE, but using twice-narrower bandwidth, Release 8 cannot support high-rate transmission of data streams for each individual user. A fully-adaptive MU-MIMO transmission mode cannot be realized in cooperation with LTE Release 8 and LTE Release 9 [132, 133, 142, 144].

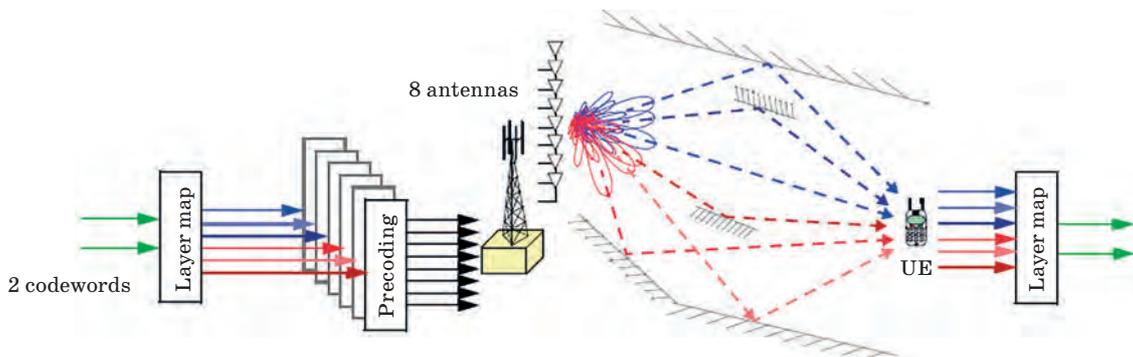
Recently, a new MU-MIMO antenna system was introduced called the Advanced LTE (A-LTE) or, simply, LTE Release 10 [140–142]. We will introduce this advanced technology since, as was mentioned in references [145], it is better equipped to meet the requirements of the modern 4<sup>th</sup> generation of wireless networks.

As seen in Fig. 27, the LTE Release 10, or A-LTE, can use at BS with at least 8 separate antennas for downlink MU connections, whereas for uplink, up to 4 UE antennas can be utilized. Here, a layer mapping supports the transfer of individual codes from 2 codebooks to each pre-decoding layer.

At the MU terminals, a de-mapping layer is used for transporting to each individual user its desired data codes. The use of a MIMO system at both end terminals allows for:

- fast user channel estimation, selecting and equalization;
- reliable cancellation of MU interference;
- simplification of complexity of the interference-aware receiver;
- reduction of the system’s detection complexity;
- fitting of each single antenna of UEs in MIMO configuration;
- better implementation in the existing hardware, and so on.

In works [134, 143, 145] were introduced the scheduling algorithms, based on the geometrical alignment at the BS, which can minimize the IUI seen by each UE. In such a configuration, the proposed interference-aware receiver was found as a



■ Fig. 27. Downlink transmission from BS arranged by 8 antennas to UEs in MIMO-LTE integrated network (rearranged from [131, 140, 141])

good candidate for the practical implementation in MU-MIMO LTE Release 10 combined system.

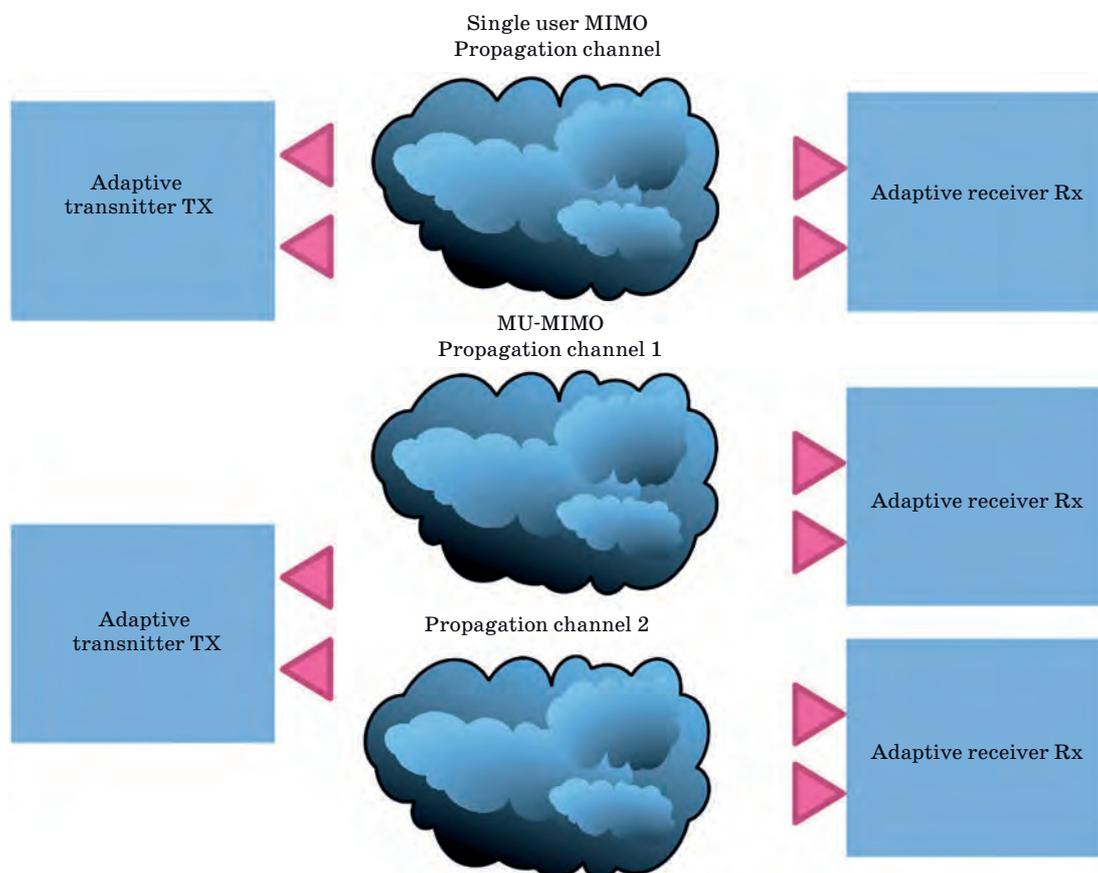
To show the difference between the SU-SISO (single user single-input-single-output), MU-MIMO systems and the latter based on multi-beam antennas, we schematically presented them in Fig. 28. The first system is based on point-to-point single BS and single UE antennas, whereas the second one is based on multiple antennas from both side terminals [146].

To show the efficiency of usage of combination of MIMO/LTE network based on multi-beam antennas with respect to SISO network, we present the computations of a normalized maximum sum rate  $I$  [in bits/s/Hz] of downlink based on the mathematical algorithm fully described in [146]. In simulations, we account for a SU-SISO (that is, for  $M = 1, N = 1$ ), for a SU-SIMO (single user single-input-multiple-output) (that is, for  $M = 1, N = 4$ ), and for a MU-MIMO (that is, for  $M = 4, N = 4$ ) integrated schemes (in the case of antenna correlated elements). The results of the numerical experiment are shown in Fig. 29.

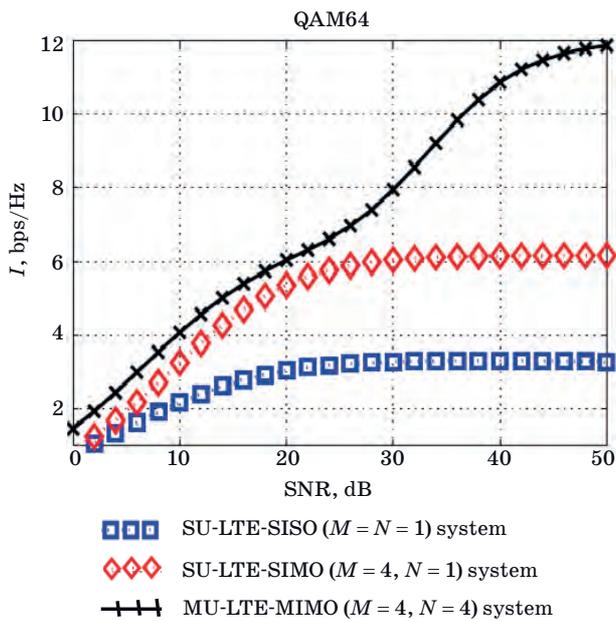
It is clear seen from the presented illustrations that using the MU-MIMO system of various input-output antenna elements integrated as an example, with an Advanced LTE technology, it

is possible to increase the spectral efficiency and the data rate in such an integrated MU-MIMO network. Moreover, both SU-SIMO (or MISO) LTE and MU-MIMO LTE integrated systems, with a high correlation between transmitter and receiver multi-beam antennas (Fig. 30), show better performance in spectral efficiency and data stream rate [146]. Thus, it can be seen that the LTE-SU Rx gives low spectral efficiency and data rate with respect to the MU-MIMO A-LTE system. The later has a tendency to increase spectral efficiency and data rate per several times with respect to the previous systems and this tendency increases with an increase in SNR. With increase of amount of UE antennas and BS antennas this difference becomes more significant.

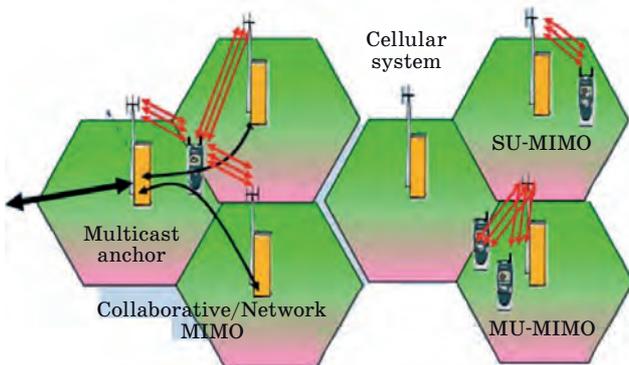
Finishing this paragraph, we should outline that by controlling of number of elements of multi-beam antennas at the both end terminals, BS and UEs, and *a priori* accounting for the real responses of each channel on multipath fading phenomena (by prediction of the real  $K$ -factor of fading) [148], we show the same effects, as were obtained in [140, 142–145], where a set of precoding codebooks (from one to several) was introduces for extension of the LTE Releases 8 to 10, using MIMO configurations with 2 or 4 transmitting antennas, or a dual-code-



■ Fig. 28. Single user SISO network (top panel) and multiple user MIMO network (bottom panel)



■ Fig. 29. Spectral efficiency (extracted from [146] with the same notations, as done in [134])



■ Fig. 30. The proposed implementation of cellular, LTE and SU/MU-MIMO systems into the integrated configuration of future 4<sup>th</sup> generation network

book deployment [134] for MIMO configuration with 8 transmitting antennas at the BS terminal. What is important to notice is that the main limiting factors that can decrease efficiency of the proposed MIMO system integrated, for example, with the Advanced LTE Releases from 8 to 10, observed during numerical computations based on the real experiment carried in built-up area, are the *K*-factor of fading, as a response of each individual communication channel on data transmission, and number of antenna beams within each terminal of the system, BS and UE.

Despite the fact that the approaches, proposed in [134, 140, 142–145] can significantly reduce a total LTE/MIMO system structure yielding a low-complexity of signal processing against inter-user in-



■ Fig. 31. LTE-MIMO network configuration based on multi-beam antennas

terference, as was shown in [146], without accounting for derivation of the *K*-factor based on various topographic scenarios of the built-up areas of service, as well as for the effective configuration of MIMO system based on multi-beam antennas [146], it is impossible a priori predict data stream parameters and efficiency of each specific propagation channel “hidden” in the whole system, based on strict analysis of the channel response, and, finally, increase efficiency of the proposed Advanced LTE/MIMO-R10 network by managing and control of its GoS and QoS.

Finally, following results obtained in references [135–146], as well as the recommendations stated there, we present the reader the following configuration of the SU-MIMO and MU-MIMO integrated with Advanced LTE, “hidden” into the conventional cellular-map scheme, as is shown in Fig. 31.

Such configurations can be extended for the combined femtocell/picocell/microcell/macroc cell planning tool design (see Fig. 31).

These schemes can be considered as a best candidate of the convenient configurations that satisfied requirements of the 4<sup>th</sup> and 5<sup>th</sup> generation networks.

### Summary

In Section 1, we introduced the reader into the conventional and current techniques, technologies and systems adapted for 2<sup>nd</sup> (2G) and 3<sup>rd</sup> (3G) generations of wireless networks, as well as the advanced technologies and their corresponding protocols used to utilize modern networks beyond 3G, such as 4<sup>th</sup> and 5<sup>th</sup> generations. A new generations, called 4<sup>th</sup> (4G) and 5<sup>th</sup> (5G), were introduced, which are ex-

■ **Table 3.** IMT requirements for 4<sup>th</sup> generation vs. the last LTE Releases and WiMAX 1<sup>st</sup> and 2<sup>nd</sup> generations of networks

		IMT-Advanced requirement	LTE Release 8	LTE Release 10	Wimax 1.0	Wimax 2.0
Transmission Bandwidth, MHz	—	At least 40	Up to 20	Up to 100	Up to 10	Up to 40
Peak spectral Efficiency, bps/Hz	DL	15	16	16	6.4	15
	UL	6.75	4	8.1	2.8	6.75
Latency, ms	Control plane	< 100	50	50	50	30
	User plane	< 10	4.9	4.9	20	10

pected to be capable of providing wider bandwidth, higher data stream rates, greater interoperability accords various communication protocols, without any collusion between them, user’s security and non-collision communications between users, that is, to provide significant increase in GoS and QoS.

Thus, typical 2G standards as GSM (Global System for Mobile Communications) operated at 900 to 1900 MHz frequency band, which used TDMA/FDMA separate or combined digital modulation techniques, have not satisfied the high-data communication requirement. The Universal Mobile Telecommunications Systems (UMTS) standards that were related to 2.5G and 3G mobile systems, dealt with higher voice capacity and higher-speed digital data. The same parameters were expected for 3G communication networks such as WPAN (or Bluetooth), WiFi (or WLAN), WiMAX; all described briefly above. Unfortunately, even integrating and combined the existing 2G and 3G networks, technologies and protocols, was problematic to achieve 200 Mbps–1 Gbps data rate, multimedia (video and audio) applications, as well as terminal’s heterogeneity related to significant decrease of the network costs, greater mobile signal availability in a “jungle of noises” caused by multipath fading.

For these reasons in the 4<sup>th</sup> and 5<sup>th</sup> generations, a physical layer was significantly broadened by serving a wide range of frequency bands (see Sections 2 and 3).

In our opinion, recently performed modern LTE and LTE-A networks integrated with MIMO systems based on multi-antenna (multi-beam or phased-array) technology, briefly described in Sections 4, can substantially improve 4G network spectrum efficiency providing three kind of advantages with respect to single antenna LTE system:

- transmit time diversity;
- beamforming;
- spatial multiplexing.

All these advantages are shown in Table 3. Moreover, using spatial multiplexing, the number of simultaneously transmitted data streams, as well as the beam pattern for each transmitted data stream, can be managed and controlled by the corresponding protocol to optimize the 4<sup>th</sup> and 5<sup>th</sup> networks’ capacity.

Therefore, such integration of a MIMO system with LTE-A technology allows us to avoid, in practice, all the drawbacks related to the previous generations described above. It also allows designers of modern 4<sup>th</sup> generation of wireless networks improve their GoS and QoS, protecting against ISI and ICI caused by multipath fading phenomena, mentioned in Section 1, increase their frequency spectral allocation, and finally, minimize bit error rate and packet error rate. All these aspects fully correspond to the main aim of the authors of this book, that is, show the reader on how should be completely integrated all basic components of the wireless network:

- the physical layer, based on multipath fading phenomena;
- signal processing, based on modulation techniques;
- protocols and accesses of multiuser servicing;
- antenna design layer, based on performance of multi-beam and phased-array antennas, and so on.

Of course, there are other components of each wireless network — the architecture and electronic circuits, based on different elements of the system hardware, such as RAKE detector, correlators, filters, and so on. These aspects are out of scope of this special issue, and we refer the reader to the excellent books and articles presented below in bibliography [4–9, 11–20].

## References

1. **Jakes W. C.** *Microwave Mobile Communications*. Wiley, New York, 1974.
2. **Lee S. C. Y.** *Mobile Cellular Telecommunication Systems*. McGraw-Hill, New York, 1989.
3. **Steele R.** *Mobile Radio Communication*. IEEE Press, 1992.
4. **Proakis J. G.** *Digital Communications* (3d ed.). McGraw-Hill, New York, 1995.
5. **Stuber G. L.** *Principles of Mobile Communications*. Kluwer Academic Publishers, Boston, 1996.
6. **Peterson R. L., Ziemer R. E., and Borth D. E.** *Introduction to Spread Spectrum Communications*. Prentice Hall PTR, New Jersey, 1995.
7. **Rappaport T. S.** *Wireless Communications: Principles and Practice*. Prentice Hall PTR, New Jersey, 1996 (2<sup>nd</sup> ed. in 2001).
8. **Steele R., and Hanzo L.** *Mobile Communications*. 2<sup>nd</sup> ed. John Wiley & Sons, Chichester, 1999.
9. **Li J. S., and Miller L. E.** *CDMA Systems Engineering Handbook*. Artech House, Boston-London, 1998.
10. **Saunders S. R.** *Antennas and Propagation for Wireless Communication Systems*. John Wiley & Sons, Chichester, 2001.
11. **Burr A.** *Modulation and Coding for Wireless Communications*. Prentice Hall PTR, New Jersey, 2001.
12. **Molisch A. F. (Ed.)**. *Wideband Wireless Digital Communications*. Prentice Hall PTR, New Jersey, 2000.
13. **Paetzold M.** *Mobile Fading Channels: Modeling, Analysis, and Simulation*. John Wiley & Sons, Chichester, 2002.
14. **Simon M. K., Omura J. K., Scholtz R. A., Levitt B. K.** *Spread Spectrum Communications Handbook*. McGraw-Hill, New York, 1994.
15. **Glisic S. and Vucetic B.** *Spread Spectrum CDMA Systems for Wireless Communications*. Artech House, Boston-London, 1997.
16. **Dixon R. C.** *Spread Spectrum Systems with Commercial Applications*. John Wiley & Sons, Chichester, 1994.
17. **Viterbi A. J.** *CDMA: Principles of Spread Spectrum Communication*. Addison-Wesley Wireless Communications Series, 1995.
18. **Goodman D. J.** *Wireless Personal Communication Systems*. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1997.
19. **Schiller J.** *Mobile Communications*. 2<sup>nd</sup> ed. Addison-Wesley Wireless Communications Series, 2003.
20. **Molisch A. F.** *Wireless Communications*. John Wiley & Sons, Chichester, 2007.
21. **Blaunstein N. and Christodoulou C.** *Radio Propagation and Adaptive Antennas for Wireless Communication Links*. 1<sup>st</sup> ed. Wiley & Sons, New Jersey, 2007.
22. **Blaunstein N. and Christodoulou C.** *Radio Propagation and Adaptive Antennas for Wireless Communication Networks — Terrestrial, Atmospheric and Ionospheric*. 2<sup>nd</sup> ed. Wiley & Sons, New Jersey, 2014.
23. **Hadar O., Bronfman I., and Blaunstein N. S.** Optimization of Error Concealment Based on Analysis of Fading Types. Part 1. Statistical Description of a Wireless Video Channel, Models of BER Determination and Error Concealment of Video Signals. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2017, no. 1, pp. 72–82. doi:10.15217/issn1684-8853.2017.1.72
24. **Hadar O., Bronfman I., and Blaunstein N. S.** Optimization of Error Concealment Based on Analysis of Fading Types. Part 2. Modified and New Models of Video Signal Error Concealment. Practical Simulations and their Results. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2017, no. 2, pp. 67–76. doi:10.15217/issn1684-8853.2017.2.67
25. **Vostrikov A., Kurtyanik D., Sergeev A.** Choosing Embedded WI-FI Module for Mobile Optic-Information Systems. *Vestnik*, 2018, no. 4, pp. 26–29 (In Russian).
26. **Vostrikov A., Balonin Yu., Kurtyanik D., Sergeev A., Sinitsyna O.** On Hybrid Method of Video Data Protection in IP-networks. *Telekommunikatsii* [Telecommunications], 2018, no. 2, pp. 34–39 (In Russian).
27. **Erosh I., Sergeev A., Filatov G.** Protection of Images During Transfer via Communication Channels. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2007, no. 5, pp. 20–22 (In Russian).
28. **Sergeev A.** Generalized Mersenne Matrices and Balonin's Conjecture. *Automatic Control and Computer Sciences*, 2014, vol. 48, no. 4, pp. 214–220.
29. **Sergeev A. M., Blaunstein N. S.** Orthogonal Matrices with Symmetrical Structures for Image Processing. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2017, no. 6, pp. 2–8 (In Russian). doi:10.15217/issn1684-8853.2017.6.2
30. *Modulation and Coding Techniques in Wireless Communications*. Ed. by E. Krouk, and S. Semenov. John Wiley & Sons, Chichester, United Kingdom, 2011.
31. *Specification of the Bluetooth System*. Dec. 1, 1999. Available at: [www.bluetooth.com](http://www.bluetooth.com). (accessed 15 August 2017).
32. **Junaid M., Mufti M., and Ilyas M. U.** Vulnerabilities of IEEE 802.11i Wireless LAN. *Trans. Eng., Comput. and Technol.*, Feb. 2006, vol. 11, pp. 228–233.
33. *IEEE 802.11 Working Group*. Available at: <http://grouper.ieee.org/groups/802/11/index.html> (accessed 15 August 2017).
34. *Wireless Ethernet Compatibility Alliance*. Available at: <http://www.wirelessethernet.org/index.html> (accessed 15 August 2017).
35. **Sharon O., and Altman E.** An Efficient Polling MAC for Wireless LANs. *IEEE/ACM Trans. on WiMAX Systems Evaluation Methodology V2.1etworking*, 2001, vol. 9, no. 4, pp. 439–451.
36. IEEE std. 802.11-1999: *Wireless LAN Medium Access Control (MAC) and Physical Layer (PHL) Specifications*, 1999.

37. **Qainkhani I. A., and Hossain E.** A Novel QoS-aware MAC Protocol for Voice Services over IEEE 802.11-based WLANs. *J. Wireless Commun. and Mobile Comput.*, 2009, vol. 9, pp. 71–84.
38. *Wireless LAN Medium Access Control and Physical Layer Specification*. IEEE Press, 1999, Jan. 14.
39. **Zyren J.** Reliability of IEEE 802.11 High Rate DSSS WLANs in a High Density Bluetooth Environment; 802.11 section, 8–6, 1999.
40. **Perahia E.** IEEE 802.11n Development: History, Process, and Technology. *IEEE Commun. Magazine*, 2008, vol. 46, pp. 46–55.
41. **Ni Q., Romshani L., and Turletti T.** A Survey of QoS Enhancements for IEEE 802.11 Wireless LAN. *J. Wireless Commun. and Mobile Comput.*, 2004, vol. 4, no. 5, pp. 547–566.
42. **Wang W., Liew S. C., and Li V. O. K.** Solutions to Performance Problems in VoIP over 802.11 Wireless LAN. *IEEE Trans. Veh. Tech.*, 2005, vol. 54, no. 1, pp. 366–384.
43. **Robinson J. W., and Randhawa T. S.** Saturation Throughput Analysis of IEEE 802.11e Enhanced Distributed Coordination Function. *IEEE J. Select. Areas of Commun.*, 2004, vol. 22, no. 5, pp. 917–928.
44. **Wang P., Jiang H., and Zhuang W.** 802.11e Enhancement for Voice Service. *IEEE Wireless Commun.*, 2006, vol. 13, no. 1, pp. 30–35.
45. **Perez-Costa X., and Camps-Mur D.** IEEE 802.11e QoS and Power Saving Features Overview and Analysis of Combined Performances. *IEEE Wireless Commun.*, 2010, vol. 17, no. 2, pp. 88–96.
46. **Kopsel A., and Wolisz A.** Voice Ptransmission in an IEEE 802.11 WLAN Based Access Network. *Proc. of 4<sup>th</sup> ACM Int. Workshop on Wireless Mobile Multimedia (WoWMoM)*, Rome, Italy, 2001, pp. 24–33.
47. **Veeraraghavan M., Chocker N., and Moors T.** Support of Voice Services in IEEE 802.11 Wireless LANs. *Proc. of IEEE INFOCOM'01*, 2001, vol. 1, pp. 488–497.
48. **Kim Y.-J., and Suh Y.-J.** Adaptive Polling MAC Schemes for IEEE 802.11 Wireless LANs Supporting Voice-over-IP (VoIP) Services. *J. Wireless Commun. and Mob. Comput.*, 2004, vol. 4, pp. 903–916.
49. **Andersen J. B.** Array Gain and Capacity of Known Random Channels with Multiple Element Arrays at Both Ends. *IEEE J. Selected Areas in Commun.*, 2000, vol. 18, pp. 2172–2178.
50. **Blaunstein N., and Yarkoni N.** Capacity and Spectral Efficiency of MIMO Wireless Systems in Multipath Urban Environment with Fading. *Proc. of the European Conf. on Antennas and Propagation, EuCAP-2006*, Nice, France, 2006, pp. 111–115.
51. **Tsalolihin E., Bilik I., and Blaunstein N.** MIMO Capacity in Space and Time Domain for Various Urban Environments. *Proc. of 5<sup>th</sup> European Conf. on Antennas and Propagation, EuCAP*, Rome, Italy, 11–15 April, 2011, pp. 2321–2325.
52. **Chizhik D., Farrokhi F., Ling J., and Lozano A.** Effect of Antenna Separation on Capacity of BLAST in Correlated Channels. *IEEE Commun. Letters*, 2000, vol. 4, no. 11.
53. **Gesbert D., Shafi M., Shiu D., Smith P., and Naguib A.** From Theory to Practice: An Overview of MIMO Space-Time Coded Wireless Systems. *IEEE Journal on Selected Areas in Comm.*, 2003, vol. 21, no. 3, pp. 281–302.
54. *Radioplan*. RPS user Manual 5.4. Available at: <http://www.actix.com> (accessed 15 August 2017).
55. **Philippe J., Schumacher L., Pedersen K., Mogensen P., and Frederiksen F.** A Stochastic MIMO Radio Channel Model with Experimental Validation. *IEEE J. Selected Areas in Commun.*, 2002, vol. 20, no. 6, pp. 1211–1226.
56. **Gesbert D., Boleskei H., Gore D. A., and Paulraj A. J.** Outdoor MIMO Wireless Channels: Models and Performance Prediction. *IEEE Trans. Commun.*, 2002, vol. 50, no. 6, pp. 1926–1934.
57. **Boleskei H., Borgmann M., and Paulraj A. J.** On the Capacity of OFDM-based Spatial Multiplexing Systems. *IEEE Trans. Commun.*, 2002, vol. 50, no. 1, pp. 225–234.
58. **Boleskei H., Borgmann M., and Paulraj A. J.** Impact of the Propagation Environment on the Performance of Space-Frequency Coded MIMO-OFDM. *IEEE J. Select. Areas Commun.*, 2003, vol. 21, no. 2, pp. 427–439.
59. **Chizik D., Ling J., Wolniansky P. W., Valenzuela R. A., Costa N., and Huber K.** Multiple-input-multiple-output Measurements and Modeling in Manhattan. *IEEE J. on Selected Areas in Comm.*, 2003, vol. 23, no. 2, pp. 321–331.
60. **Oyman O., Nabar R. U., Boleskei H., and Paulraj A. J.** Characterizing the Statistical Properties of Mutual Information in MIMO Channels. *IEEE Trans. Signal Processing*, 2003, vol. 51, pp. 2784–2795.
61. **Paulraj A. J., Gore D. A., Nabar R. U., and Boleskei H.** An Overview of MIMO Communications — A Key to Gigabit Wireless. *Proc. of IEEE*, 2004, vol. 92, no. 2, pp. 198–218.
62. **Forenza A., et al.** Adaptive MIMO Transmission for Exploiting the Capacity of Spatially Correlated Channels. *IEEE Trans. Vehic. Technol.*, 2007, vol. 56, no. 2, pp. 619–630.
63. **Foschini G. J., and Gans M. J.** On Limits of Wireless Communications in a Fading Environment when using Multiple Antennas. *Wireless Person. Commun.*, 1998, vol. 6, no. 3, pp. 311–335.
64. **Proakis J. G.** *Digital Communications*. 4<sup>th</sup> ed. McGraw-Hill, New York, 2001.
65. **Paulraj A. J., and Kailath T.** *Increasing Capacity in Wireless Broadcast Systems using Distributed Transmission/Directional Reception (DTDR)*. US patent 5,345,599, Sept. 6, 1994.
66. **Foschini G. J.** Layered Space-time Architecture for Wireless Communication in a Fading Environment when using Multiple Antennas. *Bell Labs. Tech. J.*, 1996, vol. 1, no. 2, pp. 41–59.
67. **Golden G. D., Foschini G. J., Valenzuela R. A., and Wolniansky P. W.** Direction Algorithm and Initial

- Laboratory Results using the V-BLAST Space-time Communication Architecture. *Electron. Lett.*, 1999, vol. 35, no. 1, pp. 14–15.
68. **Nabar R. U., Bolcskei H., Erceg V., Gesbert D., and Paulraj A. J.** Performance of Multiantenna Signaling Techniques in the Presence of Polarization Diversity. *IEEE Trans. Signal Process.*, 2002, vol. 50, no. 10, pp. 2553–2562.
  69. **Zheng L., and Tse D.** Diversity and Multiplexing: A Fundamental Tradeoff in Multiple Antenna Channels. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 2003, vol. 49, no. 5, pp. 1073–1096.
  70. **Varadarajan B., and Barry J. R.** The Rate-diversity Trade-off for Linear Space-time Codes. *Proc. IEEE Vehicular Tech. Conf.*, 2002, vol. 1, pp. 67–71.
  71. **Godovarti M., and Nero A. O.** Diversity and Degrees of Freedom in Wireless Communications. *Proc. ICASSP*, May 2002, vol. 3, pp. 2861–2864.
  72. **Raleigh G. G., and Cioffi J. M.** Spatio-temporal Coding for Wireless Communication. *IEEE Trans. Commun.*, 1998, vol. 46, no. 3, pp. 357–366.
  73. **Wittniben A.** Base Station Modulation Diversity for Digital Simulcast. *Proc. IEEE Vehicular Tech. Conf.*, May 1991, pp. 848–853.
  74. **Seshadri N., and Winters J. H.** Two Signaling Schemes for Improving the Error Performance of Frequency-Division-Duplex (FDD) Transmission Systems using Transmitter Antenna Diversity. *Int. J. Wireless Inform. Networks*, 1994, vol. 1, no. 1, pp. 49–60.
  75. **Alamouti S. M.** A Simple Transmit Diversity Technique for Wireless Communications. *IEEE J. Select. Areas Commun.*, 1998, vol. 16, no. 8, pp. 1451–1458.
  76. **Tarokh V., Seshadri N., and Calderbank A. R.** Space-time Codes for High Data Rate Wireless Communication: Performance Criterion and Code Construction. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 1999, vol. 45, no. 5, pp. 1456–1467.
  77. **Ganesan G., and Stoica P.** Space-time Block Codes: A Maximum SNR Approach. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 2001, vol. 47, no. 4, pp. 1650–1656.
  78. **Hassibi B., and Hochwald B. M.** High-rate Codes that are Linear in Space and Time. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 2002, vol. 48, no. 7, pp. 1804–1824.
  79. **Health Jr., R. W., and Paulraj A. J.** Linear Dispersion Codes for MIMO Systems based on Frame Theory. *IEEE Trans. Signal Process.*, 2002, vol. 50, no. 10, pp. 2429–2441.
  80. **Winters J. H.** The Diversity Gain of Transmit Diversity in Wireless Systems with Rayleigh Fading. *IEEE Trans. Veh. Technol.*, 1998, vol. 47, no. 1, pp. 119–123.
  81. **Bjerke B. A., and Proakis J. G.** Multiple-antenna Diversity Techniques for Transmission over Fading Channels. *Proc. Wireless Commun. and Networking Conf.*, Sept. 1999, vol. 3, pp. 1038–1042.
  82. **Heath Jr., R. W., and Paulraj A. J.** Switching between Diversity and Multiplexing in MIMO Systems. *IEEE Trans. Commun.*, 2005, vol. 53, no. 6, pp. 962–968.
  83. **Chandrasekhar V., Andrews J. G., and Gatherer A.** Femtocell Networks: A Survey. *IEEE Commun. Magazine*, 2003, vol. 46, no. 9, pp. 59–67.
  84. **Shannon C. E.** A Mathematical Theory of Communication. *Bell System Tech. J.*, July and October 1948, vol. 27, pp. 379–423 and pp. 623–656.
  85. **Yeh S.-P., Talwar S., Lee S.-C., and Kim H.** WiMAX Femtocells: A Perspective on Network Architecture, Capacity, and Coverage. *IEEE Commun. Magazine*, 2008, vol. 46, no. 10, pp. 58–65.
  86. **Knisely D. N., Yoshizawa T., and Favichia F.** Standardization of Femtocells in 3GPP. *IEEE Commun. Magazine*, 2009, vol. 47, no. 9, pp. 68–75.
  87. **Knisely D. N., and Favichia F.** Standardization of Femtocells in 3GPP2. *IEEE Commun. Magazine*, 2009, vol. 47, no. 9, pp. 76–82.
  88. **Chandrasekhar V., and Andrews J. G.** Uplink Capacity and Interference Avoidance for Two-tier Femtocell Networks. *IEEE Trans. Wireless Commun.*, 2009, vol. 8, no. 7, pp. 3498–3509.
  89. **Calin D., Claussen H., and Uzunalioglu H.** On Femto Deployment Architectures and Macrocell Offloading Benefits in Joint Macro-femto Deployments. *IEEE Commun. Magazine*, 2010, vol. 48, no. 1, pp. 26–32.
  90. **Kim R. Y., Kwak J. S., and Etemad K.** WiMAX Femtocell: Requirements, Challenges, and Solutions. *IEEE Commun. Magazine*, 2009, vol. 47, no. 9, pp. 84–91.
  91. **Lopez-Perez D., Valcarce A., de la Roche G., and Zhang J.** OFDMA Femtocells: A Roadmap on Interference Avoidance. *IEEE Commun. Magazine*, 2009, vol. 47, no. 9, pp. 41–48.
  92. **Chandrasekhar V., Andrews J. G., Muharemovic T., Shen Z., and Gatherer A.** Power Control in Two-tier Femtocell Networks. *IEEE Trans. Wireless Commun.*, 2009, vol. 8, no. 8, pp. 4316–4328.
  93. **Yavuz M., Meshkati F., Nanda S., et al.** Interference Management and Performance Analysis of UMTS/HSPA+Femtocells. *IEEE Commun. Magazine*, 2009, vol. 47, no. 9, pp. 102–109.
  94. **Femto Forum.** Available at: <http://www.femtoforum.org/femto/> (accessed 15 August 2017).
  95. **Blaunstein N. S., and Sergeev M. B.** Channel Capacity Prediction for Femtocell-Macrocell Deployment Strategies in the Urban Environments with Congested Layout of Users. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2012, no. 3, pp. 54–62 (In Russian).
  96. **Tsalolihin E., Bilik I., Blaunstein N., and Babich Y.** Channel Capacity in Mobile Broadband Heterogeneous Networks based on Femtocells. *Proc. of Eu-CAP-2012 Int. Conf.*, Prague, Czech Republic, March 26–30, 2012, pp. 1–5.
  97. **Blaunstein N., and Levin M.** VHF/UHF Wave Attenuation in a City with Regularly Spaced Buildings. *Radio Science*, 1996, vol. 31, no. 2, pp. 313–323.
  98. **Blaunstein N.** Prediction of Cellular Characteristics for Various Urban Environments. *J. Anten. and Propagatat. Magazine*, 1999, vol. 41, no. 6, pp. 135–145.

99. **Blaunstein N.** Average Field Attenuation in the Non-regular Impedance Street Waveguide. *IEEE Trans. on Anten. and Propagat.*, 1998, vol. 46, no. 12, pp. 1782–1789.
100. **Blaunstein N., Katz D., Censor D., et al.** Prediction of Loss Characteristics in Built-up Areas with Various Buildings' Overlay Profiles. *J. Anten. and Propagat. Magazine*, 2002, vol. 44, no. 1, pp. 181–192.
101. **Yarkoni N., Blaunstein N., and Katz D.** Link Budget and Radio Coverage Design for Various Multipath Urban Communication Links. *Radio Science*, 2007, vol. 42, no. 2, pp. 412–427.
102. **Katz D., Blaunstein N., Hayakawa M., and Kishiki Y. S.** Radio Maps Design in Tokyo City based on Stochastic Multi-parametric and Deterministic Ray Tracing Approaches. *J. Anten. and Propag. Magazine*, 2009, vol. 51, no. 5, pp. 200–208.
103. **Okumura Y., Ohmori E., Kawano T., and Fukuda K.** Field Strength and its Variability in the VHF and UHF Land Mobile Radio Service. *Review Elect. Communic. Lab.*, 1968, vol. 16, no. 9-10, pp. 825–843,
104. **Wells P. J.** The Attenuation of UHF Radio Signal by Houses. *IEEE Trans. Veh. Technol.*, 1977, vol. 26, no. 4, pp. 358–362.
105. **Bertoni H. L.** *Radio Propagation for Modern Wireless Systems*. Prentice Hall PTR, New Jersey, 2000.
106. **Seidel S. Y., and Rappaport T. S.** 914 MHz Path Loss Prediction Models for Indoor Wireless Communications in Multifloored Buildings. *IEEE Trans. Anten. Propagat.*, 1992, vol. 40, no. 2, pp. 200–217.
107. **Yarkoni N., and Blaunstein N.** Prediction of Propagation Characteristics in Indoor Radio Communication Environments. *J. Electromagnetic Waves and Applications: Progress in Electromag. Research, PIER*, 2006, vol. 59, pp. 151–174.
108. **Yu W., Ginis G., and Cioffi J. M.** Distributed Multi-user Power Control for Digital Subscriber Lines. *IEEE J. Select. Areas in Communic.*, 2002, vol. 20, no. 5, pp. 1105–1115.
109. **Scutari G., and Barbarossa D. P. P.** Optimal Linear Precoding Strategies for Wideband non-cooperative Systems Based on Game Theory. Part II. Algorithms. *IEEE Trans. Signal Processing*, 2008, vol. 56, no. 3, pp. 1250–1267.
110. **Scutari G., Palomar D. P., and Barbarossa S.** Asynchronous Iterative Water-filling for Gaussian Frequency-selective Interface Channels. *IEEE Trans. Information Theory*, 2008, vol. 54, no. 7, pp. 2868–2878.
111. WiMAX Forum. *WiMAX System Evaluation Methodology*, V2-1, 2008. 230 p.
112. **Eklund K., Marks R. B., Kenneth L., Wang S. and IEEE standard 802.16:** A Technical Overview on the WirelessMAN<sup>TM</sup> Air Interface for Broadband Wireless Access. *IEEE Communic. Magazine*, 2002, vol. 40, pp. 98–107.
113. **Ohseki T., Morita M., and Inoue.** Burst Constructions and Packet Mapping Scheme for OFDMA Downlink in IEEE 802.16 Systems. *Proc. IEEE Global Telecommunic. Conf.*, Washington, DC, 2007, pp. 4307–4311.
114. **Sengupta S., Chatterjee M., and Ganguly S.** Improving Quality of VoIP Streams over WiMAX. *IEEE Trans. Comput.*, 2008, vol. 57, pp. 145–156.
115. **So-In Chakchai, Raj Jain, and Abdel-Karim Tamiimi.** Scheduling in IEEE 802.16e Mobile WiMAX Networks: Key Issues and a Survey. *IEEE J. Select. Areas of Communicat.*, 2009, vol. 27, no. 2, pp. 156–171.
116. **Niyato D., and Hossain E.** Queue-aware Uplink Bandwidth Allocation and Rate Control for Polling Service in IEEE 802.16 Broadband Wireless Networks. *IEEE Trans. on Mobile Comput.*, 2006, vol. 5, no. 6, pp. 668–679.
117. **Cicconetti C., Erta A., Lenzi L., and Mingozzi E.** Performance Evaluation of the IEEE 802.16 MAC for QoS Support. *IEEE Trans. on Mobile Comput.*, 2007, vol. 6, no. 1, pp. 26–38.
118. **Taahol P., Salkintzis A. K., and Iyer J.** Seamless Integration of Mobile WiMAX in 3GPP Networks. *IEEE Communic. Magazine*, Oct. 2008, pp. 74–85.
119. **Etamad K.** Overview of Mobile WiMAX Technology and Evolution. *IEEE Communic. Magazine*, 2008, vol. 46, pp. 31–40.
120. **Niyato D., and Hossain E.** Integration of WiMAX and WiFi: Optimal Pricing for Bandwidth Sharing. *IEEE Communic. Magazine*, 2007, vol. 45, no. 5, pp. 140–146.
121. **Nie J., Wen J., Dong O., and Zhou Z.** A Seamless Handoff in IEEE 802.16a and IEEE 802.11 Hybrid Networks. *Proc. Intern. Conf. on Convergence Inform. Technol.*, 2007, pp. 24–29.
122. **Nie J., He X., Zhou Z., and Zhou C.** Communication with Bandwidth Optimization in IEEE 802.16 and IEEE 802.11 Hybrid Networks. *Proc. Intern. Symp. on Communic. and Inform. Technol.*, 2005, pp. 26–29.
123. **Kinoshita K., Yoshimoto M., Murakami K., and Kawano K.** An Effective Spectrum Sharing Method for WiFi/WiMAX Interworking Mesh Network. *Proc. of IEEE Conf. WCNC*, 2010, pp. 986–990.
124. **Kinoshita K., Kanamori Y., Kawano K., and Murakami K.** A Dynamic Spectrum Assignment Method based on Call Blocking Probability Prediction in WiFi/WiMAX Integrated Networks. *Proc. of IEEE Conf. WCNC*, 2010, pp. 991–995.
125. **Yang W.-H., Wang Y.-Ch., Tseng Yu-Ch., and Lin B.-Sh. P.** An Energy-Efficient Handover Scheme with Geographic Mobility Awareness in WiMAX-WiFi Integrated Networks. *Proc. of IEEE Conf. WCNC*, 2010, pp. 996–1001.
126. **3GPP. UTRA-UTRAN Long Term Evolution (LTE) and 3GPP System Architecture.** 2005. Available at: <http://www.3gpp.org/article/lte> (accessed 15 August 2017).
127. **Zyren J., and McCoy W.** Overview of the 3GPP Long Term Evolution Physical Layer. *3G Americas White Paper*, Doc. Number: 3GPPEVOLUTIONWP, July, 2007.

128. 3GPP. TR 36.912. *Feasibility Study for Further Advancements of E-UTRA (LTE-Advanced)*. 2009. Available at: <http://www.3gpp.org/article/lte-advanced> (accessed 5 August 2013).
129. 3GPP. TR 36.913. *Requirements for Further Advancements for Evolved Universal Terrestrial Radio Access (E-UTRA) (LTE-Advanced)*. 2010. Available at: <http://www.3gpp.org/article/lte-advanced> (accessed 5 August 2013).
130. Ghosh A., Ratasuk R., Mondal B., et al. LTE-advanced: Next Generation Wireless Broadband Technology. *IEEE Wireless Commun.*, 2010, vol. 3, no. 3, pp. 10–22.
131. Parkvall S., Furuskar A., Dahlman E., and Research E. Evolution of LTE Toward IMT-advanced. *IEEE Commun. Magazine*, 2011, vol. 50, no. 5, pp. 84–91.
132. Astey D., Dahlman E., Furuskar A., et al. LTE: The Evolution of Mobile Broadband. *IEEE Commun. Magazine*, 2009, vol. 47, no. 2, pp. 44–51.
133. 3GPP Technical Specification Group Radio Access Network. *Evolved Universal Terrestrial Radio Access (E-UTRA), Physical Layer Procedures (Release 9)*. 3GPP TS36.213 V9.3.0, June 2010.
134. 3GPP Technical Specification Group Radio Access Network. *Evolved Universal Terrestrial Radio Access (E-UTRA), Further Advancements for E-UTRA Physical Layer Aspects (Release 9)*. 3GPP TS36.814 V9.0.0, March 2010.
135. Ghaffar R., and Knopp R. Interference-aware Receiver Structure for Multi-user MIMO and LTE. *EURASIP Journal on Wireless Communications and Networking*, 2011, vol. 40, 24 p.
136. Li Q., Li G., Lee W., et al. MIMO Techniques in WiMAX and LTE: A Future Survey. *IEEE Commun. Magazine*, 2010, vol. 48, no. 5, pp. 86–92.
137. Kusume K., et al. System Level Performance of Downlink MU-MIMO Transmission for 3GPP LTE-advanced. *Proc. of the IEEE Vehicular Technol. Conf. Spring (VTC '05)*, Ottawa, Canada, Sept. 2010, 5 p.
138. Covavacs I. Z., Ordonez L. G., Navarro M., et al. Toward a Reconfigurable MIMO Downlink Air Interface and Radio Resource Management: The SURFACE Concept. *IEEE Commun. Magazine*, 2010, vol. 48, no. 6, pp. 22–29.
139. EU FP7 Project SAMURAI — *Spectrum Aggression and Multi-User MIMO: Real-World Impact*. Available at: <http://www.ict-samurai.eu/page1001.en.htm> (accessed 15 August 2017).
140. 3GPP TSG RAN WG1 #62. *Way Forward on Transmission Mode and DCI Design for Rel-10 Enhanced Multiple Antenna Transmission*. R1-105057, Madrid, Spain, August 2010.
141. 3GPP TSG RAN WG1 #62. *Way Forward on 8 Tx Codebook for Release 10 DL MIMO*. R1-105011, Madrid, Spain, August 2010.
142. 3GPP TR 36.942 V10.3.0 (2012-06). *3rd Generation Partnership Project, Technical Specification Group Radio Access Network; Evolved Universal Terrestrial Radio Access (E-UTRA); Radio Frequency (RF) System Scenarios (Release 10)*. June 2012.
143. 3G Americas white paper. 3GPP Mobile Broadband Innovation Path to 4G: Release 9, Release 10 and Beyond: HSPA+, SAE/LTE and LTE-advanced, 2010. Available at: [http://www.4gamericas.org/documents/3GPP\\_Rel-9\\_Beyond%20Feb%202010.pdf](http://www.4gamericas.org/documents/3GPP_Rel-9_Beyond%20Feb%202010.pdf) (accessed 15 August 2017).
144. Duplicy J., Badic B., Balraj R., et al. MU-MIMO in LTE Systems. *EURASIP J. on Wireless Communications and Networking*, 2011, Article ID 496763, 13 p. doi:10.1155/2011/496763
145. 3GPP TR 36.942 V8.4.0 (2012-06). *3rd Generation Partnership Project. Technical Specification Group Radio Access Network; Evolved Universal Terrestrial Radio Access (E-UTRA); Radio Frequency (RF) System Scenarios (Release 8)*. June, 2012.
146. Zhang H., Prasad N., and Rangarajan S. MIMO Downlink Scheduling in LTE and LTE-advanced Systems. *Tech. Report, NEC Labs America*, June 2011. Available at: <http://www.nec-labs.com/~honghai/TR/lte-scheduling.pdf> (accessed 15 August 2017).
147. Sergeev A. M., Blaunstein N. Sh. Evolution of Multiple-access Networks — Cellular and Non-cellular — in Historical Perspective. Part 1. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2018, no. 4, pp. 86–104. doi:10.31799/1684-8853-2018-4-86-104
148. Lyandres V. Z. On a Model of the Deep Fading. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control System], 2018, no. 1, pp. 123–127. doi:10.15217/issn1684-8853.2018.1.123

УДК 621.371

doi:10.31799/1684-8853-2019-1-65-75

**Эволюция многопроцессорных систем связи — сотовых и несотовых — в исторической перспективе. Часть 4**А. М. Сергеев<sup>а</sup>, старший преподаватель, orcid.org/0000-0002-4788-9869Н. Ш. Блаунштейн<sup>б</sup>, доктор физ.-мат. наук, профессор, nathan.blaunstein@hotmail.com<sup>а</sup>Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, Б. Морская ул., 67, Санкт-Петербург, 190000, РФ<sup>б</sup>Негевский университет им. Бен-Гуриона, П.О.Б. 653, Бен-Гуриона ул., 1, Беэр-Шева, 74105, Израиль

**Постановка проблемы:** целью данного обзора является анализ эволюции систем беспроводной связи от второй генерации (2G) до пятой генерации (5G), а также изменения технологий и их существующих теоретических основ и протоколов — от Bluetooth, WLAN, WiFi и WiMAX до LTE, OFDM/OFDMA, MIMO и LTE/MIMO — продвинутых технологий с новой иерархической структурой дизайна сотовых карт фемто/пико/микро/макро. **Методы:** использованы новые теоретические подходы для описания продвинутых технологий, таких как многопользовательская техника разделения пользователей, OFDM и OFDM новейший подход, новые аспекты описания MIMO-систем на базе использования многолучевых антенн, дизайн различных сотовых карт на основе новых алгоритмов построения фемто/пико/микро/макро сот, а также новой методологии интегрирования новой MIMO/LTE-системы с помощью многолучевых антенн. **Результаты:** создана новая методология описания многопользовательского разделения, использования комбинированной OFDM/OFDMA-модуляции для обхождения интерференции между пользователями и между символами в новых многопроцессорных системах, мультипликативных шумов, имеющих место в беспроводных многопроцессорных системах связи, вызванных явлениями многолучевости. В итоге предложено, как обойти эффекты распространения, имеющие место в наземных каналах связи, используя комбинацию MIMO- и LTE-технологий, основанных на применении многолучевых антенн. Для этих целей разработан новый стохастический подход к проблеме, учитывающий особенности застройки земной поверхности, такие как профиль застройки домов, плотность застройки домов вокруг антенн базовой станции и пользователей и т. д. Эти характеристики позволяют в итоге оценить эффекты фединга как источника мультипликативного шума. **Практическая значимость:** новая методология оценки эффектов, созданных мультипликативным шумом, интерференцией между пользователями и между символами, имеющими место в наземных системах беспроводной связи, позволяет прогнозировать практические аспекты существующих и новых многопроцессорных беспроводных систем связи, такие как емкость (количество) пользователей и спектральная эффективность каналов пользователей для различных конфигураций построения сот — фемто/пико/микро/макро, а также новейших конфигураций систем MIMO/LTE для построения будущих систем 4-го и 5-го поколений.

**Ключевые слова** — емкость сети, релизы сети LTE, множественный вход-множественный выход (MIMO), многопользовательский (MU), одиночный вход-одиночный выход (SISO), одиночный вход-множественный выход (SIMO), единственная несущая частота (SC), единственный пользователь (SU), пользовательское оборудование (UE), беспроводная сеть WiFi, городская беспроводная сеть WiMAX.

**Для цитирования:** Sergeev A. M., Blaunstein N. Sh. Evolution of multiple-access networks — cellular and non-cellular — in historical perspective. Part 4. *Информационно-управляющие системы*, 2019, no. 1, pp. 65–75. doi:10.31799/1684-8853-2019-1-65-75

**For citation:** Sergeev A. M., Blaunstein N. Sh. Evolution of multiple-access networks — cellular and non-cellular — in historical perspective. Part 4. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2019, no. 1, pp. 65–75. doi:10.31799/1684-8853-2019-1-65-75

УДК 621.391

doi:10.31799/1684-8853-2019-1-76-88

## Вероятности ошибки когерентного приема многопозиционных сигналов в канале с общими гамма- или $K$ -замирениями и белым шумом

Н. В. Савищенко<sup>а</sup>, доктор техн. наук, профессор, [orcid.org/0000-0001-5282-2506](https://orcid.org/0000-0001-5282-2506), [snikaspb@mail.ru](mailto:snikaspb@mail.ru)

Е. В. Лебеда<sup>а</sup>, адъюнкт, [orcid.org/0000-0002-7919-1086](https://orcid.org/0000-0002-7919-1086)

<sup>а</sup>Военная академия связи им. Маршала Советского Союза С. М. Буденного, Тихорецкий пр., 3, Санкт-Петербург, 194064, РФ

**Введение:** одной из основных задач теории связи является определение таких характеристик системы передачи информации, как помехоустойчивость (вероятность ошибки) и скорость передачи, знание которых позволяет определить, соответственно, качество и количество переданной информации. Вычисление вероятности ошибки для канала связи, например с замирениями, позволяет оценить потери или выигрыш в помехоустойчивости при использовании в модемах различных сигнальных конструкций. **Цель:** разработка методики расчета вероятности символьной (битовой) ошибки при когерентном приеме сигналов в канале связи с аддитивным белым гауссовым шумом и общими (частотно-неселективными) замирениями, описываемыми гамма-распределением или  $K$ -распределением (соответственно их называем гамма-замирением и  $K$ -замирением). **Результаты:** получены соотношения, позволяющие рассчитать помехоустойчивость приема для произвольных двумерных сигнальных конструкций для канала связи с гамма- или  $K$ -замирениями и аддитивным белым гауссовым шумом. Приведены примеры расчета вероятности символьной ошибки для сигналов фазовой модуляции и квадратурно-амплитудной модуляции. Расчет вероятности ошибки в канале с замирениями для двух различных законов распределения был сведен к одной новой специальной функции, представляющей собой интеграл от произведения функции Трикоми и алгебраической функции. Это позволило разработать универсальный математический подход, справедливый для обоих вариантов замирений. Для вычисления введенной в статье новой специальной функции и ее представления через известные функции использованы как классические гипергеометрические функции, так и обобщенная гипергеометрическая функция двух переменных — функция Кампе де Ферье. **Практическая значимость:** на основе предложенной методики при использовании в перспективных (разрабатываемых) телекоммуникационных стандартах многопозиционных сигнальных конструкций можно получить оценку их потенциальной помехоустойчивости, что позволит объективно сравнивать между собой сигнальные конструкции и корректно выбирать разработчику нового модема лучший вариант.

**Ключевые слова** — помехоустойчивость, замирения, сигнальные конструкции, символьная вероятность ошибки, битовая вероятность ошибки, сигналы фазовой модуляции, сигналы квадратурно-амплитудной модуляции.

**Для цитирования:** Савищенко Н. В., Лебеда Е. В. Вероятности ошибки когерентного приема многопозиционных сигналов в канале с общими гамма- или  $K$ -замирениями и белым шумом. *Информационно-управляющие системы*, 2019, № 1, с. 76–88. doi:10.31799/1684-8853-2019-1-76-88

**For citation:** Savischenko N. V., Lebeda E. V. Multi-position signal coherent reception error probability in a channel with generalized gamma or  $K$  fading and white noise. *Informatsionno-upravliayushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2019, no. 1, pp. 76–88 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2019-1-76-88

### Введение

В системах передачи информации часто применяются различные двумерные многопозиционные сигнальные конструкции. Используемые в современных беспроводных системах связи сигналы OFDM (Orthogonal frequency-division multiplexing — мультиплексирование с ортогональным частотным разделением каналов), представляющие собой многомерные сигналы, строятся на основе двумерных сигнальных конструкций. При изучении сигнальных конструкций удобно использовать их классификацию, основанную на расположении сигнальных точек в пространстве. Среди многообразия сигналов можно выделить четыре класса сигналов: сигналы квадратурно-амплитудной модуляции (КАМ) с расположением сигнальных точек в узлах квад-

ратной (целочисленной) решетки (используемая решетка не является плотнейшей, однако обладает реализационными преимуществами); сигналы, построение которых основано на решетках с наибольшей плотностью упаковки в рассматриваемом пространстве, например, в двумерном пространстве это гексагональная плотноупакованная решетка (ГЕКС — гексагональные сигнальные конструкции); сигналы поверхностно-сферической упаковки, когда сигнальные точки расположены на поверхности сферы и к которым относятся сигналы фазовой модуляции (ФМ); сигналы амплитудно-фазовой модуляции с чаще всего регулярным расположением сигнальных точек на концентрических сферах разного радиуса [1–6].

В рамках математической теории связи сигнальные конструкции сравниваются между со-

бой в первую очередь по помехоустойчивости и скорости передачи. В этом случае корректным является их сравнение по энергетическим затратам на передачу одного бита при условии выполнения требуемых значений символьной или битовой вероятностей ошибок. Теоретические основы расчета вероятности ошибки в канале связи с аддитивным белым гауссовым шумом (АБГШ) и при использовании критериев максимального правдоподобия или максимума апостериорной вероятности известны достаточно давно [4–7]. Однако, к сожалению, при практической реализации этих методик встречаются математические сложности, которые на данном этапе позволили получить лишь частные случаи формул для символьной (битовой) вероятности ошибки сигналов КАМ, ФМ и ГЕКС [8–12]. При этом для некоторых вариантов сигнальных конструкций получены лишь аппроксимирующие формулы, которые во многих случаях некорректны в области малых отношений сигнал/шум. Это является существенным недостатком как с точки зрения оценки помехоустойчивости в целом всей сигнально-кодовой конструкции, так и при использовании этих формул, например, в канале связи с АБГШ и общими (частотно-неселективными) замираниями, являющимися следствием многолучевого распространения.

Вероятность ошибки для канала связи с общими замираниями может быть определена по формуле [4–7]

$$P = \int_0^{\infty} P_{e/b}(\gamma_{bc}, \mu) \omega(\mu) d\mu, \quad (1)$$

где  $P_{e/b}$  — вероятности символьной или битовой ошибки в канале связи с детерминированными параметрами и АБГШ;  $\mu$  — случайный коэффициент передачи канала связи, описываемый плотностью распределения вероятностей (п. р. в.). Данная формула может использоваться и при некогерентном приеме сигналов, однако в научной литературе для этого случая, ввиду его математической сложности, имеется мало примеров вычисления вероятности ошибки, в том числе для канала с АБГШ. Кроме того, имеющиеся формулы вероятности ошибки при некогерентном приеме содержат функцию Маркума — принципиально другую специальную функцию, отличную от функции Оуэна, что приводит к совершенно другим подходам при вычислении (1). При определении вероятности ошибки по (1) требуется решение двух взаимосвязанных задач.

Первая задача заключается в вычислении вероятности ошибки в канале связи с детерминированными параметрами и АБГШ при использовании многопозиционных сигнальных конструкций. При этом вычисление по (1) с помощью

некоторых приблизительных оценок (например, аддитивной верхней границы [4, 5]) для вероятности ошибки может приводить к существенным погрешностям в вычислении вероятности ошибки для канала с общими замираниями, что может, в свою очередь, привести к неправильным выводам и рекомендациям для разработчиков техники связи. Решение этой задачи для основных классических сигналов, применяемых в канале связи с АБГШ, известно частично из работ [8–15], приведено полностью в работах [16, 17] (т. е. получены точные формулы для символьной и битовой ошибок) как для данных сигнальных конструкций, так и для некоторых других, используемых в современных телекоммуникационных стандартах. В частности, доказано, что вероятность ошибки в канале связи с АБГШ при когерентном приеме представляет собой алгебраическую сумму функций Оуэна, аргументы которой в общем случае будут различны для разных сигнальных конструкций [17–19].

Вторая задача, заключающаяся в выборе закона замираний и непосредственном вычислении (1), также может быть сложной. Выбор п. р. в. должен быть обоснован физически и подтверждаться экспериментальными результатами, обработанными математическими (статистическими) методами. Так, в рамках предположения о гауссовом распределении квадратурных составляющих, основанном на центральной предельной теореме, приходят к известным законам Рэлея, Райса, Хойта и Бекмана (трехпараметрическому закону). Однако только для рэлеевских замираний вычисление (1) может быть аналитически осуществлено после несложных преобразований. Для остальных случаев при аналитическом вычислении интеграла возникают математические сложности. Другой закон — Накагами — выбирается авторами чаще всего именно по причине относительной простоты вычисления (1) с помощью этого закона. Хотя было подтверждено, что закон Накагами можно применять для описания замираний, но многие авторы [20–23 и др.] указывают, что могут быть такие ситуации (каналы связи), когда справедливы и другие законы. Что еще более важно, встречаются ситуации, для которых известные распределения, полученные из гауссовой модели, не являются адекватными экспериментальным данным. Последнее время наблюдается рост публикаций, в которых рассматриваются другие п. р. в., применяемые для описания общих замираний, например,  $k$ - $\mu$ - и  $\eta$ - $\mu$ -распределения [21, 24, 25] или гамма-распределение [26]. Другим распределением, появившимся в публикациях последнего времени [20, 23, 27–30], является  $K$ -распределение, применение которого для замираний обосновано в работах [31, 32].

Для вычисления (1) часто применяется метод MGF (Moment generating function) [6] или метод CHF (Characteristic function) [33]. Эти методы формализуют вычисление (1), но по-прежнему требуют фактических формул для вероятностей ошибок.

В данной статье приведена методика расчета символьной (битовой) вероятности ошибки, причем, в отличие от известных работ в этой области, для произвольных двумерных многопозиционных сигнальных конструкций. Рассматривается канал связи с гамма- и  $K$ -замираниями и АБГШ при когерентном приеме по критерию максимального правдоподобия или максимума апостериорной вероятности.

Фактически в отдельных случаях некоторые ограничения могут быть сняты. Основное требование — вероятность ошибки должна выражаться через функцию Оуэна. Так, например, вероятность битовой ошибки для многомерной многопозиционной КАМ выражается через функцию Гаусса [17], что позволяет формально использовать данную методику и для этого случая.

### Статистика распространения радиоволн

Традиционный подход к изучению математических моделей, учитывающих распространение радиоволн и эффект многолучевости и вытекающих из их явлений случайных замираний коэффициента передачи канала связи, описываемых соответствующими п. р. в., предполагает использование центральной предельной теоремы [4–7]. Это приводит к классической гауссовой модели канала связи, когда квадратурные составляющие сигнала распределены по нормальному (гауссовому) закону. Альтернативный подход к статистике распространения радиоволн подразумевает применение других, в том числе негауссовых, распределений, интерес к которым в последнее время значительно возрос. В данной статье рассматриваются гамма- и  $K$ -распределения.

**Гамма-распределение.** Одной из математических моделей, основанной на негауссовом подходе при описании замираний, является двухпараметрическое гамма-распределение  $(\alpha, \beta)$  [26]

$$f_X^{(\Gamma)}(x) = f_X^{(\Gamma)}(x; \alpha, \beta) = \frac{(1/\beta)^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}, \quad x \geq 0, \alpha, \beta > 0. \quad (2)$$

Для обозначения того, что случайная величина (с. в.)  $X$  имеет гамма-распределение с параметрами  $(\alpha, \beta)$ , будем использовать сокращенную запись  $G(\alpha, \beta)$ . Частными случаями гамма-распределения являются экспоненциальное распределение

$G(1, \beta)$ , распределение Эрланга  $G(n, \beta)$  и хи-квадрат  $G(\nu/2, 2)$ . Для с. в.  $X \in G(\alpha, \beta)$  начальный момент  $n$ -го порядка  $m_n = \beta^n \Gamma(\alpha + n) / \Gamma(\alpha)$ . В частности, математическое ожидание  $m_1 = \alpha\beta$ , начальный момент второго порядка  $m_2 = \alpha(\alpha + 1)\beta^2$ .

**$K$ -распределение.** Основой для получения другого негауссова распределения является малоизвестный факт о некорректности центральной предельной теоремы в случае, когда число слагаемых является с. в., распределенной, например, по отрицательно биномиальному закону [33]. Тогда приходящий в точку приема сигнал имеет следующий вид:

$$s_r(t) = \sum_{i=1}^n a_j \exp[j(\omega_0 t + \phi_i)],$$

где число слагаемых  $n$  является с. в.

В этом случае приходим к  $K$ -распределению [33]

$$f_X^{(K)}(x) = f_X^{(K)}(x; \alpha, \beta) = \frac{4(\alpha/\beta)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha)} x^\alpha K_{\alpha-1} \left( 2\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} x \right), \quad x, \alpha, \beta > 0, \quad (3)$$

где  $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$ ,  $\text{Re } z > 0$  — гамма-функция;

$K_\nu(z)$  — функция Макдональда (модифицированная функция Бесселя 3-го рода), определяемая как [34–38]

$$K_\nu(z) = \frac{\pi [I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)]}{2 \sin \nu \pi}, \quad \nu \neq n; \quad K_n(z) = \lim_{\nu \rightarrow n} K_\nu(z), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Функция распределения для  $K$ -распределения

$$W(x) = 1 - \frac{2(\alpha/\beta)^{\alpha/2}}{\Gamma(\alpha)} x^\alpha K_\alpha \left( 2\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} x \right), \quad x > 0;$$

— математическое ожидание

$$m = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi \beta}{\alpha}} \frac{\Gamma(\alpha + 1/2)}{\Gamma(\alpha)};$$

— начальный момент второго порядка  $m_2 = \beta$ ;

— начальный момент  $n$ -го порядка  $m_n =$

$$= \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right) \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n/2} (\alpha)_n; \quad \text{здесь } (a)_k = \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)} \quad \text{—}$$

символ Похгаммера;

— дисперсия  $D = \sigma^2 = \beta \left[ 1 - \pi \left( (\alpha)_{1/2} \right)^2 / (4\alpha) \right];$

— характеристическая функция

$$\begin{aligned} \varphi_{\xi}(t) &= M e^{it\xi} = \int_0^{\infty} e^{it\xi} P_{\xi}(dx) = \\ &= \frac{i\sqrt{\pi\beta}(4\alpha)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right) \frac{z}{(\beta t^2 + 4\alpha)^{\alpha+1/2}} + \\ &+ {}_2F_1\left(1, \alpha; \frac{1}{2}; -\frac{\beta t^2}{4\alpha}\right), \end{aligned}$$

где  $P_{\xi}$  — распределение с. в.  $\xi$ ;

— центральный момент  $n$ -го порядка

$$\begin{aligned} \mu_n &= M\left[(\xi - m)^n\right] = \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \Gamma\left(\frac{k}{2} + 1\right) \left(\frac{1}{2} \left(-\sqrt{\frac{\pi\beta}{\alpha}}\right) (\alpha) \frac{1}{2}\right)^{n-k} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{k/2} (\alpha) \frac{k}{2}. \end{aligned}$$

Можно показать, что среднее геометрическое двух с. в., распределенных по гамма-распределению, имеет  $K$ -распределение. Действительно, рассмотрим произведение двух независимых с. в., распределенных по гамма-распределению:  $\eta = \xi_1 \xi_2$ , где  $\xi_1 \in G(\alpha_1, \beta_1)$ ,  $\xi_2 \in G(\alpha_2, \beta_2)$ . Из свойств 2.2.1.1  $\mathfrak{M}[e^{-ax}; s] = a^{-s} \Gamma(s)$  и 1.1.2.2

$\mathfrak{M}[x^{\alpha} f(x); s] = F(s + \alpha)$  [34] следует, что

$$\mathfrak{M}\left[f_X^{(\Gamma)}(x; \alpha, \beta)\right](s) = \beta^{s-1} \frac{\Gamma(s + \alpha - 1)}{\Gamma(\alpha)},$$

где

$$F(s) = \mathfrak{M}[f(x)](s) = \mathfrak{M}[f(x); s] = \int_0^{\infty} x^{s-1} f(x) dx,$$

$$s = \sigma + it$$

— преобразование Меллина [34]. Если  $F(s)$  и  $G(s)$  — преобразования Меллина функций  $f(x)$  и  $g(x)$ , то

$$\mathfrak{M}\left[\int_0^{\infty} f(\xi) g\left(\frac{x}{\xi}\right) \frac{d\xi}{\xi}\right](s) = F(s) G(s). \quad (4)$$

Известно, что преобразованию Меллина плотности распределения вероятностей с. в.  $\eta = \xi_1 \xi_2$ , представляющей собой произведение с. в.  $\xi_1$  и  $\xi_2$ , соответствует произведение преобразований Меллина п. р. в.  $\xi_1$  и  $\xi_2$  (4). Следовательно, п. р. в. случайной величины  $\eta$  может быть определена как обратное преобразование Меллина.

Из свойства 1.1.2.6 [34] получаем, что

$$\mathfrak{M}\left[x^{\alpha} f(ax^{\beta}); s\right] = \frac{1}{|\beta|} a^{-(s+\alpha)/\beta} F\left(\frac{s+\alpha}{\beta}\right).$$

Тогда из 3.14.1.3 [34]

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}[K_{\nu}(ax); s] &= \frac{2^{s-2}}{a^s} \Gamma\left(\frac{s-\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s+\nu}{2}\right), \\ &\text{Re } a > 0, \text{ Re } s > |\text{Re } \nu| \end{aligned}$$

следует, что

$$\begin{aligned} f_{\eta}(y) &= \mathfrak{M}^{-1}\left[(\beta_1 \beta_2)^{s-1} \frac{\Gamma(s + \alpha_1 - 1) \Gamma(s + \alpha_2 - 1)}{\Gamma(\alpha_1) \Gamma(\alpha_2)}; y\right] = \\ &= \frac{(\sqrt{\beta_1 \beta_2})^{\alpha_1 + \alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1) \Gamma(\alpha_2)} (\sqrt{y})^{\alpha_1 + \alpha_2 - 2} K_{(\alpha_1 - \alpha_2)/2}(2\sqrt{\beta_1 \beta_2} y). \end{aligned}$$

Произведение двух рэлеевских с. в. с параметрами  $\sigma_1^2$  и  $\sigma_2^2$  (п. р. в. Рэлея  $-f(x) = xe^{-(x^2/2\sigma^2)}/\sigma^2$ ) имеет  $K$ -распределение при  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 4\sigma_1^2\sigma_2^2$ :

$$f_X^{(K)}(x) = \frac{x}{\sigma_1^2 \sigma_2^2} K_0\left(\frac{x}{\sigma_1 \sigma_2}\right).$$

Если  $\eta = \xi_1 \xi_2$ , где  $\xi_1 \in G(\alpha_1, 1)$  и  $\xi_2 \in G(\alpha_2, 1)$  — независимые с. в., тогда [39, с. 379]

$$f_{\eta}(y) = \frac{2}{\Gamma(\alpha_1) \Gamma(\alpha_2)} (\sqrt{y})^{\alpha_1 + \alpha_2 - 2} K_{\alpha_1 - \alpha_2}(2\sqrt{y}).$$

Действительно, из 2.2.1.8 [34] следует, что

$$\mathfrak{M}\left[e^{-ax-b/x}; s\right] = 2\left(\frac{b}{a}\right)^{s/2} K_s(2\sqrt{ab}), \text{ Re } a, \text{ Re } b > 0.$$

Учитывая (4) и преобразование с. в.  $\eta = \xi^2$ , при котором преобразование п. р. в. осуществляется по  $f_{\eta}(y) = 2yf_{\xi}(y^2)$ , приходим к требуемому соотношению для  $K$ -распределения.

### Методика вычисления вероятности ошибки

Основные положения методики для канала связи с общими замираниями и АБГШ описаны в работе [17]. Вероятность ошибок при оптимальном когерентном приеме двумерных многопозиционных сигналов в канале с детерминированными параметрами и АБГШ по правилу максимального правдоподобия представляет собой алгебраическую сумму  $T$ -функций Оуэна [17, 18]

$$P_{e/b}(\gamma_{bc}) = \sum_k a_k T(\sqrt{2g_k \gamma_{bc}}, \eta_k), \quad (5)$$

где  $\gamma_{bc} = E_{bc}/N_0$  — отношение средней энергии  $E_{bc}$ , затрачиваемой на передачу одного бита, к односторонней спектральной плотности мощности шума  $N_0$ ;  $T(z, a)$  — специальная интегральная функция Оуэна, определяемая как [17–19, 40]

$$T(z, a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^a \frac{1}{1+x^2} e^{-\frac{z^2}{2}(1+x^2)} dx, \quad |\arg a| < \pi. \quad (6)$$

Из свойств  $T$ -функции Оуэна следует, в частности, что  $Q(x) = 2T(x, +\infty)$ ,  $x > 0$ , где  $Q(x) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2/2} dt$  — функция Гаусса [41].

В канале связи с общими замираниями основная цель заключается в вычислении интеграла от функции Оуэна при замираниях, описываемых распределением  $f(x)$ :

$$J = \int_0^\infty T(ax, \eta) f(x) dx, \quad (7)$$

где  $f(x)$  — п. р. в. коэффициента передачи канала  $\mu$ ; параметр  $a = \sqrt{2g\gamma_{bc}/m_2}$ ; величина  $g$  определяется в зависимости от сигнальной конструкции, а значение  $m_2 = \int_0^\infty x^2 f(x) dx$  — начальный момент второго порядка с. в. с п. р. в.  $f(x)$ .

**Замирания, описываемые гамма-распределением**

Используя (7) и полагая в гамма-распределении  $\lambda = 1/\beta$ , получаем

$$J_\Gamma = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty T(a\mu, \eta) \mu^{\alpha-1} e^{-\lambda\mu} d\mu = \frac{1}{2\pi} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \times \int_0^\eta \frac{1}{x^2+1} \left[ \int_0^\infty \mu^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{a^2}{2}(x^2+1)\mu^2 - \lambda\mu\right) d\mu \right] dx$$

или

$$J_\Gamma = \frac{1}{2\pi} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \times \int_0^\eta \frac{1}{x^2+1} \mathfrak{M}\left[\exp\left(-\frac{a^2}{2}(x^2+1)t^2 - \lambda t\right); \alpha\right] dx.$$

Поскольку из 2.2.1.6 [34] следует, что

$$\mathfrak{M}\left[e^{-at^2-bt}; s\right] = \frac{\Gamma(s)}{(2a)^{s/2}} e^{b^2/(8a)} D_{-s}\left(\frac{b}{\sqrt{2a}}\right), \quad \operatorname{Re} a, \operatorname{Re} s > 0,$$

где  $D_\nu(z) = 2^{\nu/2} e^{-z^2/4} \Psi\left(-\frac{\nu}{2}; \frac{1}{2}; \frac{z^2}{2}\right)$  — функция параболического цилиндра [35–38], то

$$J_\Gamma = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\lambda^2}{2a^2}\right)^{\alpha/2} \times \int_0^\eta \frac{1}{(x^2+1)^{\alpha/2+1}} \Psi\left(\frac{\alpha}{2}; \frac{1}{2}; \frac{\lambda^2}{2a^2(x^2+1)}\right) dx, \quad (8)$$

где  $\Psi(a; b; z)$  — вырожденная гипергеометрическая функция Трикоми, определяемая как [36]

$$\Psi(a; b; z) = \frac{\Gamma(b-1)}{\Gamma(a)} z^{1-b} {}_1F_1(a-b+1; 2-b; z) + \frac{\Gamma(1-b)}{\Gamma(a-b+1)} {}_1F_1(a; b; z), \quad b \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \Psi(a; n; z) = \lim_{b \rightarrow n} \Psi(a; b; z), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (9a)$$

или с использованием интегрального представления

$$\Psi(a; b; z) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty t^{a-1} (1+t)^{b-a-1} e^{-zt} dt, \quad (9b)$$

где  $\operatorname{Re} a, \operatorname{Re} z > 0$ . В (9a) используется вырожденная гипергеометрическая функция Куммера

$${}_1F_1(a; b; z) = \sum_{k=0}^\infty \frac{(a)_k}{(b)_k} \frac{z^k}{k!},$$

где  $(a)_k = \Gamma(a+k)/\Gamma(a)$  — символ Похгаммера.

**Замирания, описываемые К-распределением**

Для  $K$ -распределения из (7) следует, что

$$J_K = \frac{4(\alpha/\beta)^{\frac{\alpha+1}{2}}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty T(a\mu, \eta) \mu^\alpha K_{\alpha-1}\left(2\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\mu\right) d\mu = \frac{4(\alpha/\beta)^{\frac{\alpha+1}{2}}}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{2\pi} \int_0^\eta \frac{1}{x^2+1} \times \left[ \int_0^\infty \mu^\alpha \exp\left(-\frac{a^2}{2}(x^2+1)\mu^2\right) K_{\alpha-1}\left(2\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\mu\right) d\mu \right] dx$$

или

$$J_K = \frac{4(\alpha/\beta)^{\frac{\alpha+1}{2}}}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{2\pi} \int_0^\eta \frac{1}{x^2+1} \mathfrak{M}\left[\exp\left(-\frac{a^2}{2}(x^2+1)t^2\right) \times K_{\alpha-1}\left(2\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\mu\right); \alpha+1\right] dx.$$

Поскольку [34, 3.14.3.10]

$$\mathfrak{M}\left[e^{-at^2} K_\nu(bt); s\right] = \frac{a^{(1-s)/2}}{2b} e^{b^2/(8a)} \Gamma\left(\frac{s-\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s+\nu}{2}\right) W_{(1-s)/2, \nu/2}\left(\frac{b^2}{4a}\right),$$

$\operatorname{Re} a > 0, \operatorname{Re} s > |\operatorname{Re} \nu|,$

где  $W_{\mu\nu}(z) = z^{\nu+1/2} e^{-z/2} \Psi(\nu - \mu + 1/2; 2\nu + 1; z)$  — вырожденная гипергеометрическая функция Уиттекера [35–38], то

$$J_K = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{2\alpha}{\beta a^2}\right)^\alpha \times \int_0^\eta \frac{1}{(x^2+1)^{\alpha+1}} \Psi\left(\alpha; \alpha; \frac{2\alpha}{\beta a^2(x^2+1)}\right) dx. \quad (10)$$

### Новая специальная функция

Анализ выражений (8) и (10) показывает, что оба соотношения представляют собой частный случай интеграла следующего вида:

$$L(\alpha, \beta; \eta; z) = \frac{z^\alpha}{2\pi} \int_0^\eta \frac{1}{(x^2+1)^{\alpha+1}} \Psi\left(\alpha; \beta; \frac{z}{x^2+1}\right) dx. \quad (11a)$$

Математическое ожидание функции Оуэна для гамма-распределения принимает вид  $L(\alpha/2, 1/2; \eta; \lambda^2/2a^2)$ , а для К-распределения —  $L(\alpha, \alpha; \eta; 2\alpha/\beta a^2)$ . При этом  $z = \Delta(g, \alpha)/\gamma_{bc}$ , где для гамма-распределения  $\Delta(g, \alpha) = \alpha(\alpha+1)/(4g)$ , а для К-распределения  $\Delta(g, \alpha) = \alpha/g$ . Кроме того, следует учесть, что математическому ожиданию функции Гаусса  $Q(x)$  соответствует  $2L(\alpha, \beta; +\infty; z)$ , а  $Q^2(x)$  — выражение  $2[L(\alpha, \beta; +\infty; z) - L(\alpha, \beta; 1; z)]$ .

При  $\gamma_{bc} \rightarrow 0$  (обрыв канала), т. е. соответственно при  $z \rightarrow \infty$ , получаем, что

$$L(\alpha, \beta; \eta; z) = \frac{z^\alpha}{2\pi} \int_0^\eta \frac{1}{(x^2+1)^{\alpha+1}} \Psi\left(\alpha; \beta; \frac{z}{x^2+1}\right) dx \sim \frac{z^\alpha}{2\pi} \int_0^\eta \frac{1}{(x^2+1)^{\alpha+1}} \left(\frac{z}{x^2+1}\right)^{-\alpha} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^\eta \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\operatorname{arctg} \eta}{2\pi},$$

так как  $\Psi(\alpha, \beta, z) \sim z^{-\alpha}$  при  $z \rightarrow \infty$ . Здесь используется общепринятое обозначение  $f(x) \sim g(x) (x \rightarrow a)$ ,

которое означает, что  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ .

Рассмотрим альтернативные представления (11a). Легко показать, что возможен следующий вариант записи (11a):

$$L(\alpha, \beta; \eta; z) = \frac{1}{2\pi z} \int_0^\eta \left(\frac{z}{x^2+1}\right)^{\alpha+1} \Psi\left(\alpha; \beta; \frac{z}{x^2+1}\right) dx. \quad (11б)$$

Для численных расчетов, может быть, удобнее применять формулу

$$L(\alpha, \beta; \eta; z) = \frac{z^{\alpha-\beta+1}}{2\pi} \times \int_0^\eta \frac{1}{(x^2+1)^{\alpha-\beta+2}} \Psi\left(\alpha-\beta+1; 2-\beta; \frac{z}{x^2+1}\right) dx, \quad (11в)$$

основанную на тождестве  $\Psi(a; b; z) = z^{1-b} \Psi(a-b+1; 2-b; z)$  [36].

Пусть  $x^2+1 = 1/t$ , тогда из (11a) следует, что

$$L(\alpha, \beta; \eta; z) = \frac{z^\alpha}{4\pi} \int_\Lambda^1 t^{\alpha-1/2} (1-t)^{-1/2} \Psi(\alpha; \beta; zt) dt, \quad (12a)$$

где  $\Lambda = 1/(\eta^2+1)$ . Преобразуем (12a):

$$L(\alpha, \beta; \eta; z) = \frac{z^\alpha}{4\pi} \left( \int_0^1 t^{\alpha-1/2} (1-t)^{-1/2} \Psi(\alpha; \beta; zt) dt - \int_0^\Lambda t^{\alpha-1/2} (1-t)^{-1/2} \Psi(\alpha; \beta; zt) dt \right) = \frac{z^\alpha}{4\pi} \left( \int_0^1 t^{\alpha-1/2} (1-t)^{-1/2} \Psi(\alpha; \beta; zt) dt - \Lambda^{\alpha+1/2} \int_0^1 t^{\alpha-1/2} (1-\Lambda t)^{-1/2} \Psi(\alpha; \beta; z\Lambda t) dt \right) = \frac{z^\alpha}{4\pi} (I_1 - \Lambda^{\alpha+1/2} I_2). \quad (12б)$$

Первый интеграл представляет собой преобразование Меллина [34, 3.29.1.2]

$$\mathfrak{M}\left[(\sigma-t)_+^{\mu-1} \Psi(a; b; \omega t); s\right] = \int_0^\sigma t^{s-1} (\sigma-t)^{\mu-1} \Psi(a; b; \omega t) dt = \frac{\sigma^{s-b+\mu}}{\omega^{b-1}} \times \Gamma\left[\begin{matrix} b-1 \\ a \end{matrix}\right] \mathbf{B}(\mu, s-b+1) {}_2F_2\left(\begin{matrix} a-b+1, s-b+1; \sigma\omega \\ 2-b, s-b+\mu+1 \end{matrix}\right) + \sigma^{s+\mu-1} \Gamma\left[\begin{matrix} 1-b \\ a-b+1 \end{matrix}\right] \mathbf{B}(\mu, s) {}_2F_2\left(\begin{matrix} a, s; \sigma\omega \\ b, s+\mu \end{matrix}\right),$$

где  $\sigma, \operatorname{Re} \mu > 0; \operatorname{Re} s > 0, \operatorname{Re} b - 1$ ; запись  $\operatorname{Re} s > a, b$  означает  $\operatorname{Re} s > \max(a, b)$  и

$${}_pF_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; z) = {}_pF_q\left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_p; z \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k (a_2)_k \dots (a_p)_k}{(b_1)_k (b_2)_k \dots (b_q)_k} \frac{z^k}{k!}$$

— обобщенная гипергеометрическая функция [36, 37]. В формуле преобразования Меллина используется также бета-функция, определяемая как

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

Тогда  $\sigma = 1, \mu = 1/2, a = \alpha, b = \beta, \omega = z, s = \alpha + 1/2$ , следовательно:

$$I_1 = \int_0^1 t^{\alpha-1/2} (1-t)^{-1/2} \Psi(\alpha; \beta; zt) dt = \frac{1}{z^{\beta-1}} \Gamma\left[\begin{matrix} \beta-1 \\ \alpha \end{matrix}\right] \times \\ \times B\left(\frac{1}{2}, \alpha - \beta + \frac{3}{2}\right) {}_2F_2\left(\begin{matrix} \alpha - \beta + 1, \alpha - \beta + 3/2; z \\ 2 - \beta, \alpha - \beta + 2 \end{matrix}\right) + \\ + \Gamma\left[\begin{matrix} 1 - \beta \\ \alpha - \beta + 1 \end{matrix}\right] B\left(\frac{1}{2}, \alpha + \frac{1}{2}\right) {}_2F_2\left(\begin{matrix} \alpha, \alpha + 1/2; z \\ \beta, \alpha + 1 \end{matrix}\right)$$

или

$$I_1 = \int_0^1 t^{\alpha-1/2} (1-t)^{-1/2} \Psi(\alpha; \beta; zt) dt = \frac{\sqrt{\pi}}{z^{\beta-1}} \times \\ \times \Gamma\left[\begin{matrix} \beta-1, \alpha - \beta + 3/2 \\ \alpha, \alpha - \beta + 2 \end{matrix}\right] {}_2F_2\left(\begin{matrix} \alpha - \beta + 1, \alpha - \beta + 3/2; z \\ 2 - \beta, \alpha - \beta + 2 \end{matrix}\right) + \\ + \sqrt{\pi} \Gamma\left[\begin{matrix} 1 - \beta, \alpha + 1/2 \\ \alpha - \beta + 1, \alpha + 1 \end{matrix}\right] {}_2F_2\left(\begin{matrix} \alpha, \alpha + 1/2; z \\ \beta, \alpha + 1 \end{matrix}\right)$$

Рассмотрим второй интеграл

$$I_2 = \int_0^1 t^{\alpha-1/2} (1-\Lambda t)^{-1/2} \Psi(\alpha; \beta; z\Lambda t) dt = \\ = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1/2)_k}{k!} \Lambda^k \int_0^1 t^{k+\alpha-1/2} \Psi(\alpha; \beta; z\Lambda t) dt$$

Воспользовавшись определением функции Трикоми (9а), искомый интеграл можно свести к интегралам вида

$$\int_0^1 t^{c-1} {}_1F_1(a; b; \omega t) dt = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a)_m}{(b)_m (c+m)} \frac{\omega^m}{m!} = \\ = \frac{1}{c} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a)_m (c)_m}{(b)_m (c+1)_m} \frac{\omega^m}{m!} = \frac{1}{c} {}_2F_2\left(\begin{matrix} a, c; \omega \\ b, c+1 \end{matrix}\right)$$

Здесь учтено, что  $a + n = a(a+1)_n / (a)_n$ ,  $(a)_{n+k} = (a)_n (a+n)_k$ . Тогда

$$I_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1/2)_k}{k!} \Lambda^k \int_0^1 t^{k+\alpha-1/2} \times \\ \times \left[ \frac{\Gamma(\beta-1)}{\Gamma(\alpha)} z^{1-\beta} \Lambda^{1-\beta} t^{1-\beta} {}_1F_1(\alpha - \beta + 1; 2 - \beta; z\Lambda t) + \right. \\ \left. + \frac{\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(\alpha - \beta + 1)} {}_1F_1(\alpha; \beta; z\Lambda t) \right] dt$$

или

$$I_2 = \frac{1}{\alpha - \beta + 3/2} \frac{\Gamma(\beta-1)}{\Gamma(\alpha)} (z\Lambda)^{1-\beta} \times \\ \times F_{1;0;1}^{1;1;1}\left[\begin{matrix} \alpha - \beta + 3/2; 1/2; \alpha - \beta + 1; \\ \alpha - \beta + 5/2; -; 2 - \beta; \end{matrix} \Lambda, z\Lambda\right] + \\ + \frac{1}{\alpha + 1/2} \frac{\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(\alpha - \beta + 1)} F_{1;0;1}^{1;1;1}\left[\begin{matrix} \alpha + 1/2; 1/2; \alpha; \\ \alpha + 3/2; -; \beta; \end{matrix} \Lambda, z\Lambda\right],$$

где введена функция Кампе де Ферье, определяемая как [42, 43]

$$F_{l;m;n}^{p;q;k}\left[\begin{matrix} (a_p); (b_q); (c_k); \\ (\alpha_l); (\beta_m); (\gamma_n); \end{matrix} x, y\right] = \\ = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^p (a_j)_{r+s}}{\prod_{j=1}^l (\alpha_j)_{r+s}} \frac{\prod_{j=1}^q (b_j)_r}{\prod_{j=1}^m (\beta_j)_r} \frac{\prod_{j=1}^k (c_j)_s}{\prod_{j=1}^n (\gamma_j)_n} \frac{x^r y^s}{r! s!},$$

причем для сходимости ряда в правой части должно быть выполнено одно из следующих условий:

- 1)  $p + q < l + m + 1, p + k < l + n + 1, |x| < \infty, |y| < \infty$ ;
- 2)  $p + q = l + m + 1, p + k = l + n + 1$  и

$$\begin{cases} |x|^{1/(p-l)} + |y|^{1/(p-l)} < 1, & \text{если } p > l; \\ \max\{|x|, |y|\} < 1, & \text{если } p \leq l. \end{cases}$$

В итоге

$$L(\alpha, \beta; \eta; z) = \frac{z^\alpha}{4\pi} (I_1 - \Lambda^{\alpha+1/2} I_2) = \frac{z^\alpha}{4\pi} \left( \frac{\sqrt{\pi}}{z^{\beta-1}} \times \right. \\ \times \Gamma\left[\begin{matrix} \beta-1, \alpha - \beta + 3/2 \\ \alpha, \alpha - \beta + 2 \end{matrix}\right] {}_2F_2\left(\begin{matrix} \alpha - \beta + 1, \alpha - \beta + 3/2; z \\ 2 - \beta, \alpha - \beta + 2 \end{matrix}\right) + \\ + \sqrt{\pi} \Gamma\left[\begin{matrix} 1 - \beta, \alpha + 1/2 \\ \alpha - \beta + 1, \alpha + 1 \end{matrix}\right] {}_2F_2\left(\begin{matrix} \alpha, \alpha + 1/2; z \\ \beta, \alpha + 1 \end{matrix}\right) - \\ - \Lambda^{\alpha+1/2} \left( \frac{1}{\alpha - \beta + 3/2} \frac{\Gamma(\beta-1)}{\Gamma(\alpha)} (z\Lambda)^{1-\beta} \times \right. \\ \left. \times F_{1;0;1}^{1;1;1}\left[\begin{matrix} \alpha - \beta + 3/2; 1/2; \alpha - \beta + 1; \\ \alpha - \beta + 5/2; -; 2 - \beta; \end{matrix} \Lambda, z\Lambda\right] + \right.$$

$$+ \frac{1}{\alpha + 1/2} \frac{\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(\alpha-\beta+1)} F_{1;0;1}^{1;1;1} \left[ \begin{matrix} \alpha + 1/2; 1/2; \alpha; \\ \alpha + 3/2; -; \beta; \end{matrix} \Lambda, z\Lambda \right] \Bigg) \Bigg) .$$

В частности, для гамма-распределения

$$L\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{1}{2}; \eta; z\right) = \frac{z^{\alpha/2}}{4} \times \\ \times \left( -2\sqrt{z}\Gamma\left[\begin{matrix} (\alpha+2)/2 \\ \alpha/2, (\alpha+3)/2 \end{matrix}\right] {}_2F_2\left(\begin{matrix} (\alpha+1)/2, (\alpha+2)/2; z \\ 3/2, (\alpha+3)/2 \end{matrix}\right) + \right. \\ \left. + \Gamma^{-1}\left(\frac{\alpha+2}{2}\right) {}_2F_2\left(\begin{matrix} \alpha/2, (\alpha+1)/2; z \\ 1/2, (\alpha+2)/2 \end{matrix}\right) + \right. \\ \left. + \frac{2\Lambda^{(\alpha+1)/2}}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2}{\alpha+2}\Gamma^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) \times \right. \\ \left. \times \sqrt{z\Lambda} F_{1;0;1}^{1;1;1} \left[ \begin{matrix} (\alpha+2)/2; 1/2; (\alpha+1)/2; \\ (\alpha+4)/2; -; 3/2; \end{matrix} \Lambda, z\Lambda \right] - \right. \\ \left. - \frac{1}{\alpha+1} \Gamma^{-1}\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) F_{1;0;1}^{1;1;1} \left[ \begin{matrix} (\alpha+1)/2; 1/2; \alpha/2; \\ (\alpha+3)/2; -; 1/2; \end{matrix} \Lambda, z\Lambda \right] \right) \Bigg) .$$

Отсюда следует, что для гамма-распределения при  $\alpha = 1$  получим частный случай  $K$ -распределения:  $L(1/2, 1/2; \eta; z)$ .

При  $\alpha = \beta$ , т. е. для  $K$ -распределения

$$L(\alpha, \alpha; \eta; z) = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} z^\alpha e^z \times \\ \times \Gamma\left[\begin{matrix} 1-\alpha, \alpha+1/2 \\ \alpha+1 \end{matrix}\right] {}_1F_1\left(\begin{matrix} 1/2; -z \\ 1+\alpha \end{matrix}\right) - \frac{1}{4} {}_1F_1\left(\begin{matrix} 1/2; z \\ 1-\alpha \end{matrix}\right) - \\ - \frac{\sqrt{\Lambda}}{4\pi} \left(\frac{2}{3(\alpha-1)} z\Lambda F_{1;0;1}^{1;1;1} \left[ \begin{matrix} 3/2; 1/2; 1; \\ 5/2; -; 2-\alpha; \end{matrix} \Lambda, z\Lambda \right] + \right. \\ \left. + \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\alpha+1/2} (z\Lambda)^\alpha \Phi\left(\alpha + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \alpha + \frac{3}{2}; \Lambda, z\Lambda\right)\right) + \frac{1}{4},$$

где  $\Phi(a, b; c; w, z)$  — вырожденная функция Аппеля двух переменных [35–38]:

$$\Phi(a, b; c; w, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a)_{k+m} (b)_k w^k z^m}{(c)_{k+m} k! m!}, |w| < 1.$$

При преобразованиях учтено, что справедливы тождества [36]

$${}_2F_2\left(\begin{matrix} 1, a; z \\ 2, b \end{matrix}\right) = \frac{b}{az} \left[ {}_1F_1\left(\begin{matrix} a; z \\ b \end{matrix}\right) - 1 \right], a \neq 1; \\ {}_1F_1\left(\begin{matrix} a; z \\ b \end{matrix}\right) = e^z {}_1F_1\left(\begin{matrix} b-a; -z \\ b \end{matrix}\right).$$

*Свойства L-функции.* Используя соотношения для функции Трикоми при частных значениях ее параметров, нетрудно получить формулы

$$L(\alpha, \alpha + n; \eta; z) = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{n-k-1} (\alpha)_k z^{-k} J_k;$$

$$L(\beta - n, \beta; \eta; z) = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{n-k-1} (\beta - n)_k z^{-k} J_k,$$

где

$$J_k = \int_{\Lambda} t^{-k-1/2} (1-t)^{-1/2} dt = \\ = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(1/2)_m}{(m-k+1/2)m!} (1-\Lambda^{m-k+1/2}) = \\ = \frac{1}{1/2-k} \left[ {}_2F_1\left(\begin{matrix} 1, 1/2-k, 3/2-k, 1 \\ 2, 2 \end{matrix}\right) - \right. \\ \left. - \Lambda^{1/2-k} {}_2F_1\left(\begin{matrix} 1, 1/2-k, 3/2-k, \Lambda \\ 2, 2 \end{matrix}\right) \right], k = 0, 1, \dots$$

Применяя асимптотику [36]

$$\Psi(a, b, z) \sim z^{-a} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k (a)_k (a-b+1)_k}{k!} z^{-k} + \\ + O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right), z \rightarrow \infty,$$

получаем также, что

$$L(\alpha, \beta; \eta; z) \sim \frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k (\alpha)_k (\alpha-\beta+1)_k}{k!} \times \\ \times z^{-k} J_k + O\left(\frac{1}{z^{n-\alpha+1}}\right), z \rightarrow \infty.$$

### Примеры расчета вероятности ошибки

*Сигналы ФМ-М.* Вероятность символьной ошибки для ФМ-М при когерентном приеме в канале с детерминированными параметрами и АБГШ [17]

$$P_{e1}(\gamma_{bc}) = Q\left(\sqrt{2\gamma_{bc}} \sin \frac{\pi}{M}\right) + 2T\left(\sqrt{2\gamma_{bc}} \sin \frac{\pi}{M}, \operatorname{ctg} \frac{\pi}{M}\right).$$

Для расчета вероятности битовой ошибки ФМ-М,  $M = 2^K$  при коде отображения Грея справедливы следующие формулы [17]:

$$P_{b1}(\gamma_{bc}) = P_{b2}(\gamma_{bc}) = \frac{4}{M} \sum_{i=1}^{M/4} Q\left(\sqrt{2\gamma_{bc}} \sin \frac{(2i-1)\pi}{M}\right)$$

для первых двух бит и для бит  $i \geq 3$

$$P_{bi}(\gamma_{bc}) = \frac{2^{i+1}}{M} \sum_{j=1}^{M/4} (-1)^{\operatorname{ent}\left[\frac{j-1}{2^{k+1-i}}\right]} \times$$

$$\times T\left(\sqrt{2\gamma_{bc}} \sin \frac{(2j-1)\pi}{M}, \operatorname{ctg} \frac{(2j-1)\pi}{M}\right).$$

Используя свойства функции Оуэна, нетрудно показать, что справедливы следующие верхние и нижние границы ( $i \geq 3$ ):  $\frac{2^i}{M} Q_1 \leq P_{bi} \leq 2^{i-2} P_{b1}$ , где  $Q_m = Q\left(\sqrt{2\gamma_{bc}} \sin \frac{m\pi}{M}\right)$ . Для средней вероятности битовой ошибки имеем

$$\frac{1}{k} P_e \leq \frac{2}{k} Q_1 \leq P_b = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k P_{bi} \leq \frac{M}{2k} P_{b1}.$$

Сигналы КАМ-MIL-16 (стандарт MIL-STD-188-110B). Вероятность символьной ошибки для КАМ-16, образуемой объединением двух сигналов ФМ (внутренней ФМ-4 и внешней ФМ-12) и используемой в стандарте MIL-STD-188-110B, в канале с детерминированными параметрами и АБГШ при оптимальном когерентном приеме по правилу максимального правдоподобия равна [17]

$$P_e(\gamma_{bc}) = \sum_{k=1}^8 a_k T\left(\sqrt{4b_k \Pi_c^2 \gamma_{bc}}, c_k\right) + Q\left(\sqrt{4\lambda \Pi_c^2 \gamma_{bc}}\right) - \frac{1}{4} Q^2\left(\sqrt{4\lambda \Pi_c^2 \gamma_{bc}}\right),$$

где коэффициенты определены в табл. 1. При этом

$$\rho = 1 - \frac{\sqrt{6} + \sqrt{3} - \sqrt{2}}{4} = 0,308168;$$

$$k = 1 - \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{4} = 0,213434;$$

$$\lambda = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,133974;$$

$$\operatorname{tg} \xi = 4 + 2\sqrt{2} + \sqrt{3} = 8,560478;$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{6} + \sqrt{2} - 1 = 2,863703;$$

$$\operatorname{tg} \psi = 4 + 3\sqrt{3} - 4\sqrt{2 + \sqrt{3}} = 1,468746;$$

$$\begin{aligned} \sin \chi &= \frac{2 + 3\sqrt{2} - 2\sqrt{6}}{8\sqrt{\rho k}} = \\ &= \frac{2 + 3\sqrt{2} - 2\sqrt{6}}{2\sqrt{17 + 3\sqrt{2} - 6\sqrt{3} - 4\sqrt{6}}} = 0,654899. \end{aligned}$$

Максимальная и средняя энергии определяются как

$$E_m = \frac{d^2}{2 - \sqrt{3}}; \quad E_c = \frac{1 - \sqrt{3}/8}{2 - \sqrt{3}} d^2,$$

где  $d$  — минимальное евклидово расстояние сигнальной конструкции. Соответственно, квадрат пик-фактора  $\Pi_c^2 = 8(8 - \sqrt{3})^{-1} = 1,276335$ .

В канале с замираниями (гамма-распределение и  $K$ -распределение)

$$P_e(\gamma_{bc}) = \sum_{k=1}^8 a_k V(\alpha, \beta, c_k, z_k) + \frac{3}{2} V(\alpha, \beta, +\infty, z_0) + \frac{1}{2} V(\alpha, \beta, 1, z_0),$$

где  $z_k = \Delta(g_k, \alpha)/\gamma_{bc}$ ;  $g_0 = 2\lambda \Pi_c^2$ ;  $g_k = 2b_k \Pi_c^2$ ,  $k = 1, \dots, 8$ ;  $\Delta(g, \alpha) = \alpha(\alpha + 1)/(4g)$  — для гамма-распределения;  $\Delta(g, \alpha) = \alpha/g$  — для  $K$ -распределения.

На рисунке, а-в и в табл. 2 представлены результаты расчета вероятности символьной ошибки для ФМ-16, КАМ-16 и КАМ-MIL-16.

В работе [17] приведены другие формулы (например, для КАМ-М) для расчета вероятности ошибки приема в канале связи с АБГШ различных сигнальных конструкций, на основе кото-

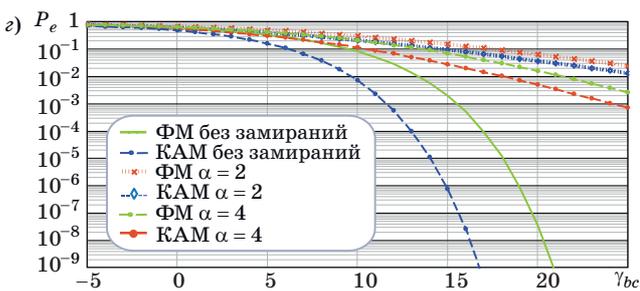
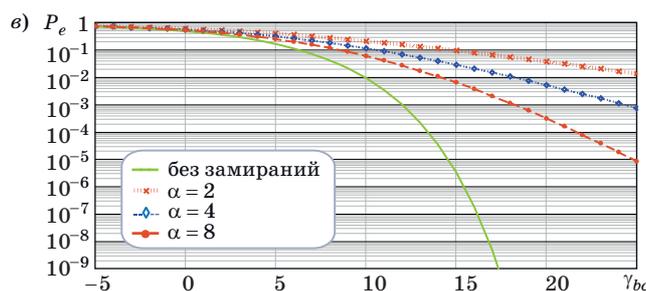
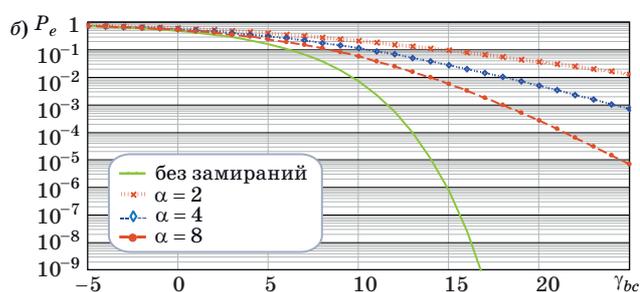
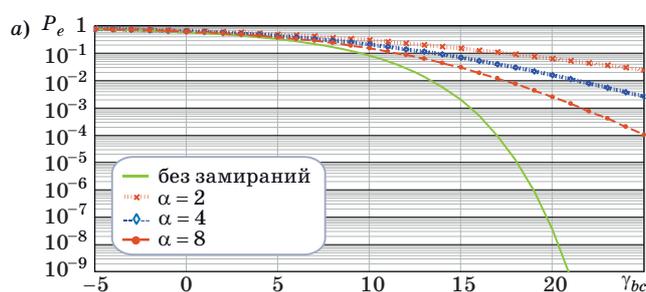
■ Таблица 1. Коэффициенты для вычисления вероятности символьной ошибки для КАМ-16  
 ■ Table 1. Coefficients to calculate probability of symbol error rate for QAM-16

$k$	$a_k$	$b_k$	$c_k$	$k$	$a_k$	$b_k$	$c_k$
1	1	$\rho$	$\operatorname{ctg} \xi$	5	1/2	$\lambda$	$\operatorname{ctg} \chi$
2	1	$\rho$	$\operatorname{ctg} \varphi$	6	-1/2	$\lambda$	$\operatorname{ctg}(2\varphi)$
3	1	$\kappa$	$\operatorname{ctg} \psi$	7	-1/2	$\lambda$	$\operatorname{ctg}(\xi + \psi)$
4	1	$\kappa$	$\operatorname{tg}(\xi - \pi/3)$	8	1/2	$\lambda$	$\operatorname{ctg}(2\xi - 2\pi/3)$

■ **Таблица 2.** Результаты расчетов отношения сигнал/шум, дБ, при заданной вероятности символьной ошибки  $\beta = 1/2$ ,  $P_e = 10^{-3}$

■ **Table 2.** The results of calculations of the signal/noise ratio, dB, at a given probability of symbolic error  $\beta = 1/2$ ,  $P_e = 10^{-3}$

Сигнал	Без замираний	$\alpha = 2$	$\alpha = 4$	$\alpha = 8$
ФМ-16	15,509694	39,718196	27,441325	21,538867
КАМ-16	11,605993	36,670103	24,083075	17,951303
КАМ-MIL-16	12,006422	36,818286	24,270026	18,193576



■ Символьная вероятность ошибок в зависимости от  $\gamma_{bc}$  при  $\beta = 1/2$  для ФМ-16 (а); КАМ-16 (б); КАМ-MIL-16 (в) и для ФМ-16 и КАМ-16 в сравнении (з)

■ Symbolic error probability depending on  $\gamma_{bc}$  at  $\beta = 1/2$  for FM-16 (a); QAM-16 (б); QAM-MIL-16 (в) and FM-16 and QAM-16 in comparison (z)

рых, используя предложенную методику, можно получить формулы для вычисления вероятностей ошибок в канале с общими замираниями, описываемыми гамма- и К-распределением.

### Заключение

В статье проведен анализ помехоустойчивости при передаче цифровой информации по каналам связи с общими (частотно-неселективными) замираниями и АБГШ при распределении коэффициента передачи канала, описываемого гамма- и К-распределением. Авторами приведены точные формулы вероятностей символьной (битовой) ошибок для многопозиционных сигналов, применяемых в современных телекоммуникационных

стандартах, функционирующие во всем диапазоне изменения значений отношения сигнал/шум. Результаты, приведенные в статье, позволяют разработчику модемов получать оценку потенциальной помехоустойчивости для многопозиционных сигнальных конструкций, используемых в телекоммуникационных стандартах, объективно сравнивать их между собой и выбирать наилучшие варианты.

### Литература

1. Sergeev A. M., Blaunstein N. Sh. Evolution of multiple-access networks — cellular and non-cellular — in historical perspective. Part 1. *Информационно-*

- управляющие системы, 2018, № 4, с. 86–104. doi:10.31799/1684-8853-2018-4-86-104
2. **Sergeev A. M., Blaunstein N. Sh.** Evolution of multi-access networks — cellular and non-cellular — in historical perspective. Part 2. *Информационно-управляющие системы*, 2018, № 5, с. 94–103. doi:10.31799/1684-8853-2018-5-94-103
  3. **Sergeev A. M., Blaunstein N. Sh.** Evolution of multi-access networks — cellular and non-cellular — in historical perspective. Part 3. *Информационно-управляющие системы*, 2018, № 6, с. 82–94. doi:10.31799/1684-8853-2018-6-82-94
  4. **Sklar B.** *Digital communications: fundamentals and applications*. Pearson education limited. Williams, 2003. Pp. 961–1029.
  5. **Proakis J. G.** *Digital communications*. 4 ed. New York, McGraw-Hill, 2001. Pp. 257–284.
  6. **Simon M. K., Alouini M.-S.** *Digital communications over fading channels: a unified approach to performance analysis*. New York, Wiley, 2005. Pp. 521–603.
  7. **Goldsmith A.** *Wireless communications*. Cambridge, UK, Cambridge Univ. Press, 2005. Pp. 180–188.
  8. **Abdelaziz M., Gulliver T. A.** Triangular constellations for adaptive modulation. *IEEE Trans. Commun.*, 2018, vol. 66, no. 2, pp. 756–766.
  9. **Rugini L.** Symbol error probability of hexagonal QAM. *IEEE Commun. Lett.*, 2016, vol. 20, no. 8, pp. 1523–1526.
  10. **Lassing J., Strom E., Agrell E., Ottosson T.** Computation of the exact bit-error rate of coherent  $M$ -ary PSK with Gray code bit mapping. *IEEE Trans. Commun.*, 2003, vol. 51, pp. 1758–1760.
  11. **Vitthaladevuni P. K., Alouini M.-S.** Exact BER computation of generalized hierarchical PSK constellations. *IEEE Trans. Commun.*, 2003, vol. 51, pp. 2030–2037.
  12. **Vitthaladevuni P. K., Alouini M.-S.** A closed-form expression for the exact BER of generalized PAM and QAM constellations. *IEEE Trans. Commun.*, 2004, vol. 52, pp. 698–700.
  13. **Tang X. Y., Alouini M.-S., Goldsmith A. J.** Effect of channel estimation error on  $M$ -QAM BER performance in Rayleigh fading. *IEEE Trans. Commun.*, 1999, vol. 47, pp. 1856–1864.
  14. **Goldsmith A. J., Chua S.-G.** Adaptive coded modulation for fading channels. *IEEE Trans. Commun.*, 1998, vol. 46, no. 5, pp. 595–602.
  15. **Simon M. K.** *Probability distributions involving gaussian random: a handbook for engineers and scientists*. New York, Springer, 2006. Pp. 131–138.
  16. **Chiani M., Dardari D., Simon M. K.** New exponential bounds and approximations for the computation of error probability in fading channels. *IEEE Trans. Wireless Commun.*, 2003, vol. 2, no. 4, pp. 840–845.
  17. **Savischenko N. V.** *Special integral functions used in wireless communications theory*. Singapore, World Scientific, 2014. Pp. 183–245.
  18. **Brychkov Yu. A., Savischenko N. V.** A special function of communication theory. *Integral Transforms and Special Functions*, 2015, vol. 26(6), pp. 470–484.
  19. **Brychkov Yu. A., Savischenko N. V.** Some properties of the Owen  $T$ -function. *Integral Transforms and Special Functions*, 2016, vol. 27(2), pp. 163–180.
  20. **Trigui I., Affes S., Liang B.** Unified stochastic geometry modeling and analysis of cellular networks in LOS/NLOS and shadowed fading. *IEEE Trans. Commun.*, 2017, vol. 65, no. 12, pp. 5470–5486.
  21. **Paris J. F.** Statistical characterization of  $\kappa$ - $\mu$  shadowed fading. *IEEE Trans. Veh. Technol.*, 2014, vol. 63, no. 2, pp. 518–526.
  22. **Pena-Martin J. P., Romero-Jerez J. M., Lopez-Martinez F. J.** Generalized MGF of Beckmann fading with applications to wireless communications performance analysis. *IEEE Trans. Commun.*, 2017, vol. 65, no. 9, pp. 3933–3943.
  23. **Bithas P. S., Kanatas A. G., Da Costa D. B., Upadhyay P. K., Dias U. S.** On the double-generalized gamma statistics and their application to the performance analysis of V2V communications. *IEEE Trans. Commun.*, 2018, vol. 66, no. 1, pp. 448–460.
  24. **Ganahe L., Sharma P. K., Varshney N., Tsiftsis T. A., Kumar P.** An improved energy detector for mobile cognitive users over generalized fading channels. *IEEE Trans. Commun.*, 2018, vol. 66, no. 2, pp. 534–545.
  25. **Yacoub M. D.** The  $\kappa$ - $\mu$  distribution and the  $\eta$ - $\mu$  distribution. *IEEE Antennas Propag. Mag.*, 2007, vol. 49, no. 1, pp. 68–81.
  26. **Головин О. В., Простов С. П.** *Системы и устройства коротковолновой радиосвязи*. М., Горячая линия-Телеком, 2006. С. 147–156.
  27. **Ben Issaid C., Ben Rached N., Kammoun A., Alouini M. S., Tempone R.** On the efficient simulation of the distribution of the sum of gamma-gamma varieties with applications to the outage probability evaluation over fading channels. *IEEE Trans. Commun.*, 2017, vol. 65, no. 4, pp. 1839–1848.
  28. **Bithas P. S., Rontogiannidis A. A.** Mobile communication systems in presence of fading/shadowing, noise and interference. *IEEE Trans. Commun.*, 2015, vol. 63, no. 3, pp. 724–737.
  29. **Bithas P. S., Sagias N. C., Mathiopoulos P. T., Karagiannidis G. K., Rontogiannidis A. A.** On the performance analysis of digital communications over generalized- $K$  fading channels. *IEEE Commun. Lett.*, 2006, vol. 10, no. 5, pp. 353–355.
  30. **Samimi H.** Distribution of the sum of  $K$ -distributed random variables and applications in free-space optical communications. *IET Optoelectronics*, 2012, vol. 6, no. 1, pp. 1–6.
  31. **Илюшин Я. А.** *Модели флуктуирующих каналов распространения радиоволн*. М., МГУ, 2009. С. 132–141.
  32. **Chatzidiamantis N. D., Karagiannidis G. K.** On the distribution of the sum of gamma-gamma variates

- and applications in RF and optical wireless communications. *IEEE Trans. Commun.*, 2011, vol. 59, no. 5, pp. 1298–1308.
33. Annamalai A., Tellambura C., Bhargava V. K. A general method for calculating error probabilities over fading channels. *IEEE Trans. Commun.*, 2005, vol. 53, no. 5, pp. 841–852.
34. Brychkov Yu. A., Marichev O. I., Svischenko N. V. *Handbook of Mellin transforms*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2018. Pp. 359–371.
35. Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I. *Integrals and series*. Vol. 1: *Elementary functions*. New York, Gordon and Breach, 1986. Pp. 289–299.
36. Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I. *Integrals and series*. Vol. 2: *Special functions*. New York, Gordon and Breach, 1986. Pp. 171–192.
37. Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I. *Integrals and series*. Vol. 3: *More special functions*. New York, Gordon and Breach, 1990. Pp. 114–123.
38. Брычков Ю. А. *Специальные функции. Производные, интегралы, ряды и другие формулы*. М., Физматлит, 2006. С. 211–236.
39. Johnson N. L., Kotz S., Balakrishnan N. *Continuous univariate distributions*. 2nd ed. New York, Wiley, 1994. Vol. 1. Pp. 212–218.
40. Patefield M., Tandy D. Fast and accurate calculation of Owen's  $T$ -function. *Journal of Statistical Software*, 2000, vol. 5, iss. 5, pp. 1–25.
41. Simon M. K. A simpler form of the Craig representation for the two-dimensional joint Gaussian  $Q$ -function. *IEEE Commun. Lett.*, 2002, vol. 6, pp. 49–51.
42. Srivastava H. M., Manocha H. L. *A Treatise on generating functions*. New York, John Wiley and Sons, 1984. Pp. 311–328.
43. Srivastava H. M., Karlsson P. W. *Multiple Gaussian hypergeometric series*. Hoboken, NJ, USA, Wiley, 1985. Pp. 283–291.

UDC 621.391

doi:10.31799/1684-8853-2019-1-76-88

### Multi-position signal coherent reception error probability in a channel with generalized gamma or $K$ fading and white noise

N. V. Svischenko<sup>a</sup>, Dr. Sc., Tech., Professor orcid.org/0000-0001-5282-2506, snikaspb@mail.ruE. V. Lebeda<sup>a</sup>, Post-Graduate Student, orcid.org/0000-0002-7919-1086<sup>a</sup>S. M. Budenny Military Academy of Communication, 3, Tikhoretskii Pr., 190064, Saint-Petersburg, Russian Federation

**Introduction:** One of the main problems in communication theory is giving definitions to such characteristics of an information transmission system as noise immunity (error probability) and transfer rate. Their knowledge allows you to determine the transmitted information quality and quantity, respectively. The calculation of the error probability for a communications channel (for example, with fading) allows you to estimate the loss or gain in noise immunity with modems of various signal designs. **Purpose:** Developing a technique for calculating the probability of a bit error with coherent reception of signals in a communication channel with additive white Gaussian noise and general (non-selective in terms of frequency) fading described by gamma distribution or  $K$  distribution (called gamma fading and  $K$  fading respectively). **Results:** The obtained relations allow you to calculate the reception noise immunity in arbitrary two-dimensional signaling designs for a communication channel with gamma or  $K$  fading and additive white Gaussian noise. Examples are given of bit error probability calculation for phase modulation and quadrature-amplitude modulation signals. The calculation of error probability in a channel with fading for two different distribution laws was reduced to a new special function which is an integral of the product of Tricomi function and an algebraic function. This allowed us to develop a universal mathematical approach valid for both variants of fading. To calculate the new special function introduced in the article and its representation through the known functions, we used both classical hypergeometric functions and a generalized hypergeometric functions of two variables which is Kampé de Fériet function. **Practical relevance:** When using multi-position signal structures in new telecommunication standards, this technique allows you to obtain an estimate of their potential noise immunity, objectively comparing signal constructions and correctly choosing the best options for new modem developer.

**Keywords** — noise immunity, fading, signal constructions, bit error probability, PSK- $M$ , QAM- $M$ .

**For citation:** Svischenko N. V., Lebeda E. V. Multi-position signal coherent reception error probability in a channel with generalized gamma or  $K$  fading and white noise. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2019, no. 1, pp. 76–88 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2019-1-76-88

### References

- Sergeev A. M., Blaunstein N. Sh. Evolution of multiple-access networks — cellular and non-cellular — in historical perspective. Part 1. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2018, no. 4, pp. 86–104. doi:10.31799/1684-8853-2018-4-86-104
- Sergeev A. M., Blaunstein N. Sh. Evolution of multiple-access networks — cellular and non-cellular — in historical perspective. Part 2. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2018, no. 5, pp. 94–103. doi:10.31799/1684-8853-2018-5-94-103
- Sergeev A. M., Blaunstein N. Sh. Evolution of multiple-access networks — cellular and non-cellular — in historical perspective. Part 3. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2018, no. 6, pp. 82–94. doi:10.31799/1684-8853-2018-6-82-94
- Sklar B. *Digital communications: fundamentals and applications*. Pearson education limited. Williams, 2003. Pp. 961–1029.
- Proakis J. G. *Digital communications*. 4 ed. New York, McGraw-Hill, 2001. Pp. 257–284.

6. Simon M. K., Alouini M.-S. *Digital communications over fading channels: a unified approach to performance analysis*. New York, Wiley, 2005. Pp. 521–603.
7. Goldsmith A. *Wireless communications*. Cambridge, UK, Cambridge Univ. Press, 2005. Pp. 180–188.
8. Abdelaziz M., Gulliver T. A. Triangular constellations for adaptive modulation. *IEEE Trans. Commun.*, 2018, vol. 66, no. 2, pp. 756–766.
9. Rugini L. Symbol error probability of hexagonal QAM. *IEEE Commun. Lett.*, 2016, vol. 20, no. 8, pp. 1523–1526.
10. Lassing J., Strom E., Agrell E., Ottosson T. Computation of the exact bit-error rate of coherent  $M$ -ary PSK with Gray code bit mapping. *IEEE Trans. Commun.*, 2003, vol. 51, pp. 1758–1760.
11. Vitthaladevuni P. K., Alouini M.-S. Exact BER computation of generalized hierarchical PSK constellations. *IEEE Trans. Commun.*, 2003, vol. 51, pp. 2030–2037.
12. Vitthaladevuni P. K., Alouini M.-S. A closed-form expression for the exact BER of generalized PAM and QAM constellations. *IEEE Trans. Commun.*, 2004, vol. 52, pp. 698–700.
13. Tang X. Y., Alouini M.-S., Goldsmith A. J. Effect of channel estimation error on  $M$ -QAM BER performance in Rayleigh fading. *IEEE Trans. Commun.*, 1999, vol. 47, pp. 1856–1864.
14. Goldsmith A. J., Chua S.-G. Adaptive coded modulation for fading channels. *IEEE Trans. Commun.*, 1998, vol. 46, no. 5, pp. 595–602.
15. Simon M. K. *Probability distributions involving gaussian random: a handbook for engineers and scientists*. New York, Springer, 2006. Pp. 131–138.
16. Chiani M., Dardari D., Simon M. K. New exponential bounds and approximations for the computation of error probability in fading channels. *IEEE Trans. Wireless Commun.*, 2003, vol. 2, no. 4, pp. 840–845.
17. Svischenko N. V. *Special integral functions used in wireless communications theory*. Singapore, World Scientific, 2014. Pp. 183–245.
18. Brychkov Yu. A., Svischenko N. V. A special function of communication theory. *Integral Transforms and Special Functions*, 2015, vol. 26(6), pp. 470–484.
19. Brychkov Yu. A., Svischenko N. V. Some properties of the Owen  $T$ -function. *Integral Transforms and Special Functions*, 2016, vol. 27(2), pp. 163–180.
20. Trigui I., Affes S., Liang B. Unified stochastic geometry modeling and analysis of cellular networks in LOS/NLOS and shadowed fading. *IEEE Trans. Commun.*, 2017, vol. 65, no. 12, pp. 5470–5486.
21. Paris J. F. Statistical characterization of  $\kappa$ - $\mu$  shadowed fading. *IEEE Trans. Veh. Technol.*, 2014, vol. 63, no. 2, pp. 518–526.
22. Pena-Martin J. P., Romero-Jerez J. M., Lopez-Martinez F. J. Generalized MGF of Beckmann fading with applications to wireless communications performance analysis. *IEEE Trans. Commun.*, 2017, vol. 65, no. 9, pp. 3933–3943.
23. Bithas P. S., Kanatas A. G., Da Costa D. B., Upadhyay P. K., Dias U. S. On the double-generalized gamma statistics and their application to the performance analysis of V2V communications. *IEEE Trans. Commun.*, 2018, vol. 66, no. 1, pp. 448–460.
24. Ganahe L., Sharma P. K., Varshney N., Tsiftsis T. A., Kumar P. An improved energy detector for mobile cognitive users over generalized fading channels. *IEEE Trans. Commun.*, 2018, vol. 66, no. 2, pp. 534–545.
25. Yacoub M. D. The  $\kappa$ - $\mu$  distribution and the  $\eta$ - $\mu$  distribution. *IEEE Antennas Propag. Mag.*, 2007, vol. 49, no. 1, pp. 68–81.
26. Golovin O. V., Prosnov C. P. *Sistemy i ustrojstva korotkovolnovoj radiosvyazi* [System and devices shortwave communication]. Moscow, Goriachaia liniia-Telekom Publ., 2006. Pp. 147–156 (In Russian).
27. Ben Issaid C., Ben Rached N., Kammoun A., Alouini M. S., Tempone R. On the efficient simulation of the distribution of the sum of gamma-gamma varieties with applications to the outage probability evaluation over fading channels. *IEEE Trans. Commun.*, 2017, vol. 65, no. 4, pp. 1839–1848.
28. Bithas P. S., Rontogiannidis A. A. Mobile communication systems in presence of fading/shadowing, noise and interference. *IEEE Trans. Commun.*, 2015, vol. 63, no. 3, pp. 724–737.
29. Bithas P. S., Sagias N. C., Mathiopoulos P. T., Karagiannidis G. K., Rontogiannidis A. A. On the performance analysis of digital communications over generalized- $K$  fading channels. *IEEE Commun. Lett.*, 2006, vol. 10, no. 5, pp. 353–355.
30. Samimi H. Distribution of the sum of  $K$ -distributed random variables and applications in free-space optical communications. *IET Optoelectronics*, 2012, vol. 6, no. 1, pp. 1–6.
31. Ilushin Y. A. *Modeli fluktuiruyushchikh kanalov rasprostraneniya radiovoln* [Models of fluctuating channels spread radiowave]. Moscow, Moskovskij gosudarstvennyj universitet Publ., 2009. Pp. 132–141 (In Russian).
32. Chatzidiamantis N. D., Karagiannidis G. K. On the distribution of the sum of gamma-gamma variates and applications in RF and optical wireless communications. *IEEE Trans. Commun.*, 2011, vol. 59, no. 5, pp. 1298–1308.
33. Annamalai A., Tellambura C., Bhargava V. K. A general method for calculating error probabilities over fading channels. *IEEE Trans. Commun.*, 2005, vol. 53, no. 5, pp. 841–852.
34. Brychkov Yu. A., Marichev O. I., Svischenko N. V. *Handbook of Mellin transforms*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2018. Pp. 359–371.
35. Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I. *Integrals and series*. Vol. 1. *Elementary functions*. New York, Gordon and Breach, 1986. Pp. 289–299.
36. Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I. *Integrals and series*. Vol. 2. *Special functions*. New York, Gordon and Breach, 1986. Pp. 171–192.
37. Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I. *Integrals and series*. Vol. 3. *More special functions*. New York, Gordon and Breach, 1990. Pp. 114–123.
38. Brychkov Yu. A. *Spetsial'nye funktsii. Proizvodnye, integraly, ryady i drugie formuly* [Special function. Derivative, integrals, ranges and other formulas]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2006. Pp. 211–236 (In Russian).
39. Johnson N. L., Kotz S., Balakrishnan N. *Continuous univariate distributions*. 2nd ed. New York, Wiley, 1994. Vol. 1. Pp. 212–218.
40. Patefield M., Tandy D. Fast and accurate calculation of Owen's  $T$ -function. *Journal of Statistical Software*, 2000, vol. 5, iss. 5, pp. 1–25.
41. Simon M. K. A simpler form of the Craig representation for the two-dimensional joint Gaussian  $Q$ -function. *IEEE Commun. Lett.*, 2002, vol. 6, pp. 49–51.
42. Srivastava H. M., Manocha H. L. *A Treatise on generating functions*. New York, John Wiley and Sons, 1984. Pp. 311–328.
43. Srivastava H. M., Karlsson P. W. *Multiple Gaussian hypergeometric series*. Hoboken, NJ, USA, Wiley, 1985. Pp. 283–291.

## Принципы диагностики незрелой эпилептической (проэпилептической) активности на ЭЭГ у крыс с генетической предрасположенностью к абсанс-эпилепсии

Е. Ю. Ситникова<sup>а</sup>, доктор биол. наук, [orcid.org/0000-0002-2819-9096](https://orcid.org/0000-0002-2819-9096), [jenia-s@mail.ru](mailto:jenia-s@mail.ru)

К. С. Смирнов<sup>а</sup>, младший научный сотрудник, [orcid.org/0000-0002-0384-647X](https://orcid.org/0000-0002-0384-647X)

В. В. Грубов<sup>б</sup>, канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник, [orcid.org/0000-0003-2491-2592](https://orcid.org/0000-0003-2491-2592)

А. Е. Храмов<sup>б</sup>, доктор физ.-мат. наук, профессор, [orcid.org/0000-0003-2787-2530](https://orcid.org/0000-0003-2787-2530)

<sup>а</sup>Институт высшей нервной деятельности и нейрофизиологии РАН, Бултерова ул., 5А, Москва, 117485, РФ

<sup>б</sup>Университет Иннополис, Университетская ул., 1, Иннополис, 420500, РФ

**Введение:** абсанс-эпилепсия – особое неврологическое расстройство, характеризующееся короткими эпизодами утраты сознания (абсансом), во время которых на электроэнцефалограмме появляются высокоамплитудные разряды в форме «пик-волна». Крысы линии WAG/Rij с генетической предрасположенностью к абсанс-эпилепсии служат надежной моделью данного заболевания, с помощью которой исследуют фундаментальные механизмы абсанс-эпилепсии, в частности, динамику формирования эпилептической активности на электроэнцефалограмме. **Цель:** разработка принципов диагностики незрелых форм пароксизмальной (так называемой проэпилептической) активности на электроэнцефалограмме у крыс WAG/Rij. **Результаты:** разработаны критерии для диагностики проэпилептической активности на ЭЭГ, полученные на основании частотно-временного анализа ЭЭГ на базе непрерывного вейвлет-преобразования с построением поверхностной вейвлетной энергии и скелетонов, которые представляли собой линии локальных максимумов на вейвлетной поверхности. Алгоритм диагностики протестирован на группе крыс линии WAG/Rij с «эпилептическим» и «бессимптомным» фенотипами. Обнаружено, что у крыс с «эпилептическим» фенотипом снижение числа проэпилептических паттернов в возрасте от 5 до 7 месяцев жизни сопровождалось ростом числа эпилептических разрядов, что могло быть связано с переходом проэпилептической активности в эпилептическую. У крыс с «бессимптомным» фенотипом возрастное снижение числа проэпилептических паттернов не сопровождалось появлением эпилептических разрядов. Снижение мгновенной частоты в течение проэпилептического паттерна было использовано в качестве дополнительного критерия для оценки степени эпилептизации распознанных паттернов. Число проэпилептических паттернов, характеризующихся снижением мгновенной частоты, у крыс WAG/Rij с «эпилептическим» фенотипом было выше, чем у крыс с «бессимптомным» фенотипом. **Практическая значимость:** аналогичный подход может быть использован для ранней диагностики абсанс-эпилепсии у пациентов, имеющих соответствующую генетическую предрасположенность, на доклинической стадии болезни.

**Ключевые слова** – генетическая модель абсанс-эпилепсии, автоматическое распознавание проэпилептической активности, непрерывное вейвлет-преобразование, пик-волновые разряды, проэпилептические паттерны на ЭЭГ, частота колебаний 5–9 Гц, крысы WAG/Rij.

**Для цитирования:** Ситникова Е. Ю., Смирнов К. С., Грубов В. В., Храмов А. Е. Принципы диагностики незрелой эпилептической (проэпилептической) активности на ЭЭГ у крыс с генетической предрасположенностью к абсанс-эпилепсии. *Информационно-управляющие системы*, 2019, № 1, с. 89–97. doi:10.31799/1684-8853-2019-1-89-97

**For citation:** Sitnikova E. Yu., Smirnov K. S., Grubov V. V., Hramov A. E. Diagnostic principles of immature epileptic (proepileptic) EEG activity in rats with genetic predisposition to absence epilepsy. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2019, no. 1, pp. 89–97 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2019-1-89-97

### Введение

Абсанс-эпилепсия занимает особое место среди эпилептических расстройств, поскольку эта так называемая малая эпилепсия, или *petit mal*, не сопровождается моторными нарушениями (в отличие от тонико-клонических судорог при большой эпилепсии, *grand mal*), но характеризуется снижением или полной потерей сознания, нечувствительностью к внешним стимулам и нарушением текущей деятельности. Для абсанс-эпилепсии характерно состояние «отсутствия» (абсанса, *absence*), во время которого на

электроэнцефалограмме (ЭЭГ) появляется высокоамплитудная ритмическая активность в виде комплексов «пик-волна» с частотой 3 Гц [1–3]. В период между приступами абсанс-эпилепсии (интериктальный период) форма ЭЭГ остается нормальной. Приступы абсанс-эпилепсии начинаются внезапно, без видимых причин и предшествующей клинической картины. Отсутствие видимых пароксизмов на ЭЭГ в интериктальный период затрудняет диагностику абсанс-эпилепсии, в отличие от височной эпилепсии, которая часто сопровождается интериктальными спайками на ЭЭГ [4]. Многолетние исследования ЭЭГ

при абсанс-эпилепсии показали наличие некоторых скрытых аномалий [5], многие из которых трудно обнаружить посредством визуального анализа ЭЭГ. В последние годы наблюдается непрерывный рост интереса к передовым методам математического анализа сигналов ЭЭГ с использованием нелинейных методов анализа ЭЭГ [6], в частности, позволяющих выявить первые признаки патологических изменений формы ЭЭГ до начала эпилептических разрядов [7, 8].

Крысы линии WAG/Rij с генетической предрасположенностью к абсанс-эпилепсии являются надежной и востребованной моделью [9–11], которую используют для исследования патофизиологических механизмов данного заболевания, факторов наследования и тестирования новых средств терапии [12]. Эта модель была предложена в 1986 г. группой исследователей из Нидерландов [9]. В конце 90-х гг. крысы линии WAG/Rij были переданы в Институт высшей нервной деятельности и нейрофизиологии РАН (ИВНД РАН), Москва, Россия, и с этих пор отечественные специалисты имеют возможность исследовать механизмы формирования абсанс-эпилепсии с использованием данной модели. Для крыс линии WAG/Rij характерно прогрессирующее развитие абсанс-эпилепсии: пароксизмальная активность отсутствует на ЭЭГ до наступления половой зрелости. Первые пик-волновые разряды появляются в возрасте от 2–3 месяцев, их число и продолжительность достигает максимума в возрасте 5–9 месяцев [13]. Таким образом, данная модель позволяет проследить возрастную динамику формирования эпилептической активности на ЭЭГ: от появления первых пароксизмальных форм в возрасте 3–5 месяцев до полностью сформированного паттерна эпилептической активности в возрасте 5–9 месяцев.

В процессе разведения крыс WAG/Rij в ИВНД РАН были получены особи, у которых, несмотря на наследственную предрасположенность, генетическая программа развития абсанс-эпилепсии не реализуется и отсутствуют пик-волновые разряды на ЭЭГ (так называемый «бессимптомный» фенотип). Причиной отсутствия эпилепсии у этих особей может быть генетический дрейф, который неизбежен в малых популяциях. У крыс WAG/Rij с «бессимптомным» фенотипом на ЭЭГ можно выделить aberrантные формы ритмической активности: переходные от нормы к патологии — *проэпилептическую активность*, которая не соответствует критериям пик-волновых разрядов. *Проэпилептическая активность* в нашем понимании — это незрелый эпилептический разряд (его латентная форма), который может развиваться в эпилептический разряд или остаться в латентном состоянии, как у крыс с «бессим-

птомным» фенотипом. Наиболее вероятным источником *проэпилептической активности* на ЭЭГ у крыс являются колебания частотой 5–9 Гц, поскольку они имеют проэпилептогенную (*pro-epileptogenic*) природу и являются непосредственными предшественниками пик-волновых разрядов [14]. Более того, незрелые эпилептические разряды у крыс имеют частоту 5–7 Гц и амплитуду, сравнимую с амплитудой нормальных сонных веретен [15, 16].

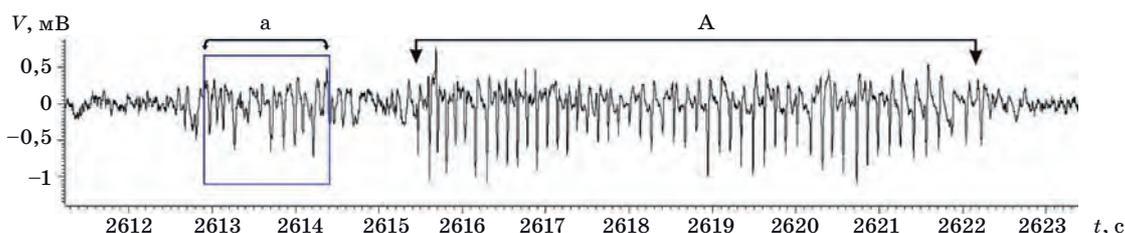
Настоящая работа нацелена на выявление проэпилептической активности у крыс линии WAG/Rij. В работе использован нелинейный метод анализа ЭЭГ на базе непрерывного вейвлет-преобразования (НВП) и построения скелетонов вейвлетной поверхности. На основе вейвлетного анализа сигналов ЭЭГ сформулированы критерии для автоматического распознавания проэпилептической активности. Полученные результаты расширяют мировой опыт применения вычислительных технологий в биомедицинских исследованиях и могут быть использованы для ранней диагностики абсанс-эпилепсии у пациентов, имеющих соответствующую генетическую предрасположенность.

## Анализ ЭЭГ

Для анализа были использованы записи ЭЭГ, полученные у 26 самцов крыс линии WAG/Rij (масса тела 320–350 г) в возрасте 5 и 7 месяцев. Длительность каждой записи составляла около суток (от 18 до 25 ч). Протоколы эксперимента одобрены комитетом по этике ИВНД РАН. Сигналы ЭЭГ были зарегистрированы с помощью эпидуральных винтовых электродов, расположенных справа над лобной корой (AP + 2 мм и L 2,5 мм относительно брегмы), референтный электрод располагался справа над мозжечком. Запись сигналов ЭЭГ проводили в полосе частотой от 0,5 до 200 Гц, частота оцифровки 400/с/канал. Эпилептическая активность в виде пик-волновых разрядов на лобной ЭЭГ представляла собой последовательность высоковольтных повторяющихся комплексов «пик-волна» с частотой 8–10 Гц и минимальной длительностью 1,5 с (рис. 1, отрезок А). Проэпилептическая активность на ЭЭГ — это колебания частотой 5–9 Гц, которые иногда предшествовали пик-волновым разрядам (рис. 1, отрезок а).

Для анализа сигналов лобной ЭЭГ было использовано НВП [17], которое представляет собой свертку исследуемого экспериментального сигнала ЭЭГ  $x(t)$  и набора базисных функций  $\varphi_{s,\tau}(t)$ :

$$W(s, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \varphi_{s,\tau}^*(t) dt, \quad (1)$$



■ **Рис. 1.** Пик-волновой разряд, зарегистрированный на лобной ЭЭГ у 7-месячной крысы WAG/Rij (A) и предшествующая ему проэпилептическая активность (a)

■ **Fig. 1.** Spike-wave discharges as recorded in frontal EEG in 7-months old WAG/Rij rat (A) and preceding proepileptic activity (a)

где  $W(s, \tau)$  — коэффициенты НВП; \* обозначает комплексное сопряжение.

Каждая базисная функция  $\varphi_{s,\tau}(t)$  формируется из функции  $\varphi_0(\eta)$ , называемой материнским вейвлетом, при помощи следующего преобразования:

$$\varphi_{s,\tau}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \varphi_0\left(\frac{t-\tau}{s}\right), \quad (2)$$

где  $s$  — временной масштаб, определяющий растяжение или сжатие материнской функции;  $\tau$  — временной сдвиг вейвлет-преобразования;  $\varphi_0(\eta)$  — материнский вейвлет. При анализе сигналов ЭЭГ вместо временного масштаба  $s$  удобно рассматривать частоту  $f_s = 1/s$ , которая вводится по аналогии с частотами фурье-спектра.

Как было показано в работе [18], для проведения частотно-временного анализа сигналов ЭЭГ оптимальным является комплексный вейвлет Морле

$$\varphi_0(\eta) = \pi^{1/4} e^{i\omega_0 \eta} e^{-\eta^2/2} \quad (3)$$

с центральной частотой  $\omega_0 = 2\pi$ , который обеспечивает максимально сбалансированное представление сигнала ЭЭГ во временной и частотной областях.

Для исследования частотно-временной структуры сигналов ЭЭГ обычно рассматривается распределение энергии вейвлет-преобразования  $E(f, t)$  (или вейвлетная поверхность)

$$E(f, t) = |W(f, t)|^2. \quad (4)$$

Для отслеживания определенных ритмов на сигнале ЭЭГ энергия вейвлет-преобразования  $E(f, t)$  может быть усреднена по частотному диапазону  $F$ , характерному для того или иного ритма:

$$E_F(t) = \int_{f \in F} E(f, t) df. \quad (5)$$

Для выявления особенностей частотной динамики сигнала ЭЭГ в некоторый фиксированный

момент времени  $t_0$  используется мгновенное распределение вейвлетной энергии

$$E_{t_0}(f) = E(f, t = t_0). \quad (6)$$

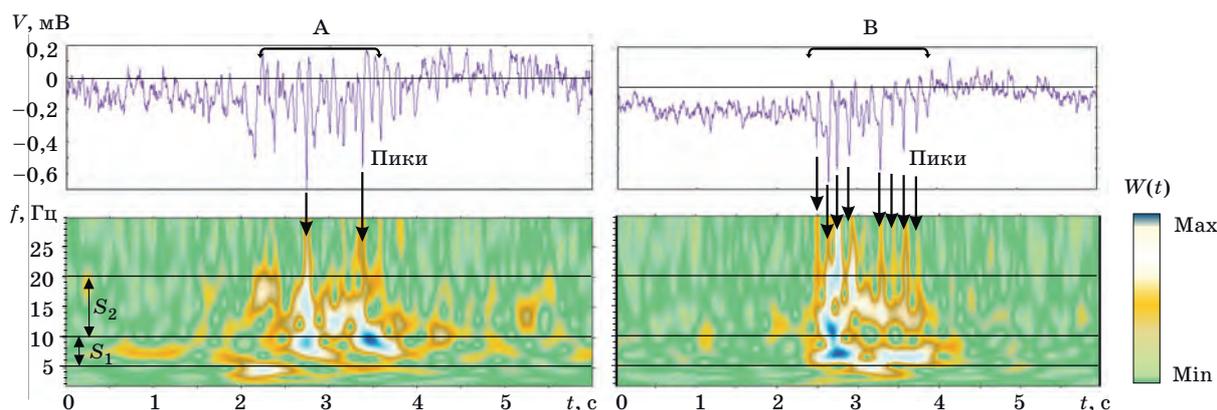
На полученном распределении  $E_{t_0}(f)$  обычно присутствуют от одного до нескольких локальных максимумов, которые в данном случае соответствуют доминантным ритмам на сигнале ЭЭГ в момент времени  $t_0$ . Если выделить локальные максимумы в каждый момент времени на сигнале ЭЭГ, то можно построить линии локальных максимумов — скелетоны, которые позволяют отследить динамику доминантных ритмов на протяжении сигнала ЭЭГ.

### Частотно-временные характеристики проэпилептических паттернов

Результаты анализа вейвлетных поверхностей позволили выявить характерные признаки проэпилептической активности на ЭЭГ у крыс WAG/Rij, которые легли в основу алгоритма для их автоматической диагностики:

- средняя частота 5–9 Гц;
- продолжительность более 1,5 с;
- наличие эпилептиформных элементов в составе паттерна (пиков);
- снижение мгновенной частоты в течение проэпилептического паттерна.

Частотно-временные портреты проэпилептических паттернов на лобной ЭЭГ у крыс WAG/Rij показаны на рис. 2. Отличительными свойствами паттернов являлись: 1) резкое начало; 2) главный максимум частоты в диапазоне от 5 до 10 Гц; 3) наличие пиков и соответствующих им всплесков мощности на вейвлетной поверхности в диапазоне 1-й гармоники от 10 до 20 Гц. Длительность каждого фрагмента составляет 6 с, вейвлетные поверхности построены в диапазоне 2–30 Гц. На рисунке слева проэпилептический паттерн представляет собой модифицированную форму сонного веретена, а справа — пик-волновой разряд,



■ **Рис. 2.** Примеры проэпилептических паттернов на лобной ЭЭГ у крысы WAG/Rij (выделены сверху) и соответствующие вейвлетные поверхности

■ **Fig. 2.** Examples of proepileptic patterns as recorded in the frontal EEG in WAG/Rij rat (as indicated on the top) and corresponding wavelet surfaces

средняя частота которого составляет около 6 Гц, т. е. ниже, чем у зрелых пик-волновых разрядов (8–10 Гц).

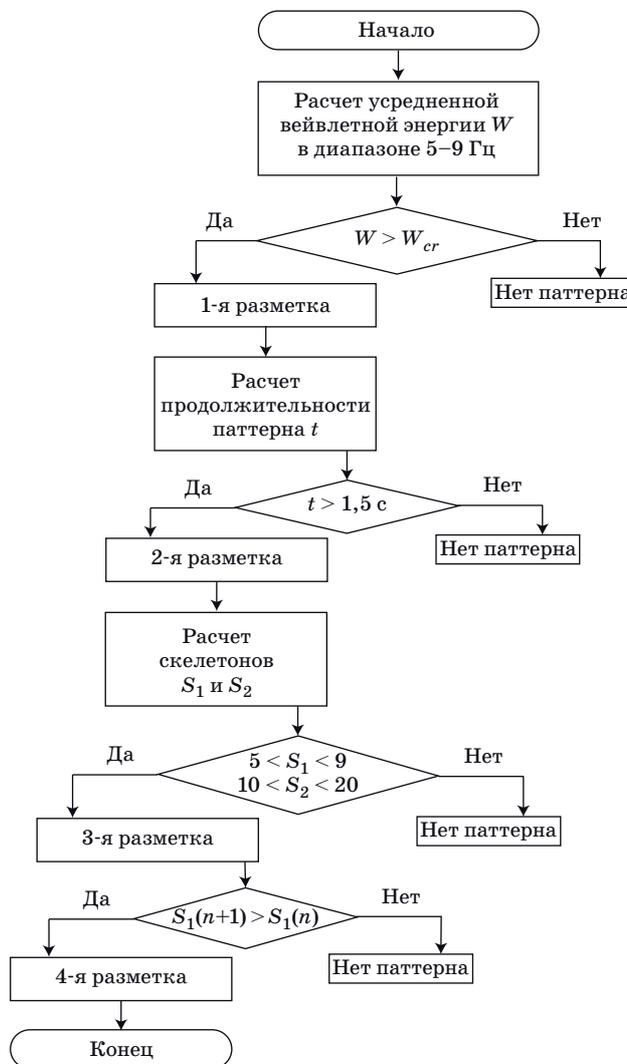
### Алгоритм автоматического обнаружения проэпилептических паттернов на ЭЭГ

Предложенный алгоритм обнаружения проэпилептических паттернов опирается на результаты работ [16, 19]. В основу алгоритма легли критерии главной частоты (5–9 Гц), продолжительности (более 1,5 с), высокой мощности в диапазоне 10–20 Гц (гармоника основной частоты), свидетельствующей о наличии ритмических «эпилептиформных» элементов (пиков) в составе паттерна. Разработанный алгоритм включал три основных шага и один опциональный (рис. 3).

**Шаг 1.** Расчет вейвлетной энергии и усреднение ее по диапазону 5–9 Гц по всей длине ЭЭГ. Амплитуда сигналов ЭЭГ варьировалась у разных особей, поэтому для каждой особи было подобрано пороговое значение мощности вейвлетной энергии  $W_{cr}$  в частотном диапазоне 5–9 Гц, составлявшее 60–70 % от максимума. При максимальных значениях вейвлетной энергии сигнала ЭЭГ порядка 0,2–0,3 пороговое значение составляло 0,11–0,18, что гарантировало выделение только высокоэнергетических паттернов. На данном этапе произведен отбор эпизодов, имевших высокую мощность, превышающую пороговое значение  $W_{cr}$  (1-я разметка).

**Шаг 2.** Удаление эпизодов длительностью менее 1,5 с. На данном этапе осуществлялась проверка того, что ритмическая активность 5–9 Гц была непрерывной, в противном случае паттерн удалялся из разметки (2-я разметка).

**Шаг 3.** Проверка частотно-временных свойств на базе скелетонов вейвлетных поверхностей



■ **Рис. 3.** Блок-схема разработанного алгоритма для автоматического обнаружения проэпилептических паттернов на ЭЭГ

■ **Fig. 3.** Block diagram of developed algorithm for automatic detection of proepileptic patterns on EEG

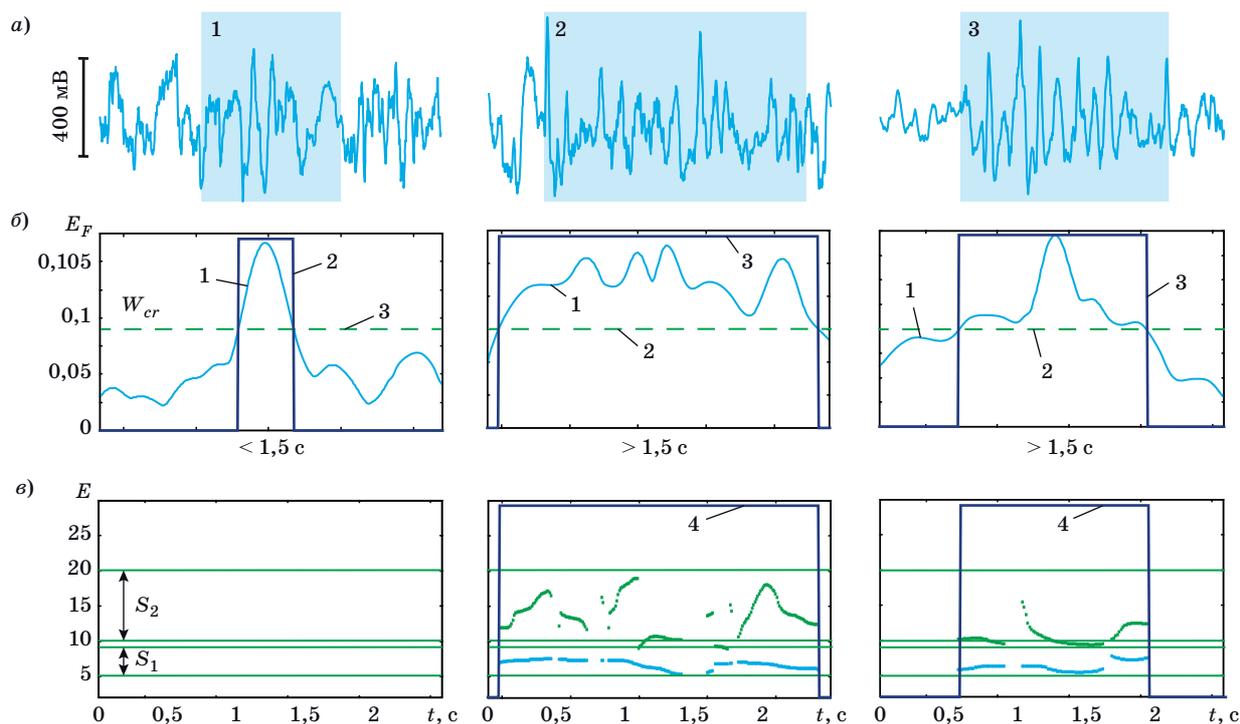
(критерий скелетонов). Для каждого эпизода из 2-й разметки в каждый момент времени строились два скелетона. Проверялся критерий принадлежности скелетонов частотным диапазонам:  $S_1 \in 5-9$  Гц (основная частота проэпилептического паттерна) и  $S_2 \in 10-20$  Гц (гармоника основной частоты). Также в каждой точке паттерна проводилась проверка критерия  $E_{S_1} > E_{S_2}$  (мощность в диапазоне  $S_1$  больше, чем в диапазоне  $S_2$ ). Если число точек, в которых выполнялись все критерии, составляло  $>70\%$  от количества всех точек паттерна, то данный паттерн проходил проверку и попадал в 3-ю разметку. Паттерны, не прошедшие проверку, удалялись (3-я разметка).

**Шаг 4 (опциональный).** Проверка динамики частоты внутри распознанных паттернов при помощи скелетонов. Проведена проверка снижения частоты в каждой точке первого скелетона. Критерий выполнялся, если мгновенная частота скелетона в предыдущей точке была выше, чем в следующей точке. Паттерн проходил проверку и попадал в финальную (4-ю) разметку, если  $>70\%$  точек паттерна удовлетворяли требованию этого критерия.

Пример работы предложенного алгоритма представлен на рис. 4. На рис. 4, а приведены фрагменты сигналов ЭЭГ, предположительно содержащие проэпилептические паттерны.

Рисунок 4, б иллюстрирует шаги 1 и 2 предложенного алгоритма. Для каждого фрагмента ЭЭГ приведены вейвлетные энергии, рассчитанные и усредненные по диапазону 5–9 Гц, и пороговое значение мощности вейвлетной энергии  $W_{cr}$ . Также здесь приведена 1-я разметка, т. е. паттерны, энергия которых превышает  $W_{cr}$ . Видно, что после шага 1 на каждом из трех фрагментов ЭЭГ был выделен предположительно проэпилептический паттерн. Также очевидно, что продолжительность паттерна на фрагменте 1 меньше 1,5 с, следовательно, после шага 2 во 2-ю разметку попадут только паттерны на фрагментах 2 и 3.

Шаги 3 и 4 алгоритма иллюстрирует рис. 4, в. Здесь приведены результаты 2-й разметки, первый и второй скелетоны, а также границы частотных диапазонов  $S_1$  и  $S_2$ . Скелетоны строились только для тех участков ЭЭГ, которые вошли во 2-ю разметку, поэтому для фрагмента 1 скелетоны отсутствуют. Проверка критериев шага 3



■ **Рис. 4.** Иллюстрация работы алгоритма: а — фрагменты ЭЭГ предположительно с проэпилептическими паттернами (затененные прямоугольники 1, 2 и 3); б — распределения вейвлетной энергии, усредненной по диапазону 5–9 Гц (линии 1); пороговое значение вейвлетной энергии  $W_{cr}$  (линии 2); паттерны, включенные в 1-ю разметку (линии 3); в — первый и второй скелетоны (точки) с границами частотных диапазонов  $S_1$  и  $S_2$  и паттерны, включенные во 2-ю разметку (линии 4)

■ **Fig. 4.** Demonstration of algorithm functionality: а — EEG fragments with plausibly proepileptic patterns (indicated by shaded rectangles with numbers 1, 2 and 3); б — distributions of wavelet power as averaged in 5–9 Hz frequency band (the lines 1); the threshold value of the wavelet energy  $W_{cr}$  (the lines 2); selected patterns of the 1st rank (the lines 3); в — the 1st and 2nd skeletons, where solid horizontal lines mark frequencies in the range of  $S_1$  and  $S_2$  and selected patterns of the 2nd rank (the lines 4)

алгоритма (т. е. для  $>70\%$  точек первый скелетон лежит в диапазоне  $S_1$ , второй — в диапазоне  $S_2$  и мощность в  $S_1$  больше мощности в  $S_2$ ) показывает, что паттерны на фрагментах 2 и 3 соответствуют данным критерия и потому включаются в 3-ю разметку. Однако критерий опционального шага 4 (т. е. снижение частоты в  $>70\%$  точек первого скелетона) не выполняется для паттерна на фрагменте 3, соответственно, в 4-ю разметку будет включен только паттерн с фрагмента 2.

### Результаты исследования проэпилептических паттернов на ЭЭГ

На околосуточных записях ЭЭГ у 26 крыс WAG/Rij эпилептические разряды в форме «пиковолна» были обнаружены у 17 животных («эпилептический» фенотип). У девяти животных эпилептическая активность практически отсутствовала («бессимптомный» фенотип). Число эпилептических разрядов у крыс с «эпилептическим» фенотипом в возрасте 5 месяцев составляло в среднем 4,4 в час, в возрасте 7 месяцев — 7,4 в час. У крыс с «бессимптомным» фенотипом — менее 0,2 разряда в час.

Распознавание проэпилептических паттернов было проведено на лобной ЭЭГ на 6-часовом отрезке времени в период с 21:00 до 3:00 ч. Результаты распознавания у каждой крысы суммированы в таблице.

Показано число проэпилептических паттернов, выделенных с использованием 3-шагового алгоритма (3-я разметка, полученная при реализации алгоритма без учета динамики мгновенной частоты в течение проэпилептического паттерна) и 4-шагового алгоритма (4-я разметка, содержащая проэпилептические паттерны, у которых зафиксировано снижение мгновенной частоты от начала к концу).

Статистический анализ числа распознанных паттернов в двух группах крыс был выполнен с использованием непараметрического критерия Манна — Уитни (уровень значимости  $p < 0,05$ ). Обнаружено, что значение  $W_{cr}$ , использованное для выделения проэпилептических паттернов у крыс с «эпилептическим» фенотипом, было значимо выше, чем у крыс с «бессимптомным» фенотипом. Среднее значение  $W_{cr}$ , использованное для построения 3-й разметки у крыс в возрасте 5 месяцев с «эпилептическим» фенотипом, составляло  $0,151 \pm 0,022$  ( $\pm$ станд. откл.), а у крыс с «бессимптомным» фенотипом —  $0,133 \pm 0,019$ . В возрасте 7 месяцев у крыс с «эпилептическим» фенотипом —  $0,138 \pm 0,028$ , у крыс с «бессимптомным» фенотипом —  $0,129 \pm 0,017$ .

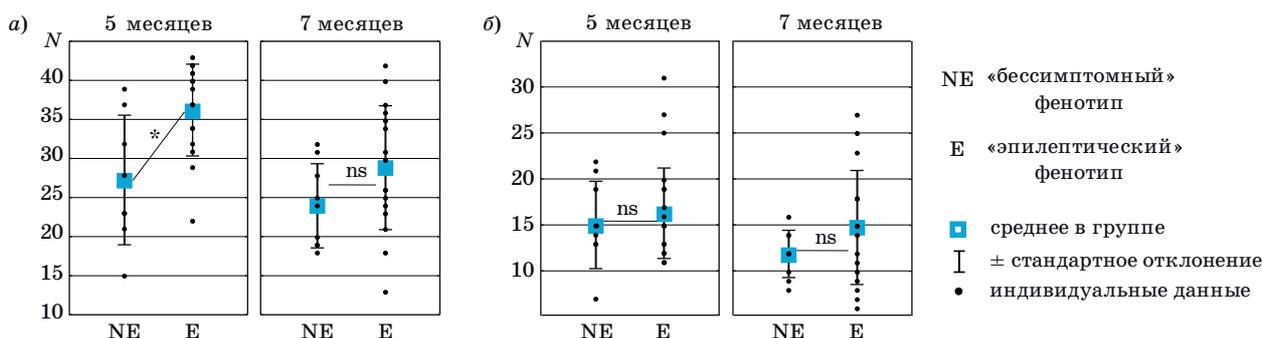
Выявлено, что с возрастом число проэпилептических паттернов в обеих группах крыс зна-

■ Результаты автоматического распознавания проэпилептических паттернов на ЭЭГ у крыс WAG/Rij с «эпилептическим» и «бессимптомным» фенотипами (среднее  $\pm$  стандартное отклонение)

■ Results of automatic recognition of proepileptic patterns in EEG in WAG/Rij rats with “epileptic” and “asymptomatic” phenotypes (mean  $\pm$  standard deviation)

ID крысы	3-я разметка у особей		4-я разметка у особей	
	5-месячных	7-месячных	5-месячных	7-месячных
<b>«Эпилептический» фенотип</b>				
N_1	57	35	40	21
N_2	57	41	32	34
N_3	49	46	37	31
N_4	69	30	42	24
N_5	72	36	41	25
P_1	33	52	22	42
P_10	46	21	31	13
P_11	61	39	42	30
P_12	49	48	34	36
P_2	60	55	41	40
P_3	63	51	43	26
P_4	69	49	53	26
P_5	52	45	39	30
P_6	50	55	37	37
P_7	40	41	29	23
P_8	55	62	40	35
P_9	46	36	34	18
<b>Среднее</b>	<b>55<math>\pm</math>11</b>	<b>44<math>\pm</math>10</b>	<b>37<math>\pm</math>7</b>	<b>29<math>\pm</math>8</b>
<b>«Бессимптомный» фенотип</b>				
NE_1	45	37	23	25
NE_2	41	45	28	31
NE_3	46	31	32	19
NE_4	58	40	37	24
NE_5	79	38	60	28
NE_6	54	44	39	32
NE_7	22	27	15	19
NE_8	36	32	21	18
NE_9	36	29	23	20
<b>Среднее</b>	<b>46<math>\pm</math>16</b>	<b>36<math>\pm</math>6</b>	<b>29<math>\pm</math>8</b>	<b>24<math>\pm</math>5</b>

чимо снижалось. У крыс с «эпилептическим» фенотипом снижение числа проэпилептических паттернов сопровождалось ростом числа эпилептических разрядов. Возможно, что с возрастом проэпилептическая активность приобретала эпилептический характер и форму зрелых пиковолновых разрядов. Таким образом, могла происходить своеобразная «эпилептизация» ритмической активности у особей с «эпилептическим»



■ **Рис. 5.** Число автоматически распознанных проэпилептических паттернов у крыс WAG/Rij с «эпилептическим» и «бессимптомным» фенотипами, отобранных алгоритмом, учитывающим динамику мгновенной частоты: *a* — снижение мгновенной частоты; *b* — иная динамика мгновенной частоты; \* — значимые различия между группами крыс (критерий Манна — Уитни,  $p < 0,05$ ); ns — незначимые различия

■ **Fig. 5.** The number of automatically detected proepileptic patterns in WAG/Rij rats with “epileptic” and “asymptomatic” phenotypes in respect to the dynamics of the instantaneous frequency: *a* — instantaneous frequency reduction; *b* — other dynamics of instantaneous frequency; \* — significant differences between groups (Mann — Whitney test,  $p < 0,05$ ); ns — differences were not significant

фенотипом. У крыс с «бессимптомным» фенотипом возрастное снижение числа проэпилептических паттернов не сопровождалось появлением пик-волновых разрядов, т. е. происходило угасание проэпилептической активности на ЭЭГ.

Известно, что у пациентов с абсанс-эпилепсией и у крыс WAG/Rij мгновенная частота пик-волновых разрядов демонстрирует максимальное значение в начале разряда и снижается к концу разряда [20, 21]. Эпизоды проэпилептической активности, выявленные с использованием предложенного алгоритма, также характеризовались снижением мгновенной частоты. Обнаружено, что примерно 50–83 % проэпилептических паттернов проходили тест на снижение мгновенной частоты (шаг 4) и попадали в 4-ю разметку.

По данным статистического анализа, у крыс с «эпилептическим» фенотипом в 5-месячном возрасте число проэпилептических паттернов, характеризующихся снижением мгновенной частоты (4-я разметка), было выше, чем у крыс с «бессимптомным» фенотипом (рис. 5, *a*). У 7-месячных крыс с «эпилептическим» и «бессимптомным» фенотипом этот показатель значимо не отличался. Число паттернов с иной динамикой мгновенной частоты у крыс двух фенотипов в возрасте 5 и 7 месяцев значимо не отличалось (рис. 5, *b*).

## Заключение

Разработаны принципы автоматического распознавания проэпилептической активности на ЭЭГ у крыс линии WAG/Rij с генетической предрасположенностью к абсанс-эпилепсии с учетом видовых особенностей. В работе использован нелинейный метод анализа ЭЭГ на базе непрерывного вейвлет-преобразования и построения ске-

letonов вейвлетной поверхности. Критериями для выделения проэпилептических паттернов на ЭЭГ служили средняя частота 5–9 Гц, продолжительность более 1,5 с, наличие эпилептиформных элементов в составе паттерна (пики).

Обнаружено, что в возрасте от 5 до 7 месяцев жизни число проэпилептических паттернов у крыс WAG/Rij значимо снижалось. Снижение числа проэпилептических паттернов у крыс с «эпилептическим» фенотипом сопровождалось ростом числа эпилептических разрядов. Возможно, что с возрастом проэпилептическая активность приобретала пароксизмальные черты и форму зрелых пик-волновых разрядов, т. е. происходила своеобразная «эпилептизация» проэпилептической активности у особей. У крыс с «бессимптомным» фенотипом возрастное снижение числа проэпилептических паттернов не сопровождалось появлением пик-волновых разрядов, т. е. происходила элиминация проэпилептической активности на ЭЭГ.

Снижение мгновенной частоты в течение проэпилептического паттерна было использовано в качестве дополнительного критерия. Обнаружено, что число проэпилептических паттернов, характеризующихся снижением мгновенной частоты у крыс WAG/Rij с «эпилептическим» фенотипом, было выше, чем у крыс с «бессимптомным» фенотипом.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российской академии наук, Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ, проект № 16-04-00275), Совета по грантам Президента Российской Федерации по государственной поддержке ведущих научных школ Российской Федерации (НШ-2737.2018.2) и Министерства образования и науки Российской Федерации (грант 3.861.2017/4.6).

## Литература

1. Карлов В. А., Гнездицкий В. В. *Абсансная эпилепсия у детей и взрослых*. М., Пресссервис, 2005. 63 с.
2. Panayiotopoulos C. P. Typical absence seizures and related epileptic syndromes: assessment of current state and directions of future research. *Epilepsia*, 2008, vol. 49, no. 12, pp. 2131–2139.
3. Вольнова А. Б., Ленков Д. Н. Абсансная эпилепсия: механизмы гиперсинхронизации нейронных ансамблей. *Медицинский академический журнал*, 2012, т. 12, № 1, с. 7–19.
4. Niedermeyer E., Lopes da Silva F. H. *Electroencephalography. Basic principles, clinical applications, and related fields*. 4th ed. Baltimore, Williams & Wilkins, 1999. 1256 p.
5. Seneviratne U., Cook M. J., D'Souza W. J. Electroencephalography in the diagnosis of genetic generalized epilepsy syndromes. *Front Neurol*, 2017, vol. 8, pp. 499. doi:10.3389/fneur.2017.00499
6. Горшков А. А., Осадчий А. Е., Фрадков А. Л. Регуляризация обратной задачи ЭЭГ/МЭГ локальным кортикальным волновым паттерном. *Информационно-управляющие системы*, 2017, № 5, с. 12–20. doi:org/10.15217/issn1684-8853.2017.5.12
7. Lüttjohann A. Disclosing hidden information in the electroencephalogram using advanced signal analytical techniques. *J Physiol*, 2017, vol. 595(23), pp. 7021–7022. doi:10.1113/JP275132
8. Максименко В. А., Харченко А. А., Лютъёханн А. Автоматизированная система для предсказания эпилептических приступов по многоканальным записям электрической активности мозга. *Информационно-управляющие системы*, 2018, № 4, с. 115–122. doi:org/10.31799/1684-8853-2018-4-115-122
9. van Luijtelaaar E. L., Coenen A. M. Two types of electrocortical paroxysms in an inbred strain of rats. *Neurosci Lett.*, 1986, vol. 70(3), pp. 393–397.
10. Coenen A. M. L., van Luijtelaaar E. L. J. M. Genetic animal models for absence epilepsy: a review of the WAG/Rij strain of rats. *Behav. Genet.*, 2003, vol. 33, pp. 635–655.
11. Depaulis A., van Luijtelaaar G. *Genetic models of absence epilepsy in the rat*. In: *Models of Seizures and Epilepsy*. Elsevier, 2017, p. 1178.
12. van Luijtelaaar E. L., Drinkenburg W. H., van Rijn C. M., Coenen A. M. Rat models of genetic absence epilepsy: what do EEG spike-wave discharges tell us about drug effects? *Methods Find Exp Clin Pharmacol.*, 2002, vol. 24, suppl. D, pp. 65–70.
13. Coenen A. M., van Luijtelaaar E. L. The WAG/Rij rat model for absence epilepsy: age and sex factors. *Epilepsy Res.*, 1987, vol. 1(5), pp. 297–301.
14. Pinault D., Slézia A., Acsády L. Corticothalamic 5–9 Hz oscillations are more pro-epileptogenic than sleep spindles in rats. *J Physiol*, 2006, vol. 574, pp. 209–227.
15. Çarçak N., Aker R. G., Özdemir O., Demiralp T., Onat F. Y. The relationship between age-related development of spike-and-wave discharges and the resistance to amygdaloid kindling in rats with genetic absence epilepsy. *Neurobiology of Disease*, 2008, vol. 32(3), pp. 355–363. doi:10.1016/j.nbd.2008.07.018
16. Sitnikova E., Hramov A. E., Grubov V., Koronovskiy A. A. Age-dependent increase of absence seizures and intrinsic frequency dynamics of sleep spindles in rats. *Neurosci J.*, 2014, vol. 2014, p. 370764. doi:10.1155/2014/370764
17. Hramov A. E., Koronovskii A. A., Makarov V. A., Pavlov A. N., Sitnikova E. *Wavelets in Neuroscience*. London, Springer Series in Synergetics, Springer, Heidelberg, New York, 2015, 318 p.
18. Павлов А. Н., Храмов А. Е., Короновский А. А., Ситникова Е. Ю., Макаров В. А., Овчинников А. А. Вейвлет-анализ в нейродинамике. *Успехи физических наук*, 2012, т. 182(9), с. 905–939. doi:10.3367/UFNr.0182.201209a.0905
19. Sitnikova E. Yu., Hramov A. E., Grubov V. V., Koronovskii A. A. Time-frequency characteristics and dynamics of sleep spindles in WAG/Rij rats with absence epilepsy. *Brain research*, 2014, vol. 1543, pp. 290–299. doi:10.1016/j.brainres.2013.11.001
20. Габова А. В., Боснякова Д. Ю., Босняков М. С., Шацкова А. Б., Кузнецова Г. Д. Частотно-временная структура разрядов пик-волна генетической absence-эпилепсии. *Доклады Академии наук*, 2004, т. 396(4), с. 557–560.
21. Bosnyakova D., Gabova A., Zharikova A., Gnezditski V., Kuznetsova G., van Luijtelaaar G. Some peculiarities of time-frequency dynamics of spike-wave discharges in humans and rats. *Clin Neurophysiol.*, 2007, vol. 118, pp. 1736–1743.

UDC 57.087.1 + 616.853 + 530.182

doi:10.31799/1684-8853-2019-1-89-97

**Diagnostic principles of immature epileptic (proepileptic) EEG activity in rats with genetic predisposition to absence epilepsy**E. Yu. Sitnikova<sup>a</sup>, Dr. Sc., Biol., orcid.org/0000-0002-2819-9096, jenia-s@mail.ruK. S. Smirnov<sup>a</sup>, Junior Researcher, orcid.org/0000-0002-0384-647XV. V. Grubov<sup>b</sup>, PhD, Phys.-Math, Senior Researcher, orcid.org/0000-0003-2491-2592A. E. Hramov<sup>b</sup>, Dr. Sc., Phys.-Math., Professor, orcid.org/0000-0003-2787-2530<sup>a</sup>Institute of Higher Nervous Activity and Neurophysiology of RAS, 5A, Butlerova St., 117485, Moscow, Russian Federation<sup>b</sup>Innopolis University, 1, Universitetskaya St., 420500, Innopolis, Russian Federation

**Introduction:** Absence epilepsy is a specific neurological disorder characterized by brief episodes of loss of consciousness (absence) accompanied by high-amplitude “spike-wave” discharges in the electroencephalogram (EEG). WAG/Rij rats with a genetic predisposition to absence epilepsy are used as a reliable model of this disease. This model is beneficial for investigating basic mechanisms of absence epilepsy, including the development of spike-wave seizures. **Purpose:** Establishing diagnostic principles for immature forms of spike-wave activity in EEG (so-called proepileptic activity) of WAG/Rij rats. **Results:** Diagnostic criteria are proposed for proepileptic EEG activity in rats, based on time-frequency analysis with the continuous wavelet transform and skeletons of wavelet surfaces. The algorithm was tested in “epileptic” and “asymptomatic” individuals. Rats with the “epileptic” phenotype demonstrated a decrease in number of proepileptic patterns between 5 and 7 months of age in parallel to an increase in the number of epileptic discharges that might relate to the transformation of proepileptic activity to epileptic. In rats with the “asymptomatic” phenotype, the age-related decline in the number of proepileptic patterns was not accompanied by the occurrence of spike-wave discharges. A decrease in the instantaneous frequency was found in a larger number of proepileptic patterns in “epileptic” WAG/Rij rats as compared to “asymptomatic” individuals. **Practical relevance:** A similar approach can be used for early diagnosis of absence epilepsy at the preclinical stage in patients with genetic predisposition.

**Keywords** — genetic model of absence epilepsy, automatic detection of proepileptic activity, continuous wavelet transform, spike-wave discharges, proepileptic patterns in EEG, 5–9 Hz oscillations, WAG/Rij rats.

**For citation:** Sitnikova E. Yu., Smirnov K. S., Grubov V. V., Hramov A. E. Diagnostic principles of immature epileptic (proepileptic) EEG activity in rats with genetic predisposition to absence epilepsy. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2019, no. 1, pp. 89–97 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2019-1-89-97

**References**

- Karlov V. A., Gnezditsky V. V. *Absansnaya epilepsiya u detey i vzroslykh* [Absence epilepsy in children and adults]. Moscow, Presservis Publ., 2005. 63 p. (In Russian).
- Panayiotopoulos C. P. Typical absence seizures and related epileptic syndromes: assessment of current state and directions of future research. *Epilepsia*, 2008, vol. 49, no. 12, pp. 2131–2139.
- Vol'nova A. B., Lenkov D. N. Absence epilepsy: mechanisms of hypersynchronization of neuronal networks. *Meditinskii akademicheskii zhurnal*, 2012, vol. 12, no. 1, pp. 7–19 (In Russian).
- Niedermeyer E., Lopes da Silva F. H. *Electroencephalography. Basic principles, clinical applications, and related fields*. 4th ed. Baltimore, Williams & Wilkins, 1999. 1256 p.
- Seneviratne U., Cook M. J., D'Souza W. J. Electroencephalography in the diagnosis of genetic generalized epilepsy syndromes. *Front Neurol*, 2017, vol. 8, pp. 499. doi:10.3389/fneur.2017.00499
- Gorshkov A. A., Ossadtchi A. E., Fradkov A. L. Regularization of EEG/MEG inverse problem with a local cortical wave pattern. *Informatsionno-upravliaiushchie systemy* [Information and Control Systems], 2017, no. 5, pp. 12–20 (In Russian). doi:org/10.15217/issn1684-8853.2017.5.12
- Lüttjohann A. Disclosing hidden information in the electroencephalogram using advanced signal analytical techniques. *J Physiol*, 2017, vol. 595(23), pp. 7021–7022. doi:10.1113/JP275132
- Maksimov V. A., Harchenko A. A., Lüttjohann A. Automated system for epileptic seizures prediction based on multi-channel recordings of electrical brain activity. *Informatsionno-upravliaiushchie systemy* [Information and Control Systems], 2018, no. 4, pp. 115–122 (In Russian). doi:org/10.31799/1684-8853-2018-4-115-122
- van Luijtelea E. L., Coenen A. M. Two types of electrocortical paroxysms in an inbred strain of rats. *Neurosci Lett.*, 1986, vol. 70(3), pp. 393–397.
- Coenen A. M. L., van Luijtelea E. L. J. M. Genetic animal models for absence epilepsy: a review of the WAG/Rij strain of rats. *Behav. Genet.*, 2003, vol. 33, pp. 635–655.
- Depaulis A., van Luijtelea G. *Genetic models of absence epilepsy in the rat*. In: *Models of Seizures and Epilepsy*. Elsevier, 2017, p. 1178.
- van Luijtelea E. L., Drinkenburg W. H., van Rijn C. M., Coenen A. M. Rat models of genetic absence epilepsy: what do EEG spike-wave discharges tell us about drug effects? *Methods Find Exp Clin Pharmacol.*, 2002, vol. 24, suppl. D, pp. 65–70.
- Coenen A. M., van Luijtelea E. L. The WAG/Rij rat model for absence epilepsy: age and sex factors. *Epilepsy Res.*, 1987, vol. 1(5), pp. 297–301.
- Pinault D., Slézia A., Acsády L. Corticothalamic 5–9 Hz oscillations are more pro-epileptogenic than sleep spindles in rats. *J Physiol*, 2006, vol. 574, pp. 209–227.
- Çarçak N., Aker R. G., Özdemir O., Demiralp T., Onat F. Y. The relationship between age-related development of spike-and-wave discharges and the resistance to amygdaloid kindling in rats with genetic absence epilepsy. *Neurobiology of Disease*, 2008, vol. 32(3), pp. 355–363. doi:10.1016/j.nbd.2008.07.018
- Sitnikova E., Hramov A. E., Grubov V., Koronovsky A. A. Age-dependent increase of absence seizures and intrinsic frequency dynamics of sleep spindles in rats. *Neurosci J.*, 2014, vol. 2014, p. 370764. doi:10.1155/2014/370764
- Hramov A. E., Koronovskii A. A., Makarov V. A., Pavlov A. N., Sitnikova E. *Wavelets in Neuroscience*. London, Springer Series in Synergetics, Springer, Heidelberg, New York, 2015. 318 p.
- Pavlov A. N., Khramov A. Ye., Koronovskiy A. A., Sitnikova Ye. Yu., Makarov V. A., Ovchinnikov A. A. Wavelet analysis in neurodynamics. *Uspekhi fizicheskikh nauk* [Physics–Uspekhi], 2012, vol. 182(9), pp. 905–939 (In Russian). doi:10.3367/UFNr.0182.201209a.0905
- Sitnikova E. Yu., Hramov A. E., Grubov V. V., Koronovskii A. A. Time-frequency characteristics and dynamics of sleep spindles in WAG/Rij rats with absence epilepsy. *Brain research*, 2014, vol. 1543, pp. 290–299. doi:10.1016/j.brainres.2013.11.001
- Gabova A. V., Bosnyakova D. Yu., Bosnyakov M. S., Shatskova A. B., Kuznetsova G. D. The time-frequency structure of the spike-wave discharges in genetic absence epilepsy. *Doklady Akademii nauk*, 2004, vol. 396(4), pp. 557–560 (In Russian).
- Bosnyakova D., Gabova A., Zharikova A., Gnezditski V., Kuznetsova G., van Luijtelea G. Some peculiarities of time-frequency dynamics of spike-wave discharges in humans and rats. *Clin Neurophysiol.*, 2007, vol. 118, pp. 1736–1743.

UDC 621.371

doi:10.31799/1684-8853-2019-1-98-101

## Mobile network synthesis strategy

V. Lyandres<sup>a</sup>, PhD, Professor, [orcid.org/0000-0002-1430-887X](https://orcid.org/0000-0002-1430-887X), [lyandres@ee.bgu.ac.il](mailto:lyandres@ee.bgu.ac.il)<sup>a</sup>Department of Electrical and Computer Engineering, Ben-Gurion University of the Negev, P.O.B. 653, 1, Ben-Gurion St., Beer-Sheva, 74105, Israel

**Introduction:** Effective synthesis of a mobile communication network includes joint optimisation of two processes: placement of base stations and frequency assignment. In real environments, the well-known cellular concept fails due to some reasons, such as not homogeneous traffic and non-isotropic wave propagation in the service area. **Purpose:** Looking for the universal method of finding a network structure close to the optimal. **Results:** The proposed approach is based on the idea of adaptive vector quantization of the network service area. As a result, it is reduced to a 2D discrete map split into zones with approximately equal number of service requests. In each zone, the algorithm finds such coordinates of its base station that provide the shortest average distance to all subscribers. This method takes into account the shortage of the a priori information about the current traffic, ensures maximum coverage of the service area, and what is not less important, significantly simplifies the process of frequency assignment.

**Keywords** – mobile network design, vector quantization, base stations placement, frequency assignment.

**For citation:** Lyandres V. Mobile network synthesis strategy. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2019, no. 1, pp. 98–101. doi:10.31799/1684-8853-2019-1-98-101

### Introduction

Mobile radio networks operating nowadays have been designed with the help of the well-known cellular concept. It considers the space structure of the network as a regular hexagonal cell lattice with a periodic frequency reuse pattern [1, 2]. This design strategy is widely accepted as it provides the most economic covering of the service area, the densest packing of co-channel cells and is relatively simple. Except for cell splitting [3], no other solution has been proposed to overcome those events.

The frequency assignment problem (FAP) has been extensively studied, and many heuristics were proposed to solve it effectively [4–7]. Since most of these techniques deal with fixed distance and/or frequency constraints they “generate” regular reuse patterns, i.e. solve FAP for networks built following classical cellular concept. However, it does not permit to fulfill design that is adapted to not-homogeneous and not-isotropic radio wave propagation, as well as to not constant or a priori not known traffic density (distribution of channel requests). The latter point is the most significant factor in the complexity of the efficient network design [8], which must answer the following requirements: it must be capable to find the optimal location of base stations according to the spatial users distribution; it must take into account the propagation conditions to guarantee maximum service coverage, and at last, it must create configurations as homogeneous as possible in order to reduce the complexity of FAP solution.

A number of studies aimed to optimize the network design is known, however, most of them were focused in providing coverage requirements,

without paying much attention to the FAP complexity [9–12]. The adaptive traffic design approach leads to a not regular network structure without fixed reuse pattern and requires a signal-to-interference (SIR) test after the FAP is solved. What is not less important, overestimation of constraints may waste spectrum.

It would be desirable to find such a technique for the FAP that performs the SIR tests in the assignment process itself, minimizes spectrum and provides the desirable high homogeneity of the network.

### Vector quantization

Our question is analogous to a well-known problem in information theory, namely, so called vector quantization (VQ) [13], that involves classification of data blocks into a discrete number of cells in such a way that optimizes some quality criterion, for example mean square distortion. It represents an evident extension of scalar quantization, which includes two operations over continuous-time and continues-amplitude signal: sampling and quantization. This converts the signal into a sequence of discrete-time quantized values. VQ is characterized by its dimension, i.e. by the number of joint samples, which are considered as a single vector. Then, VQ approximates an infinite set of source vectors by a limited set of code vectors (in the scalar case by a limited set of discrete amplitudes), that forms a code book. The evident distortion, which takes place in such representation of a multidimensional signal is measured by a cost function, commonly the squared Euclidean norm or mean square error. In the framework of mobile

network design, the source (signal) is the two dimensional field with spatially distributed channel requirements.

The VQ problem is formulated as following: given the source vector  $\mathbf{x}$  with probability multidimensional density  $f(\mathbf{x})$ , the code vector  $\mathbf{y}_i$  and the mean square error

$$d^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{j=1}^k |x_j - y_{ij}|^2, \quad i \in \{1, \dots, N\}. \quad (1)$$

The aim is to find optimal code vector which minimizes

$$D^2 = E \left[ d^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}_i) \right], \quad \forall \mathbf{x}. \quad (2)$$

The code book is then partitioned in such a way that for each vector  $\mathbf{x}$  a nearest neighbor code vector  $\mathbf{y}_i$  exists. This operation is known as Voronoi partition, with the code vectors being the centroids of each Voronoi region.

In our case we may write out the VQ problem formulated in such a way: given a set  $\mathbf{S}$  of  $n$  points in  $R^2$ ; to find its Voronoi partition, i.e. to break down  $R^2$  into  $n$  two-dimensional regions  $vo(\mathbf{p})$ , where  $\mathbf{p} \in \mathbf{S}$ , which are called the Voronoi cells of  $\mathbf{p}$ , and are defined as the set of points in  $R^2$  that are closer to any other points in  $\mathbf{S}$ , or more precisely:

$$vo(\mathbf{p}) = \left\{ \mathbf{x} \in R^2 \mid \text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \leq \text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{q}) \forall \mathbf{q} \in (\mathbf{S} - \mathbf{p}) \right\}. \quad (3)$$

The *dist* in (3) is the Euclidean distance function. The set of all such cells forms a cell complex with so called Voronoi vertices.

### Vector quantizer design problem with help of training sequence

In general, the probability density function of the source is rarely known and what's more it is not stationary. The rate distortion theory offers for overcoming this difficulty to use a training sequence that best represents the source in order to optimize the code book by applying a clustering Lloyd algorithm [14]. However, in solution of adaptive VQ it needs certain modifications. If in the clustering analysis one wishes to group things, and the groups can change in time, in VQ one wishes to fix the group in order to get a time-invariant quantizer and then use it on future data outside the training sequence.

The problem of design adaptive vector quantizer design can be stated as follows:

- given a vector source with certain statistical parameters;

- given a distortion measure;
- given a training sequence consisting of  $M$  two-dimensional source vectors:

$$\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_M\}. \quad (4)$$

Find a code book and a partition which result together lead to the smallest average distortion. We assume that the training sequence is sufficiently long, so that all the statistical properties of the source are captured by the training sequence.

Let  $N$  be the number of code vectors forming the code book:

$$\mathbf{C} = \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_N\}. \quad (5)$$

Let  $S_n$  be the encoding region associated with code vector  $\mathbf{y}_n$  and let us denote the partition of the space as

$$\mathbf{S} = \{S_1, S_2, \dots, S_N\}. \quad (6)$$

If the source vector  $\mathbf{x}_m$  is in the encoding region  $S_n$ , then its approximation, denoted by  $\mathbf{q}(\mathbf{x}_m)$  is  $\mathbf{y}_n$ , i.e.

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}_n, \quad \forall \mathbf{x} \in S_n. \quad (7)$$

Averaging a square distance measure, we obtain:

$$\bar{D} = \frac{\sum_{m=1}^M \|\mathbf{x}_m - \mathbf{q}(\mathbf{x}_m)\|^2}{M}. \quad (8)$$

In nomenclature of optimization theory, our problem can be stated as follows: given  $\mathbf{X}$  and  $N$ , find  $\mathbf{C}$  and  $\mathbf{S}$ , such that  $\bar{D}$  is minimized. If  $\mathbf{C}$  and  $\mathbf{S}$  represent together a solution, then they must satisfy two criteria of optimality: *nearest neighbor condition* and *centroid condition*. The first criterion requires the following: the encoding region  $S_n$  should consist of all vectors that are closer to  $\mathbf{y}_n$  than any of the other code vectors, i.e.

$$S_n = \left\{ \mathbf{x} : \|\mathbf{x} - \mathbf{y}_n\|^2 \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}_l\|^2 \forall l \neq n \right\}. \quad (9)$$

This expression is practically the same as (3), meaning that the optimal partition is a Voronoi partition.

The second criterion requires from the code vectors to be average of all training vectors that are in the encoding region.

A solution fulfilling to these two conditions of optimal VQ for a known probabilistic model or on a long training sequence of data may be obtained with help of the Linde — Buzo — Gray (LBG) algorithm [15], the most known application in speech processing.

## Vector quantizer as a mobile network design strategy

It is almost evident that the VQ problem has some points in common with the problem of effective mobile network design, so it is worth to start by redefining all variables of VQ in the framework of network design.

A two-dimensional source with known long-term statistical behavior properties is a map with the spatially distributed traffic. Traditionally, this information is represented by the data from so-called service test points, which are defined on a grid with available propagation and service information. However, if in the case of speech processing those service test points may be used themselves as a training sequence in the LBG algorithm, in the network design problem samples of the real space traffic distribution obtained with help of so-called *demand node concept* are preferable [16]. In this approach, a demand node represents the center of the area that contains a quantum of traffic, i.e. a fixed number of call requests per time unit, so the demand node concept discretizes the traffic distribution in both space and demand. This empirical data for every area of the map is derived from population distribution and is to be stored in a traffic matrix. The demand nodes are dense in highly populated areas and sparse in less populated regions. An alternative approach to create training sequences with the advantage of mathematical tractability is to model the spatial traffic distribution with an analytical bi-variate probability density function and perform a Monte-Carlo process that could create a sampled version of the analytical expression.

The code book of two-dimensional VQ is directly mapped to the set of the network base stations. Finding the optimal code book is equivalent to finding their optimal location. A problem arises when we are going to design a completely new network with predetermined number of base stations. In those cases, the classical cellular concept approach may be applied to generate their optimized set. A network with a regular hexagonal lattice now can be regarded as the equivalent of a uniform quantizer and the corresponding set of base stations as the equivalent of the initial code book to be optimized.

The Euclidean distance as the criteria of optimization is adequate to the case of macrocellular environment where the path loss mainly depends on the distance between transmitter and receiver, increasing according to an exponential rule. It is worth to clarify here that this distortion measure represents a distance excess and therefore an increase of transmitting power and interference to neighbor cells. Hence, minimizing the Euclidean

distance means minimization of path loss excess and so optimization of transmitting power.

According to equation (3) the Voronoi partition guaranties that for any demand of service generated within the covered area, the closest base station will carry it. Under the assumption of propagation conditions defined as a function of only distance, the coverage of the furthest point from a base station within the Voronoi region would guarantee coverage of all the rest. Since the goal of VQ is to achieve a local uniformity of the source probability within every encoding region, the same local uniformity is expected in the network synthesized. This means that in every cell the probability of finding the training sequence of LBG algorithm is slightly the same, which is clear from consideration the fact that in a Voronoi cell complex a higher concentration of training vectors is found in smaller cells.

## Conclusion

We consider an approach to effective design of mobile network with not uniform space distribution of requests. It is based on the idea of vector quantization and fulfills all the requirements identified as necessary for adaptation to traffic, i.e. guarantees the optimal location of base stations as well as maximum coverage. The proposed method creates configurations as homogeneous as possible in order to reduce the complexity of the frequency-assignment process. Such homogeneity can be achieved by adapting the size of every cell to the user distribution in such a way that approximately the same number of users can be expected within every cell, leading to the same number of channel requests.

## References

1. McDonald V. H. The cellular concept. *The Bell System Technical Journal*, 1979, vol. 58, no. 1, pp. 15–41.
2. Lee W. C. Y. Elements of cellular mobile radio systems. *IEEE Transaction on Vehicular Technology*, 1986, vol. 35, no. 2, pp. 48–56.
3. Stallings W. *Wireless communications and networks*. 2nd ed. Prentice Hall, 2005. 596 p.
4. Box F. A Heuristic Technique for assigning frequencies to mobile radio nets. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 1979, vol. 27, pp. 57–64.
5. Baybars I. Optimal assignment of broadcasting frequencies. *European Journal of Operations Research*, 1982, no. 9, pp. 257–263.
6. Borndörfer R., Eisenblätter A., Grötschel M., Martin A. Frequency assignment in cellular phone net-

- works. *Annals of Operations Research*, 1998, no. 76, pp. 73–93.
7. Lyandres V. Heuristics of channel allocation in radio networks. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy [Information and Control Systems]*, 2016, no. 3, pp. 47–50. doi:10.15217/issn1684-8853.2016.3.47
  8. Aardal K. I., Hurkens C. A. J., Lenstra J. K., & Tiourine S. R. Algorithms for radio link frequency assignment: the CALMA project. *Operations Research*, 2002, vol. 50, no. 6, pp. 968–980.
  9. Chavez-Santiago R., Gigi E., Lyandres V. Complexity analysis of a heuristic method for fixed-frequency assignment including adjacent channel interference. *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, 2008, vol. 50, no. 1, pp. 203–208.
  10. Hurley S. Planning effective cellular mobile radio networks. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 2002, vol. 51, no. 2, pp. 48–56.
  11. Calegarie P., Guidec F., Kuonen P., Chamaret B., Udeba S., Josselin S., Wagner D. Radio network planning with combinatorial algorithms. *ACTS Mobile Communications*, 1996, pp. 707–713.
  12. Tatarnikova T. M. Structural synthesis of an interface center for corporate networks. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy [Information and Control Systems]*, 2015, no. 3, pp. 92–98 (In Russian). doi:10.15217/issn1684-8853.2015.3.92
  13. Proakis J. G. *Digital Communications*. McGraw-Hill, 1995. 928 p.
  14. Aurenhammer F. Voronoi diagrams — a survey of a fundamental geometric data structure. *ACM Computing Surveys*, 1991, vol. 23, no. 3, pp. 345–405.
  15. Lloyd S. Least Squares Quantization in PCM. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1982, vol. 28, no. 2, pp. 129–137.
  16. Tutsaku K., Tran-Gia P. Spacial traffic estimation and characterization for mobile communication network design. *IEEE Journal of Selected Areas in Communications*, 1998, vol. 16, no. 5, pp. 804–811.

УДК 621.371

doi:10.31799/1684-8853-2019-1-98-101

#### О стратегии синтеза мобильной сети связи

В. З. Ляндрес<sup>a</sup>, PhD, профессор, orcid.org/0000-0002-1430-887X, lyandres@ee.bgu.ac.il

<sup>a</sup>Негевский университет им. Бен-Гуриона, П.О.Б. 653, Бен-Гуриона ул., 1, Беэр-Шева, 74105, Израиль

**Постановка проблемы:** эффективный синтез мобильной сети связи включает в себя совместную оптимизацию расположения базовых станций и процесса назначения им частот. В реальных ситуациях классический подход оказывается неадекватным из-за неоднородного пространственного распределения пользователей и изотропного распространения радиоволн в зоне обслуживания. **Цель:** создание достаточно общего метода синтеза близкой к оптимальной структуре, учитывающей дефицит априорной информации о трафике. **Результаты:** предложенная стратегия синтеза базируется на идее адаптивной векторной квантизации области сервиса создаваемой сети, в результате чего область редуцируется к двумерной дискретной карте, разбитой на зоны с приблизительно равным количеством запросов на обслуживание. В каждой такой зоне алгоритм отыскивает координаты расположения базовой станции, которое гарантирует минимальное (в среднем) расстояние от всех пользователей. Метод обеспечивает максимальное покрытие области обслуживания, а поскольку трафик в разных зонах оказывается одинаковым, существенно упрощается процесс назначения частот.

**Ключевые слова** — проектирование мобильной сети, векторное квантование, оптимизация расположения базовых станций, оптимизация назначения частот.

**Для цитирования:** Lyandres V. Mobile network synthesis strategy. *Информационно-управляющие системы*, 2019, № 1, с. 98–101. doi:10.31799/1684-8853-2019-1-98-101

**For citation:** Lyandres V. Mobile network synthesis strategy. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy [Information and Control Systems]*, 2019, no. 1, pp. 98–101. doi:10.31799/1684-8853-2019-1-98-101

**БАЛОНИН**  
**Николай**  
**Алексеевич**



Профессор кафедры вычислительных систем и сетей Санкт-Петербургского государственного университета аэрокосмического приборостроения. В 1982 году окончил Ленинградский электротехнический институт им. В. И. Ульянова (Ленина) по специальности «Автоматика и телемеханика». В 2008 году защитил диссертацию на соискание ученой степени доктора технических наук. Является автором более 100 научных публикаций, в том числе трех монографий. Область научных интересов — теория динамических систем, теория идентификации, теория операторов, теория матриц, вычислительные методы, интернет-робототехника, интернет-книги с исполняемыми алгоритмами, научные социальные сети. Эл. адрес: korbendfs@mail.ru

**ВАСИЛЬЕВ**  
**Николай**  
**Николаевич**



Старший научный сотрудник лаборатории теории представлений и динамических систем Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова РАН. В 1975 году окончил математико-механический факультет Ленинградского государственного университета по специальности «Алгебра и теория чисел». В 1990 году защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Является автором более 120 научных публикаций. Область научных интересов — компьютерная алгебра, вычислительная алгебраическая геометрия и коммутативная алгебра, теория динамических систем, небесная механика. Эл. адрес: vasiliev@pdmi.ras.ru

**ГОРОДЕЦКИЙ**  
**Андрей**  
**Емельянович**



Профессор, заведующий лабораторией интеллектуальных электромеханических систем Института проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, заслуженный деятель науки и техники. В 1965 году окончил Ленинградский политехнический институт им. М. И. Калинина по специальности «Автоматика и телемеханика». В 1993 году защитил диссертацию на соискание ученой степени доктора технических наук. Является автором более 250 научных публикаций и 70 патентов на изобретения. Область научных интересов — математическое моделирование, оптимальное управление, идентификация и диагностика. Эл. адрес: gorodetsky@mail23.ipme.ru

**БЛАУНШТЕЙН**  
**Натан**  
**Шаевич**



Профессор-эмиритус кафедры систем связи инженерного факультета Негевского университета им. Бен-Гуриона, Беэр-Шева, Израиль. В 1972 году окончил Томский государственный университет по специальности «Радиофизика и электроника, включая квантовую». В 1991 году защитил диссертацию на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. Является автором около 200 научных публикаций, в том числе 12 монографий, пяти патентов и трех изобретений. Область научных интересов — радиофизика, системы проводной и беспроводной связи, радары, оптика и лидары. Эл. адрес: nathan.blaunstein@hotmail.com

**ВАТТИМЕНА**  
**Гисбертх**  
**Мауритс**



Преподаватель Амбонского государственного политехнического университета, Индонезия. В 2000 году окончил бакалавриат университета Гунадарма, Индонезия, по специальности «Управление информационных систем», в 2013 — магистратуру Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета «ЛЭТИ» по специальности «Информатика и вычислительная техника». Является автором шести научных публикаций, трех патентов на полезную модель и программное обеспечение. Область научных интересов — локация, автоматические системы мониторинга, моделирование процессов и систем, цифровая обработка сигналов. Эл. адрес: mauritswattimena@yahoo.com

**ГРУБОВ**  
**Вадим**  
**Валерьевич**



Старший научный сотрудник лаборатории нейронауки и когнитивных технологий Университета Иннополис. В 2012 году окончил Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского по специальности «Радиофизика». В 2015 году защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Является автором более 20 научных публикаций. Область научных интересов — анализ и обработка комплексных сигналов, вейвлетный анализ и его приложения в нелинейной динамике и нейронауке. Эл. адрес: vvgrubov@gmail.com

**ДУЖИН  
Василий  
Сергеевич**



Соискатель при лаборатории алгоритмической математики и логики Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета «ЛЭТИ». В 2010 году окончил Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения по специальности «Вычислительные машины, комплексы, системы и сети». Является автором 17 научных публикаций. Область научных интересов — компьютерная алгебра, компьютерное моделирование, дискретная математика. Эл. адрес: vsduzhin@etu.ru

**КУЗЬМИН  
Артем  
Дмитриевич**



Студент факультета компьютерных технологий и информатики Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета «ЛЭТИ». Область научных интересов — компьютерная алгебра, компьютерное моделирование, дискретная математика. Эл. адрес: aradin99@gmail.com

**КУРБАНОВ  
Вугар  
Гариб оглы**



Старший научный сотрудник лаборатории интеллектуальных электромеханических систем Института проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, доцент кафедры управления в технических системах Санкт-Петербургского государственного университета аэрокосмического приборостроения. В 1976 году окончил Азербайджанский государственный университет им. С. М. Кирова по специальности «Прикладная математика». В 1983 году защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физ.-мат. наук. Является автором более 90 научных публикаций. Область научных интересов — математическое моделирование процессов управления и др. Эл. адрес: vugar\_borchali@yahoo.com

**ЛЕБЕДА  
Евгений  
Вячеславович**



Адъюнкт кафедры общепрофессиональных дисциплин Военной академии связи им. С. М. Буденного, Санкт-Петербург. В 2011 году окончил Военную академию связи им. С. М. Буденного по специальности «Радио, радиосвязь и телевидение». Является автором восьми научных публикаций. Область научных интересов — сигнально-кодированные конструкции, помехоустойчивость, многопользовательский прием, перенасыщенные системы кодового доступа. Эл. адрес: zhe48@yandex.ru

**ЛЯНДРЕС  
Владимир  
Залманович**



Профессор кафедры электронных и компьютерных систем Негевского университета им. Бен-Гуриона, Беэр-Шева, Израиль. В 1966 году окончил Ленинградский электротехнический институт связи им. проф. М. А. Бонч-Бруевича по специальности «Радиотехника». В 1972 году защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата технических наук. Является автором более 60 научных публикаций, в том числе двух монографий и 17 патентов на изобретения. Область научных интересов — модели помех в каналах связи, марковские модели случайных процессов, алгоритмы дискретной оптимизации, алгоритмы частотного планирования. Эл. адрес: lyandres@ee.bgu.ac.il

**МОНАКОВ  
Андрей  
Алексеевич**



Профессор кафедры радиотехнических систем Санкт-Петербургского государственного университета аэрокосмического приборостроения. В 1978 году окончил Ленинградский институт авиационного приборостроения по специальности «Радиотехника». В 2000 году защитил диссертацию на соискание ученой степени доктора технических наук. Является автором 150 научных публикаций и 17 авторских свидетельств и патентов на изобретения. Область научных интересов — радиолокация протяженных целей, радиотехнические методы наблюдения атмосферы и поверхности земли, радиолокаторы с синтезированной апертурой антенны, цифровая обработка сигналов, управление воздушным движением. Эл. адрес: a\_monakov@mail.ru

**МОРОЗОВ  
Руслан  
Александрович**



Инженер-исследователь Высшей школы программной инженерии Института компьютерных наук и технологий Санкт-Петербургского политехнического университета.

В 2014 году окончил Санкт-Петербургский политехнический университет по специальности «Информатика и вычислительная техника».

Является автором двух научных публикаций.

Область научных интересов — помехоустойчивое кодирование, быстрые алгоритмы, дискретная математика.

Эл. адрес: rmorozov@dcn.icc.spbstu.ru

**НЕНАШЕВ  
Вадим  
Александрович**



Доцент кафедры вычислительных систем и сетей Санкт-Петербургского государственного университета аэрокосмического приборостроения.

В 2012 году окончил Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения по специальности «Информатика и вычислительная техника».

В 2017 году защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата технических наук. Является автором 22 научных публикаций.

Область научных интересов — компьютерное моделирование, системы навигации и радиолокации, статистический анализ, электродинамика.

Эл. адрес: granat89@mail.ru

**РОЖДЕСТВЕНСКАЯ  
Ксения  
Николаевна**



Ассистент кафедры аэрокосмических компьютерных и программных систем Санкт-Петербургского государственного университета аэрокосмического приборостроения.

В 2012 году окончила магистратуру Санкт-Петербургского государственного университета аэрокосмического приборостроения по специальности «Встроенные системы обработки информации и управления».

Является автором 24 научных публикаций и пяти свидетельств о государственной регистрации программ на ЭВМ.

Область научных интересов — вычислительные сети и системы, администрирование, SpaceWire, SpaceWire-Plug-and-Play.

Эл. адрес: rogdkn@yandex.ru

**САВИЦЕНКО  
Николай  
Васильевич**



Профессор, заместитель начальника кафедры радиосвязи Военной академии связи им. С. М. Буденного, Санкт-Петербург.

В 1986 году окончил Новосибирский государственный университет по специальности «Математика, прикладная математика», в 1989 году — Военную академию связи по специальности «Математическое обеспечение исследований вооружений и военной техники».

В 2006 году защитил диссертацию на соискание ученой степени доктора технических наук. Является автором 138 научных публикаций, в том числе четырех монографий.

Область научных интересов — математическое моделирование каналов связи, помехоустойчивость приема сигналов и др. Эл. адрес: snikaspb@mail.ru

**СЕРГЕЕВ  
Александр  
Михайлович**



Старший преподаватель кафедры вычислительных систем и сетей Санкт-Петербургского государственного университета аэрокосмического приборостроения. В 2004 году окончил Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения по специальности «Вычислительные машины, комплексы, системы и сети».

Является автором 35 научных публикаций.

Область научных интересов — численные методы, теория вычислительных процессов, проектирование специализированных процессоров.

Эл. адрес: asklab@mail.ru

**СЕРГЕЕВ  
Михаил  
Борисович**



Профессор, директор Института вычислительных систем и программирования, заведующий кафедрой вычислительных систем и сетей Санкт-Петербургского государственного университета аэрокосмического приборостроения, почетный работник высшего профессионального образования РФ.

В 1980 году окончил ЛЭТИ по специальности «Электронные вычислительные машины».

В 2001 году защитил диссертацию на соискание ученой степени доктора технических наук.

Является автором более 100 научных публикаций и 14 патентов на изобретения.

Область научных интересов — теория разрядных вычислений, методы проектирования спецпроцессоров для систем контроля и управления и др. Эл. адрес: mbse@mail.ru

**СИТНИКОВА**  
Евгения  
Юрьевна



Ведущий научный сотрудник лаборатории нейроонтогенеза Института высшей нервной деятельности и нейрофизиологии РАН, Москва, эксперт РАН. В 1996 году окончила Московскую академию ветеринарной медицины и биотехнологии им. К. И. Скрябина по специальности «Ветеринарный врач-биофизик». В 2008 году защитила диссертацию на соискание ученой степени доктора наук (PhD) в Университете г. Наймеген (Radboud University Nijmegen), Нидерланды, в 2014 году — на соискание ученой степени доктора биологических наук. Является автором более 50 научных публикаций. Область научных интересов — междисциплинарные исследования функций мозга и др. Эл. адрес: jenia-s@mail.ru

**СОРОКИН**  
Александр  
Васильевич



Ассистент кафедры проблемно-ориентированных вычислительных комплексов Санкт-Петербургского государственного университета аэрокосмического приборостроения. В 2013 году окончил Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения по специальности «Авиационные приборы и вычислительно-измерительные комплексы». Является автором 20 научных публикаций и шести патентов на изобретения. Область научных интересов — радиочастотная идентификация, автоматические системы мониторинга, моделирование процессов и систем. Эл. адрес: aleksandr.sorokin.v@gmail.com

**ТРИФОНОВ**  
Петр  
Владимирович



Доцент высшей школы программной инженерии института компьютерных наук и технологий Санкт-Петербургского политехнического университета. В 2003 году окончил Санкт-Петербургский политехнический университет по специальности «Информатика и вычислительная техника». В 2018 году защитил диссертацию на соискание ученой степени доктора технических наук. Является автором 79 научных публикаций и семи патентов на изобретения. Область научных интересов — помехоустойчивое кодирование, быстрые алгоритмы, телекоммуникации, системы хранения данных. Эл. адрес: petert@den.icc.spbstu.ru

**СМИРНОВ**  
Кирилл  
Сергеевич



Младший научный сотрудник лаборатории нейроонтогенеза Института высшей нервной деятельности и нейрофизиологии РАН, Москва. В 2009 году окончил психологический факультет Московского государственного университета им. Ломоносова по специальности «Нейро- и патопсихология». Является автором четырех научных публикаций. Область научных интересов — эпитетические аспекты развития заболеваний нервной системы, клеточные механизмы эпиплегии, трансляционные исследования. Эл. адрес: kirillsmirnov@ihna.ru

**ТАРАСОВА**  
Ирина  
Леонидовна



Старший научный сотрудник лаборатории интеллектуальных электромеханических систем Института проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, доцент Санкт-Петербургского политехнического университета. В 1978 году окончила Ленинградский политехнический институт им. М. И. Калинина по специальности «Автоматические системы управления». В 1998 году защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата технических наук. Является автором более 60 научных публикаций. Область научных интересов — математическое моделирование, оптимальное управление, идентификация и диагностика. Эл. адрес: til@msa2.ipme.ru

**ХРАМОВ**  
Александр  
Евгеньевич



Профессор, руководитель лаборатории нейронауки и когнитивных технологий Университета Иннополис, член экспертного совета ВАК РФ по физике, член экспертного совета Российского научного фонда по научным проектам. В 1996 году окончил Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского. В 2005 году защитил диссертацию на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. Является автором более 200 научных публикаций. Область научных интересов — нейронаука, теория сложных сетей, вейвлет-анализ и его приложения в нелинейной динамике и нейронауке, нейроинтерфейсы. Эл. адрес: a.khramov@innopolis.ru

**ШЕПЕТА  
Александр  
Павлович**



Профессор кафедры проблемно-ориентированных вычислительных комплексов Санкт-Петербургского государственного университета аэрокосмического приборостроения, академик Международной академии наук высшей школы, Заслуженный деятель науки РФ.

В 1972 году окончил Ленинградский институт авиационного приборостроения по специальности «Радиоэлектронные устройства». В 1995 году защитил диссертацию на соискание ученой степени доктора технических наук.

Является автором более 170 научных публикаций.

Область научных интересов — обработка информации в условиях априорной неопределенности, математическое моделирование стохастических процессов и полей.

Эл. адрес: alex@shepeta.com

---

### **ПАМЯТКА ДЛЯ АВТОРОВ**

*Поступающие в редакцию статьи проходят обязательное рецензирование.*

При наличии положительной рецензии статья рассматривается редакционной коллегией. Принятая в печать статья направляется автору для согласования редакторских правок. После согласования автор представляет в редакцию окончательный вариант текста статьи.

Процедуры согласования текста статьи могут осуществляться как непосредственно в редакции, так и по e-mail (ius.spb@gmail.com).

При отклонении статьи редакция представляет автору мотивированное заключение и рецензию, при необходимости доработать статью — рецензию. Рукописи не возвращаются.

*Редакция журнала напоминает, что ответственность за достоверность и точность рекламных материалов несут рекламодатели.*

---