УДК 517.987
doi:10.15217/issn1684-8853.2015.3.17

ПОСТРОЕНИЕ НЕПРИВОДИМЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ СИММЕТРИЧЕСКОЙ ГРУППЫ *S*(*n*) С БОЛЬШИМИ И МАКСИМАЛЬНЫМИ РАЗМЕРНОСТЯМИ

Н. Н. Васильев[a], *канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник*
В. С. Дужин[a], *соискатель*
[a]*Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Санкт-Петербург, РФ*

Введение: *диаграммы Юнга и таблицы Юнга являются важными комбинаторными объектами. Асимптотическая комбинаторика изучает асимптотическое поведение параметров комбинаторных объектов. Диаграммы Юнга параметризуют неприводимые представления симметрической группы. Поэтому комбинаторика диаграмм Юнга тесно связана с асимптотической теорией представлений, которая изучает асимптотические свойства параметров неприводимых представлений классических групп. В 1981 г. А. М. Вершиком была поставлена задача о существовании предела нормализованных размерностей последовательности диаграмм Юнга с максимальными размерностями, которая до сих пор не решена.* ***Цель исследования:*** *построение последовательности диаграмм с большими и максимальными размерностями, соответствующих неприводимым представлениям симметрической группы.* ***Методы:*** *модификация жадного алгоритма построения последовательности диаграмм с большими размерностями, основанная на процедуре улучшения диаграммы на каждом уровне градуированного графа Юнга.* ***Результаты:*** *предлагаемый алгоритм позволяет получить все известные на данный момент диаграммы с максимальными размерностями, а также улучшить оценки на максимальные размерности в случаях, когда их точные значения неизвестны.*

Ключевые слова *— симметрическая группа, неприводимое представление, диаграмма Юнга, таблица Юнга, процесс Планшереля.*

Введение

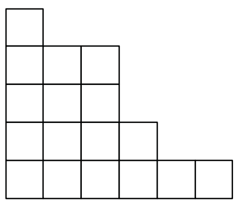
Задача поиска диаграмм Юнга, максимизирующих количество таблиц Юнга, имеет теснейшую связь с асимптотической теорией представлений. Диаграммы Юнга из n клеток параметризуют неприводимые представления симметрической группы $S(n)$. При этом размерностью неприводимого представления служит количество таблиц Юнга соответствующей диаграммы. Задача об асимптотике максимальных размерностей неприводимых представлений поставлена более тридцати лет назад [1] и не решена до сих пор.

Двумерная *диаграмма Юнга* представляет собой конечный набор клеток, расположенных в виде строк, длина которых не возрастает [2]. Диаграммы Юнга являются одним из фундаментальных комбинаторных объектов. Они дают графическое представление разбиений натуральных чисел, рассмотренных Леонардом Эйлером еще в XVIII в. Каждая диаграмма соответствует определенному разбиению натурального числа на положительные слагаемые. При этом каждый элемент разбиения равен количеству клеток в соответствующем столбце диаграммы (рис. 1).

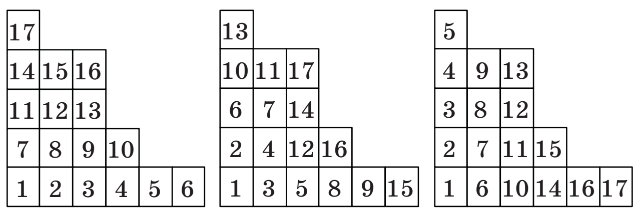
Размер диаграммы n равен количеству клеток, из которых она состоит.

Таблица Юнга — это диаграмма Юнга, клетки которой заполнены целыми числами от 1 до n. Данные числа упорядочены по возрастанию снизу вверх и слева направо (рис. 2).

Размерностью диаграммы называется количество таблиц Юнга данной диаграммы. Это же число называется *весом* соответствующего неприводимого представления. Под *максимальной диаграммой* будем понимать диаграмму, имеющую наибольшую размерность среди всех диаграмм соответствующего размера. Поскольку размерность диаграмм Юнга с ростом их размера увеличивается экспоненциально, для исследования



■ *Рис. 1.* Пример диаграммы Юнга, соответствующей разбиению $17 = 5 + 4 + 4 + 2 + 1 + 1$



■ *Рис. 2.* Три примера таблиц Юнга для диаграммы на рис. 1

размерностей диаграмм Юнга удобно использовать нормализованную размерность. Нормализованная размерность c диаграммы λ определена формулой [1]

$$c(\lambda) = \frac{-2}{\sqrt{n}} \ln \frac{\dim \lambda}{\sqrt{n!}},$$

где n — размер диаграммы; $\dim \lambda$ — размерность диаграммы.

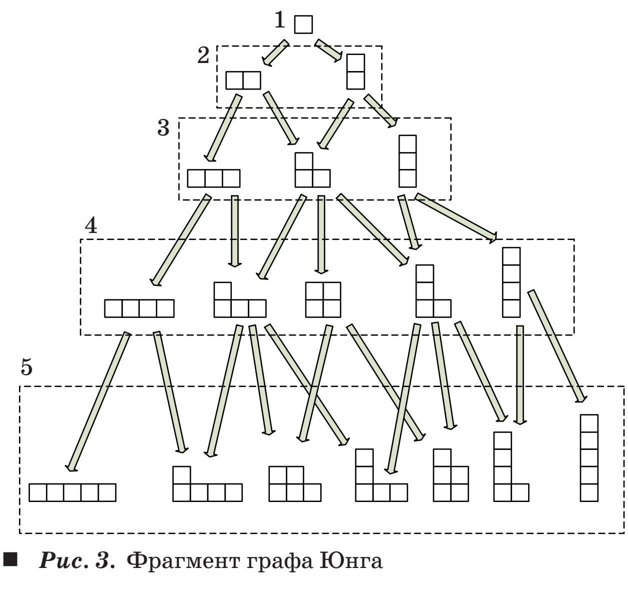
Заметим, что чем больше размерность диаграммы, тем меньше ее нормализованная размерность.

В данной статье представлены результаты компьютерных экспериментов, позволяющие построить последовательности диаграмм с большим количеством таблиц Юнга. Это дает некоторые оценки нормализованных размерностей неприводимых представлений симметрической группы.

Постановка задачи

Рассмотрим ориентированный градуированный граф, называемый графом Юнга, вершинами которого являются диаграммы Юнга, а ребра связывают вложенные друг в друга диаграммы, отличающиеся одной клеткой. Уровнем графа Юнга называется множество вершин, соответствующее диаграммам Юнга одного размера. На рис. 3 показаны первые пять уровней графа Юнга.

Можно построить марковскую цепь на графе Юнга, определив для каждого ребра соответствующую переходную вероятность. На графе Юнга существует замечательный марковский процесс [3], который называется *процессом Планшереля*. Этот процесс обладает свойством центральности: вероятности любых двух различных путей,



■ ***Рис. 3.*** Фрагмент графа Юнга

соединяющих одинаковые диаграммы, равны между собой. Переходные вероятности для этого процесса рассчитаны по формуле

$$p(\lambda, x, y) = \prod_{i=0}^{x-1} \frac{h(\lambda, i, y)}{h(\lambda, i, y)+1} \prod_{j=0}^{y-1} \frac{h(\lambda, x, j)}{h(\lambda, x, j)+1},$$

где λ — диаграмма Юнга; x, y — координаты добавляемой клетки; h — длина крюка клетки. *Крюком* клетки называется сама клетка, а также клетки, расположенные в том же столбце выше и в той же строке правее. *Длина крюка* — количество клеток, из которых состоит крюк.

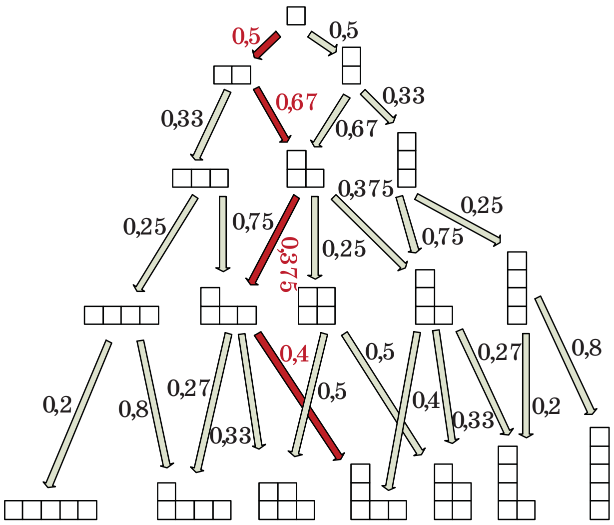
Процесс Планшереля определяет вероятностную меру на диаграммах Юнга. Мера, соответствующая центральным марковским процессам, также называется центральной. Задача об описании всех центральных мер на графе Юнга решена в статье [4].

Целью данной работы является построение последовательности диаграмм Юнга с максимальными размерностями. Для этого построения был использован тот факт, что вероятность пути из диаграммы размера 1 в диаграмму размера n прямо пропорциональна размерности диаграммы, т. е. количеству таблиц Юнга в ней. Таким образом, задача сводится к построению путей в графе Юнга с максимальными планшерелевскими вероятностями.

Возможный способ построения последовательности диаграмм с большими размерностями — *жадный алгоритм*[1]. Данная последовательность начинается из корня графа Юнга (диаграммы размера 1). Движение осуществляется по ветвям, вероятность которых максимальна на каждом шаге (рис. 4). Для краткости будем называть ее *жадной последовательностью*. Первые 14 диаграмм жадной последовательности обладают максимально возможной размерностью, однако размерность 15-й диаграммы уже не максимальна.

Последовательность, содержащая первую 131 точную максимальную размерность, была построена [5] путем полного перебора путей в графе Юнга. В начальном отрезке жадной последовательности длиной 131 не максимальными являются 43 диаграммы. Был предложен способ улучшения жадного алгоритма, позволяющий построить все известные диаграммы с максимальными размерностями гораздо быстрее, чем в алгоритме, использующем полный перебор. Идея такого улучшения состоит в попытке на каждом шаге увеличить размерность диаграм-

[1] Жадный алгоритм был рассмотрен в неопубликованной на данный момент статье Н. Н. Васильева и А. Б. Терентьева “Irreducible representations of symmetric groups with large dimensions and modelling of Plancherel process”.



■ *Рис. 4.* Начало жадной последовательности диаграмм

мы, не увеличивая ее размера, путем изменения некоторого фиксированного количества клеток, и только после этого осуществить переход на следующий уровень, добавив клетку с максимальной размерностью. Такая стратегия позволяет очень быстро построить все известные максимальные диаграммы и так же достаточно быстро строит улучшенную последовательность, содержащую диаграммы с большими размерностями.

До сих пор не доказано, что нормализованные размерности максимальных диаграмм сходятся к пределу (гипотеза Вершика [1]). Доказательству несколько более слабой гипотезы о сходимости по вероятности нормализованных размерностей диаграмм, типичных по мере Планшереля, посвящена работа [6]. Наши компьютерные эксперименты показывают, что гипотеза о сходимости максимальных нормализованных размерностей с ростом размера диаграмм очень правдоподобна. Кроме того, можно высказать гипотезу, что асимптотика последовательности нормализованных размерностей в жадной последовательности совпадает с асимптотикой нормализованных размерностей максимальных диаграмм.

Описание алгоритма

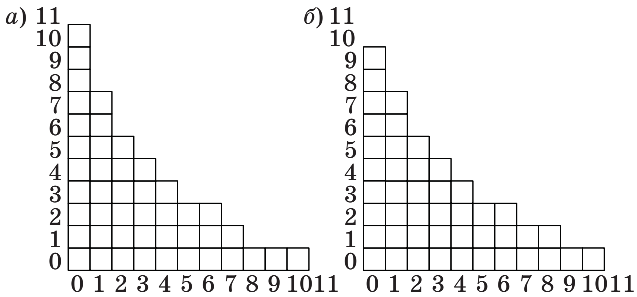
Идея стратегии данного алгоритма — улучшение последовательности диаграмм, полученных с помощью жадного алгоритма. При этом для поиска диаграммы такого же размера, что исходная, но большей размерности, могут быть использованы разные стратегии. Один из подходов состоит в том, чтобы сначала увеличить размер диаграммы, а затем уменьшить его до исходного, получив диаграмму с лучшей размерностью. Для этого выполняется следующая последовательность действий.

1. Осуществляется жадный рост диаграммы до размера $n+N$.
2. Из полученной диаграммы последовательно удаляется N клеток, вносящих наименьший вклад в вероятность генерации данной диаграммы. Каждый раз выбирается клетка, вероятность добавления которой к предыдущей диаграмме для получения текущей диаграммы минимальна.

Данные шаги повторяются для разных значений N. При этом в результате могут быть получены различные диаграммы. Из данных диаграмм выбирается имеющая максимальную размерность. Затем осуществляется ограниченный перебор диаграмм, отличающихся от полученной на 2 и 3 клетки. В тех случаях, когда исходная диаграмма не была максимальной, как правило, это позволяет найти диаграмму с большей размерностью.

Две диаграммы из 45 клеток получены с помощью жадного алгоритма (рис. 5, *а*) и предлагаемого алгоритма, использующего стратегию улучшения (рис. 5, *б*). В таблице приведены значения обычных и нормализованных размерностей данных диаграмм, а также разницы между этими значениями.

Заметим, что диаграмма на рис. 5, *б* является максимальной.



■ *Рис. 5.* Диаграммы Юнга размера $n = 45$, полученные с помощью жадного алгоритма (*а*) и предлагаемого алгоритма с улучшенной стратегией (*б*)

■ Значения обычной и нормализованной размерностей для двух диаграмм размера $n = 45$

Наименование	Размерность	Нормализованная размерность
Предлагаемый алгоритм	5002839287614223484343200000	0,459847
Жадный алгоритм	4929554581050643809845580000	0,462047
Разница	73284706563579674497620000	−0,0022

Свойства жадных последовательностей, начинающихся не с единичной диаграммы

При проведении большого количества численных экспериментов по построению жадных последовательностей, начинающихся с разных диаграмм Юнга, замечено, что любые две жадные последовательности в определенный момент сливаются в одну.

Был проведен следующий эксперимент. От различных пар диаграмм Юнга, сгенерированных случайно с помощью процесса Планшереля, строились жадные последовательности. Компьютерные эксперименты показывают, что любые две такие последовательности отличаются только начальными отрезками.

Введем отношение эквивалентности на бесконечных путях в графе Юнга, считая два пути эквивалентными, если они полностью совпадают, начиная с некоторой диаграммы. Соответствующие классы эквивалентности называются концами графа Юнга и образуют так называемую границу графа Юнга. Слияние любых двух жадных последовательностей означало бы, что все жадные последовательности, начинающиеся с любой диаграммы, определяет одну и ту же точку на границе графа Юнга, т. е. один и тот же класс эквивалентности.

Это свойство было проверено на 5000 случайно сгенерированных с помощью процесса Планшереля пар диаграмм Юнга (с начальным размером 5000 клеток). Также было проведено 20 экспериментов на диаграммах с начальным размером 1 000 000 клеток.

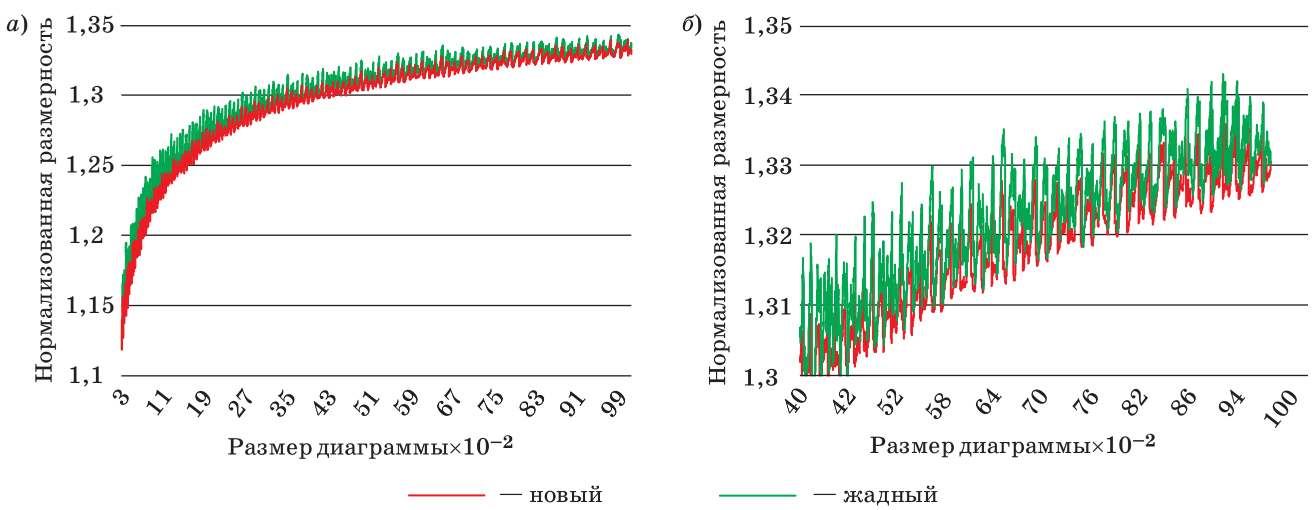
Отдельно были рассмотрены исключительные случаи, когда диаграммы представляли собой строку и столбец (отличались на максимально возможное количество клеток). Даже в этих случаях все построенные в компьютерных экспериментах последовательности также сливались. Это дает основание полагать, что асимптотика максимальных размерностей в точности равна асимптотике размерностей любой жадной последовательности.

Результаты

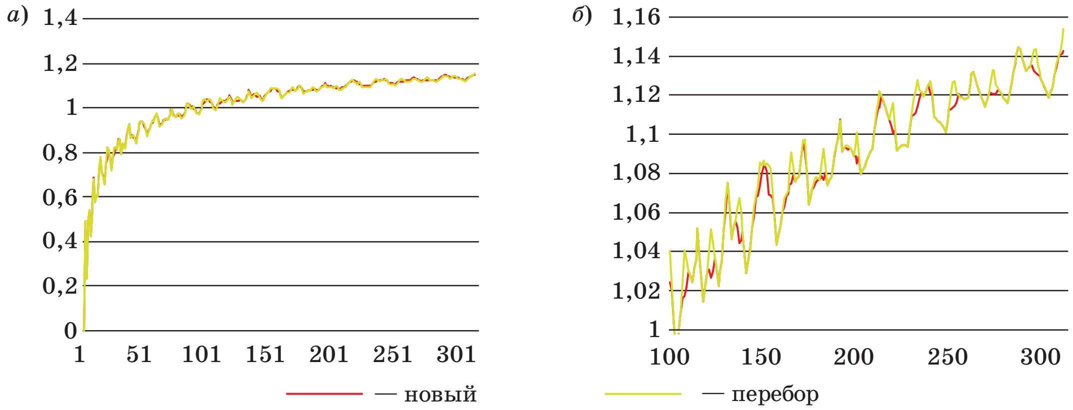
Сравнение результатов работы нового алгоритма и жадного алгоритма представлено на рис. 6, *а* и *б*. Показана зависимость нормализованной размерности от размера диаграммы. Как видно из рисунка, нормализованная размерность — сильно осциллирующая функция. Форма кривых в целом совпадает, что позволяет предположить, что в асимптотике они также имеют похожее поведение. Следует отметить, что кривая, соответствующая новому алгоритму, ни в одной точке не превышает кривую жадного алгоритма. Это говорит о том, что нормализованная размерность диаграмм, полученных с помощью нового алгоритма, меньше или равна нормализованной размерности диаграмм жадной последовательности, а реальная размерность, соответственно, больше или равна. Для первых 10 000 диаграмм новый алгоритм получает диаграммы с большей размерностью в 92 % случаев. В остальных случаях алгоритмы получают одинаковые диаграммы, в большинстве случаев эти диаграммы имеют максимальные размерности.

Аналогичное сравнение нового алгоритма и алгоритма перебора [5] в исходном и укрупненном масштабах приведено на рис. 7, *а* и *б* соответственно.

Для первых 311 диаграмм новый алгоритм получает диаграммы с большей размерностью в 33 % случаев (в остальных случаях алгоритмы получают одинаковые диаграммы).



■ ***Рис. 6.*** Нормализованные размерности жадной последовательности и последовательности нового алгоритма для диаграмм размеров 300–10 000 (*а*) и 4000–10 000 (*б*) (укрупненный масштаб)



■ ***Рис. 7.*** Нормализованные размерности последовательности, полученной перебором, и последовательности нового алгоритма для диаграмм размеров 1–311 (*а*) и 100–311 (*б*) (укрупненный масштаб)

Заключение

С помощью предлагаемого алгоритма была построена последовательность диаграмм с большими размерностями вплоть до диаграммы размером 10 000 клеток. Все известные диаграммы с максимальными размерностями присутствуют в данной последовательности. Представленный алгоритм улучшает 92 % из первых десяти тысяч диаграмм, полученных жадным алгоритмом, и 33 % из первых 311 диаграмм, полученных с помощью перебора, что позволяет высказать гипотезу о том, что бесконечная последовательность, построенная с помощью этого алгоритма, содержит бесконечное же количество максимальных диаграмм. Таким образом, компьютерные эксперименты, описанные в настоящей статье, дают дополнительные основания предполагать справедливость гипотез, высказанных А. М. Вершиком [1].

Литература

1. **Вершик А. М., Керов С. В.** Асимптотика максимальной и типичной размерностей неприводимых представлений симметрической группы // Функциональный анализ и его приложения. 1985. Т. 19. № 1. С. 25–36.
2. **William Fulton.** Young Diagrams, with Applications to Representation Theory and Geometry. — Cambridge University Press, 1996. — 272 p.
3. **Вершик А. М., Керов С. В.** Асимптотика меры Планшереля симметрической группы и предельная форма таблиц Юнга // Докл. Академии наук СССР. 1977. Т. 233. № 6. С. 1024–1027.
4. **Вершик А. М., Керов С. В.** Асимптотическая теория характеров симметрической группы // Функциональный анализ и его приложения. 1981. Т. 15. № 4. С. 15–27.
5. **Вершик А. М., Павлов Д. А.** Численные эксперименты в задачах асимптотической теории представлений // Записки научных семинаров ПОМИ. 2009. Т. 373. С. 77–93.
6. **Буфетов А. И.** Решение гипотезы Вершика — Керова об энтропии меры Планшереля // Успехи математических наук. 2010. Т. 65. № 1(391). С. 181–182.

UDC 517.987
doi:10.15217/issn1684-8853.2015.3.17

Building Irreducible Representations of a Symmetric Group $S(n)$ with Large and Maximum Dimensions

Vasilyev N. N.[a], PhD, Phys.-Math., Senior Research Fellow, vasiliev@pdmi.ras.ru
Duzhin V. S.[a], Researcher, vduzhin@gmail.com
[a]Saint-Petersburg Department of V. A. Steklov Institute of Mathematics of RAS, Saint-Petersburg, 27, Fontanka, 191023, Russian Federation

Introduction: In combinatorics, Young diagrams and Young tableaux are important mathematical objects. Asymptotic combinatorics studies the asymptotic behaviour of parameters of combinatorial objects. Young diagrams parameterize irreducible representations of a symmetric group. Therefore, the combinatorics of Young diagrams is closely related to asymptotic rep re sentation theory which studies the asymptotic properties of parameters of irreducible representations for classical groups. In 1981, A. M. Vershik posed a problem about the convergence of normalized maximal dimensions of Young diagrams. This problem still remains open. **Purpose:** Building a sequence of diagrams of large and maximum dimensions which would correspond to irreducible representations of a symmetric group. **Methods:** We propose a modification of the greedy algorithm which builds a sequence of diagrams with large dimensions. The idea is to enhance the diagram on each level of the graded Young graph. **Results:** With the proposed algorithm, you can obtain all the maximum dimension diagrams known for today, and also improve some of the existing estimations for the maximum dimensions of Young diagrams for the cases when their exact values are unknown.

Keywords — Symmetric Group, Irreducible Representation, Young Diagram, Young Tableau, Plancherel Process.

References

1. Vershik A. M., Kerov S. V. Asymptotics of Maximal and Typical Dimensions of Irreducible Representations of a Symmetric Group. *Funktsional'nyi analiz i ego prilozheniia*, 1985, vol. 19, no. 1, pp. 25–36 (In Russian).
2. William Fulton. *Young Diagrams, with Applications to Representation Theory and Geometry*. Cambridge University Press, 1996. 272 p.
3. Vershik A. M., Kerov S. V. Asymptotics of the Plancherel Measure of the Symmetric Group and the Limiting form of Young Tableaux. *Doklady Akademii nauk SSSR*, 1977, vol. 233, no. 6, pp. 1024–1027 (In Russian).
4. Vershik A. M., Kerov S. V. Asymptotic Theory of Characters of the Symmetric Group. *Funktsional'nyi analiz i ego prilozheniia*, 1981, vol. 15, no. 4, pp. 15–27 (In Russian).
5. Vershik A. M., Pavlov D. Numerical Experiments in the Problems of Asymptotic Representation Theory. *Zapiski nauchnykh seminarov POMI*, 2009, vol. 373, pp. 77–93 (In Russian).
6. Bufetov A. I. On the Vershik—Kerov Conjecture Concerning the Entropy of the Plancherel Measure. *Uspekhi matematicheskikh nauk*, 2010, vol. 65, no. 1(391), pp. 181–182 (In Russian).