УДК 519.614
doi:10.15217/issn1684-8853.2015.3.2

СИММЕТРИЯ ДВУЦИКЛИЧЕСКИХ МАТРИЦ АДАМАРА И ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ПАРЫ ГОЛЕЯ

Н. А. Балонин[а], *доктор техн. наук, профессор*
Д. Ж. Джокович[б], *доктор мат. наук, профессор*
[а]*Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, Санкт-Петербург, РФ*
[б]*Университет Ватерлоо, Ватерлоо, Онтарио, Канада*

Цель: *изучить конструкцию двуциклических матриц Адамара, систематически исследовать роль симметрии и кососимметрии циклических блоков этой конструкции, классифицировать периодические пары Голея, вплоть до длины 40, тесно связанные с двуциклическими матрицами Адамара.* ***Методы:*** *вычислительные методы линейной алгебры, рекуррентные методы поиска оптимума, методы нахождения периодических пар Голея фиксированных размеров с использованием высокопроизводительных компьютеров.* ***Результаты:*** *рассмотрена проблема построения матриц Адамара двуциклического типа введением специальных мер симметрии (индекса симметрии, дефектов симметрии и кососимметрии), исследованы классы эквивалентности периодических пар Голея небольшой длины. Аналог гипотезы Райзера о несуществовании циклических матриц Адамара порядка большего, чем четыре, был предложен ранее первым автором. Его содержание состоит в утверждении того, что не существует симметричных двуциклических матриц Адамара порядка выше 32. Последняя гипотеза проверена в нескольких случаях с использованием компьютера. Каталог представителей классов эквивалентности двуциклических матриц Адамара представлен в форме списка периодических пар Голея длин вплоть до размера 26 (включительно). Приведены примеры почти симметричных двуциклических матриц Адамара относительно больших порядков.* ***Практическая значимость:*** *матрицы Адамара имеют непосредственное практическое значение для задач помехоустойчивого кодирования, сжатия и маскирования видеоинформации. Программное обеспечение нахождения двуциклических матриц Адамара и библиотека периодических пар Голея вместе с исполняемыми on line алгоритмами доступны в математической сети Интернет http://mathscinet.ru.*

Ключевые слова *— ортогональные матрицы, матрицы Адамара, гипотеза Райзера, циклические матрицы, двуциклические матрицы, периодические пары Голея.*

Введение

Настоящая работа посвящена исследованию свойств двуциклических матриц Адамара, в частности симметрии.

Напомним, что матрица Адамара — квадратная матрица $\mathbf{H}$ порядка n, состоящая из чисел $\{1, -1\}$, столбцы (или строки) которой ортогональны:

$$\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{H} = \mathbf{H}\mathbf{H}^{\mathrm{T}} = n\mathbf{I}, \qquad (1)$$

где $\mathbf{I}$ — единичная матрица. Определение ввел Адамар [1], отметив экстремальное качество получаемых из этого квадратичного уравнения решений (матрицы имеют максимально возможный детерминант на классе матриц с элементами по модулю, не большими 1), а также возможную область существования: порядки $n = 4k$, k — целое.

До появления численных методов детерминант занимал внимание математиков как элемент теории решения линейных алгебраических уравнений.

Для Сильвестра [2], открывшего первую последовательность таких матриц порядков $n = 2^t$, t — целое, существенно было именно то, что ортогональные матрицы инвертируются особенно просто. Адамар как геометр (он автор учебника геометрии) интересовался геометрической интерпретацией детерминанта объемом фигуры, построенной при помощи вектор-столбцов матрицы.

Специалисты по теории чисел, в частности Скарпи [3], довольно быстро нашли методы поиска матриц Адамара для последовательностей порядков, отличных от сильвестровых. Пэли [4], апеллируя к *комбинаторным алгоритмам*, позволяющим выйти на порядки, отличные от матриц Скарпи и Сильвестра, вывел заключение, что такие алгоритмы будут возникать и впредь, позволяя все полнее закрывать область $n = 4k$, т. е. сформулировал положение, называемое ныне *гипотезой Адамара*, о существовании всех матриц отмеченных порядков.

Матрицы максимального, в контексте задачи, решаемой Адамаром, детерминанта существуют для любого порядка n. Адамар показал, что экстремальное по детерминанту решение на порядках $4k$ обладает качеством, положенным им в одно из определений выделенных им матриц. Поэтому сомнения в отношении существования таких матриц приложимы, скорее, к формулировке, предложенной Пэли. Сомнительна возможность построения универсальных комбинаторных алгоритмов, которыми он занимался. Отметим, что не все алгоритмы поиска матриц Адамара комбинаторны, есть и те, которые ориентированы на поиск экстремальных по детерминанту решений [5, 6].

Для эффективности поиска матриц Адамара существенно то, в какой форме мы их ищем, среди

них важное место принадлежит циклическим структурам. Напомним, что матрица называется *циклической*, если ее строки — производные циклических сдвигов вправо или влево (обратные циклические матрицы) элементов их первой строки, с размещением вытесняемых элементов, соответственно, в начале или в конце последовательности сдвигаемых элементов.

Простейшая циклическая форма матрицы непродуктивна. Это показал Райзер, заметно позднее возникновения общей теории поиска матриц Адамара, при помощи циклических блоков. Постфактум, в 1963 г., в одном из учебников [7] он обратил внимание на то, что ортогональность столбцов и цикличность противоречивы.

Гипотеза Райзера гласит, что порядок 4 — последний при попытке описать матрицу Адамара циклической матрицей.

Матрица Адамара второго порядка не циклическая, поэтому получается, что помимо порядка 4 есть еще первый порядок, где, собственно, свойство цикличности не к чему приложить. У такой матрицы только один элемент.

Ни гипотеза Райзера, ни гипотеза Адамара, при всей простоте их формулировок, не доказаны.

Поскольку Пэли [4, 8] в рамках двухблочной конструкции получил решения не для всех возможных порядков, состав блоков был расширен до четырех [9] в методах Вильямсона, Гетхальса — Зейделя и других (см. обзор методов построения матриц Адамара в статье Себерри и Ямады [10]).

Двуциклические матрицы исследованы менее полно, в частности, мало исследовано то, какую роль в их разрешимости играет симметрия циклических блоков. Именно этому направлению и посвящена наша статья.

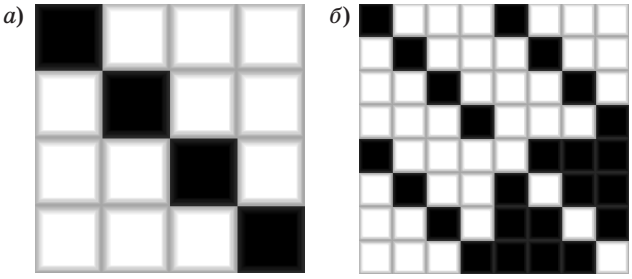
Двуциклические матрицы Адамара

Двуциклическая матрица Адамара — это матрица Адамара, построенная при помощи двух циклических блоков **A**, **B** одинакового размера вида

$$\mathbf{H}=\begin{pmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{B}\\ \mathbf{B}^{\mathrm{T}} & -\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix} \text{ или } \mathbf{H}=\begin{pmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{B}\\ -\mathbf{B}^{\mathrm{T}} & \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}, \qquad (2)$$

вторая форма используется для матриц с подчеркнутой асимметрией.

Для примера приведем две симметричные матрицы (рис. 1). Циклическую матрицу Адамара четвертого порядка мы будем называть матрицей Райзера, поскольку она эквивалентна всем прочим циклическим матрицам такого сорта и обладает заключительным порядком в соответствующей гипотезе (рис. 1, *а*). Вторая матрица тоже исключительная в своем качестве: это, как видно, двуциклическая матрица, построенная при помощи одной циклической матрицы Райзера **A** = **B** (рис. 1, *б*).



■ ***Рис. 1.*** Портреты матриц Райзера (*а*) и двуциклической матрицы Райзера (*б*)

Если верна гипотеза Райзера, двуциклических матриц выше восьмого порядка с таким свойством, как равенство порождающих ее блоков, не бывает.

Заметим, что матрица Райзера не только циклическая, но и симметричная. Симметрия — это дополнительное ужесточающее условие существования матрицы качества, и в нашу задачу входит проверить, на каком порядке оно входит в противоречие с условием ортогональности матрицы качества. Следующая гипотеза касается не столько двуциклических, сколько *симметричных двуциклических* матриц.

Расширенная гипотеза Райзера

Гипотеза 1 (расширенная гипотеза Райзера). Не существует *симметричных двуциклических матриц* порядков, больших 32.

Предположение, что ограничения, отмеченные Райзером [7], распространяются на двуциклические структуры [11], стало основой для проверки его компьютерным экспериментом.

Здесь и далее мы будем обозначать порядок матрицы Адамара $n = 2v$, где v — порядок двух ее циклических блоков, четверть размера матрицы встречается во многих формулировках (размер матрицы Вильямсона [9, 12], например), поэтому обозначим ее как $p = n/4 = v/2$.

Тогда отмеченная выше гипотеза 1 звучит так.

Не существует симметричных двуциклических матриц с $p > 8$.

Заметим, что с увеличением числа блоков характер достижимых симметричных конфигураций меняется.

Матрицы Вильямсона, например, симметричны по определению. Каталог матриц Вильямсона [12], составленный вплоть до порядков блоков 59, содержит первый проблемный порядок 35, указанный в работе [13]. Не выявлено пока ограничение сверху на максимальный порядок матриц Вильямсона, и мало исследована, кстати, возможность построения из них симметричных массивов.

В отношении сходных кососимметричных решений в составе массивов Гетхальса — Зейделя есть предположение, что они всегда существуют.

Определение пары Голея

Двуциклическая матрица Адамара, помимо общего ее определения, может быть определена через квадратичное уравнение для ее блоков: $\mathbf{AA}^{\mathrm{T}} + \mathbf{BB}^{\mathrm{T}} = n\mathbf{I}$. Так как блоки циклические, то это матричное уравнение можно упростить, заменив вторые сомножители первыми их столбцами, системообразующими для циклических матриц, обозначив их как векторы **a** и **b**. Отсюда следует

$$\mathbf{Aa} + \mathbf{Bb} = n\mathbf{e}, \qquad (3)$$

где **e** — вектор нулей, за исключением первой 1 (первый столбец единичной матрицы **I**).

В теории сигналов произведения $\mathbf{x} = \mathrm{R}(\mathbf{A})\mathbf{a}$ и $\mathbf{y} = \mathrm{R}(\mathbf{B})\mathbf{b}$, где $\mathrm{R}(\mathbf{A})$ и $\mathrm{R}(\mathbf{B})$ — верхние правые треугольники циклических матриц, трактуются как *автокорреляционные функции* бинарных последовательностей (сигналов) **a** и **b**. Здесь термин бинарные означает, что элементы таких сигналов равны 1 и –1.

В нашей работе мы будем различать два сорта автокорреляционных функций: *периодические* и *апериодические*.

Определение 1. Периодической автокорреляционной функцией (PAF) бинарной последовательности **a** называется произведение $f = \mathbf{Aa}$.

Название «периодические» следует из логики формирования строк циклической матрицы **A** периодическим сдвигом. Соответственно, второй сорт функций называется апериодическим.

Определение 2. Апериодической автокорреляционной функцией (AAF) бинарной последовательности **a** называется произведение $f^* = \mathrm{R}(\mathbf{A})\mathbf{a}$.

Определение 3. Две бинарные последовательности **a** и **b** образуют периодическую пару Голея длины v, если сумма их периодических автокорреляционных функций равна 0 (за исключением первого элемента суммы $n = 2v$).

При замене прилагательного «периодических» на «апериодических» мы получаем определение *апериодической* (или *ординарной*) *пары Голея*.

Лемма 1. Пусть **a** и **b** — бинарные последовательности длины v, и пусть **A** и **B** — соответствующие им циклические матрицы. В таком случае матрица (2) — матрица Адамара тогда и только тогда, когда (**a**, **b**) — периодическая пара Голея.

Опора на более простые ординарные пары была использована М. Голеем ввиду широкого употребления в теории сигналов апериодических автокорреляционных функций (т. е. если прилагательное опускается, то имеются в виду именно такие функции). Вместе с тем проблема нахождения двуциклических матриц Адамара эквивалентна проблеме построения *периодических пар Голея*.

Соответственно, периодические пары Голея играют основную роль в построении двуциклических матриц Адамара, в то время как апериодические — побочную, они — подмножество периодических пар.

Периодические пары Голея

Порядки периодических пар Голея, на которых пар Голея нет, впервые исследовал второй автор, первая такая пара им была получена для размера $v = 34$ [14].

Она принадлежит к множеству периодических пар Голея. Важный вопрос заключается в том, когда такие пары существуют. Мы говорим, что v — периодическое число Голея, если существует периодическая пара Голея длины v. Для обновления списка известных периодических номеров Голея см. каталог в работе [16]. В частности, известны периодические числа Голея ≤ 200: 1, 2, 4, 8, 10, 16, 20, 26, 32, 34, 40, 50, 52, 58, 64, 68, 72, 74, 80, 82, 100, 104, 116, 122, 128, 136, 144, 148, 160, 164, 200. В отношении классических теперь уже пар Голея есть следующая информация. Существуют не сводимые друг к другу независимые пары, найденные для длины $g = 8$, а также 10 и 26. Методы расчета составных ординарных пар Голея длин, равных произведению отмеченных показателей, хорошо известны, простейший алгоритм сводится к удвоению длины [**a**, **b**], [**a**, –**b**]. Периодическая пара длины v, в свою очередь, может быть преобразована к периодической паре длины vg [16].

Выскажем предположение, что вопрос существования пар во многом сводится к матричной интерпретации теоремы Ферма, первое известное доказательство ее методом спуска предложено Эйлером.

Теорема Ферма. Простое $p = 1 \bmod 4$ всегда разложимо на сумму двух квадратов $p = x^2 + y^2$.

Если $v > 1$ — периодическое число Голея, тогда известно, что оно должно быть четным, скажем, $v = 2p$, и p должно быть суммой двух квадратов. Кроме того, есть дополнительное арифметическое условие, полученное Арасу и Чангом (см. следствие 3.6 [19]), которое должно выполняться. Нет примеров, в которых v, не принадлежащее к периодическим числам Голея, удовлетворяло перечисленным выше условиям.

Мы выделяем важный особый случай, в котором простое $p = 1 \bmod 4$.

Гипотеза 2. Если $p = 1 \bmod 4$ — простое число, то $v = 2p$ — периодическое число Голея.

По теореме Ферма мы имеем $p = x^2 + y^2$, где x и y — неотрицательные целые, которые мы можем упорядочить, пусть $x > y$. Если такое v в самом деле периодическое число Голея, тогда существует периодическая пара Голея (**a**, **b**) длины v такая,

что числа $r = p - x$ и $s = p - y$ отвечают количествам -1 в **a** и **b**.

При $p < 100$ не найдена, например, пока пара для $p = 53$, $v = 106$ [17].

Случай $p = 3 \bmod 4$ известен тем, что такое простое число не разложимо на сумму двух квадратов, указанный выше расчет не осуществим и периодическая пара Голея не существует [18]. Тем не менее длина, содержащая такое число множителей в четной степени, реализуема. Например, существует периодическая пара Голея для $v = 72$, $p = 36 = 4 \times 3^2$ [16, 19].

Классы эквивалентности

Ординарные пары Голея потому и дают ортогональные матрицы, что принцип их комбинирования состоит в уходе от симметрии. Для симметрии надо объединять пары, объединенные реверсом (обратным порядком элементов), тогда как комплементарные пары Голея нарастают инверсией знака [**a**, **b**], [**a**, $-$**b**]. Количество периодических пар Голея существенно превышает количество ординарных пар. И это их преимущество позволяет найти среди них те, которые продуцируют симметричные матрицы.

Пусть (**a**; **b**) — периодическая пара Голея длины $v = 2p$ вида $\mathbf{a} = (a_0, a_1, ..., a_{v-1})$ и $\mathbf{b} = (b_0, b_1, ..., b_{v-1})$.

Элементарными преобразованиями пары называются следующие:

1) замена **a** на $-$**a**;

2) замена **b** на $-$**b**;

3) замена в **a** порядка элементов на обратный;

4) замена в **b** порядка элементов на обратный;

5) замена **a** на $(a_1, ..., a_{v-1}, a_0)$;

6) замена **b** на $(b_1, ..., b_{v-1}, b_0)$;

7) взаимные замены **a** и **b**;

8) замена **a** на $(a_0, a_k, a_{2k}, ..., a_{(v-1)k})$ и **b** на $(b_0, b_k, b_{2k}, ..., b_{(v-1)k})$, где целое k — просто с v, а индексы редуцированы по модулю v;

9) замена a_i на $-a_i$ и b_i на $-b_i$ для каждого нечетного индекса i.

Отметим, что применение любого из этих элементарных преобразований к (**a**; **b**) ведет снова к периодической паре Голея. Преобразования 1–6 сохраняют PAF, в то время как остальные — меняют (как правило) и употребляются к **a** и **b**.

Определение 4. Периодические пары Голея (**a**; **b**) и (**c**; **d**) эквивалентны, если одна может быть получена из другой конечной последовательностью элементарных преобразований.

Дефекты симметрии и кососимметрии

Верхние строки матриц **A** и **B** — это бинарные последовательности **a** и **b**. У симметричных матриц первый элемент a_0 значения для симметрии (или асимметрии) не имеет, следующие после первого элементы повторяются с конца, скажем, $a_1 = a_{v-1}$ (последний), $a_2 = a_{v-2}$ и т. п. *Индекс симметрии* ς бинарной последовательности **a** длины v — это наибольшее значение $\varsigma \le p = v/2$ для попарно совпадающих между собой первых ее элементов от начала и от конца $a_j = a_{v-j}$ для всех $j = 1, ..., \varsigma - 1$.

Позиционирование совпадающих элементов расчетом их от начала можно признать малосущественным. Периодическая бинарная последовательность **a** — это точки, лежащие на круге. По типографическим соображениям мы описываем ее как последовательность на линии $\mathbf{a} = (a_0, a_1, ..., a_{v-1})$, однако циклический сдвиг элементов верно отражает картина круга. Индексы при операциях с **a** всегда редуцируются по модулю v. Это свойство используется для введения мер симметрии и асимметрии ниже.

Отмеченный выше параметр $p = v/2$ ограничивает набор индексов $P = \{1, 2, ..., p-1\}$.

Определение 5. Дефект симметрии, c-дефект,
$$d(\mathbf{a}) = \min_{0 \le i < v} \left| \left\{ j \in P \mid a_{i+j} \ne a_{i-j} \right\} \right|.$$

Определение 6. Дефект кососимметрии, κ-дефект,
$$\delta(\mathbf{a}) = \min_{0 \le i < v} \left| \left\{ j \in P \mid a_{i+j} = a_{i-j} \right\} \right|.$$

Здесь $|X|$ означает мощность (число элементов) набора X, т. е. число несовпадений или совпадений соответственно.

Судя по определениям 5 и 6, на первый взгляд, кажется, что $d(\mathbf{a}) + \delta(\mathbf{a}) = p - 1$ всегда. Это не так. Все, что мы имеем, это неравенство $d(\mathbf{a}) + \delta(\mathbf{a}) \le p - 1$, которое может быть строгим. В самом деле, если $\mathbf{a} = (1, 1, 1, -1)$, то $v = 4$ и $p-1 = 1$, тогда как $d(\mathbf{a}) = \delta(\mathbf{a}) = 0$.

Лемма 2. Если (**a**, **b**) — периодическая пара Голея, то $\{d(\mathbf{a}), d(\mathbf{b})\}$, $\{\delta(\mathbf{a}), \delta(\mathbf{b})\}$ — инварианты для элементарных преобразований.

Доказательство: Применительно к преобразованиям 1–7 очевидно.

Давайте проверим это для преобразования 8. Обозначим $\mathbf{a}' = (a_0, a_k, a_{2k}, ..., a_{(v-1)k})$ и $\mathbf{b}' = (b_0, b_k, b_{2k}, ..., b_{(v-1)k})$. Сначала докажем, что $d(\mathbf{a}') = d(\mathbf{a})$.

Пусть i из $\{1, 2, ..., v-1\}$ принимает произвольное значение. Поскольку k взаимно просто с v, последовательность

$$(a_{k(i+1)}, a_{k(i-1)}), (a_{k(i+2)}, a_{k(i-2)}), ..., (a_{k(i+p-1)}, a_{k(i-p+1)})$$

— это перестановка последовательности

$$(a_{ki+1}, a_{ki-1}), (a_{ki+2}, a_{ki-2}), ..., (a_{ki+p-1}, a_{ki-p+1}).$$

Следовательно, для каждого i имеем
$$\left| \left\{ j \in P \mid a_{ki+j} \ne a_{ki-j} \right\} \right| = \left| \left\{ j \in P \mid a_{ki+kj} \ne a_{ki-kj} \right\} \right|.$$

Эти равенства подразумевают
$$\min_{0 \le i < v} \left| \left\{ j \in P \mid a_{ki+j} \ne a_{ki-j} \right\} \right| = \min_{0 \le i < v} \left| \left\{ j \in P \mid a_{ki+kj} \ne a_{ki-kj} \right\} \right|,$$

т. е. что $d(\mathbf{a}') = d(\mathbf{a})$. По тем же соображениям $d(\mathbf{b}') = d(\mathbf{b})$ и также $\{d(\mathbf{a}'), d(\mathbf{b}')\} = \{d(\mathbf{a}), d(\mathbf{b})\}$. Справедливость $\{\delta(\mathbf{a}'), \delta(\mathbf{b}')\} = \{\delta(\mathbf{a}), \delta(\mathbf{b})\}$ доказывается сходно.

Доказательство утверждения для преобразования 9 выглядит проще и опущено.

Отсюда минимумы $\min[d(\mathbf{a}), d(\mathbf{b})]$, $\min[\delta(\mathbf{a}), \delta(\mathbf{b})]$ и суммы $d(\mathbf{a}) + d(\mathbf{b})$, $\delta(\mathbf{a}) + \delta(\mathbf{b})$ — константы для каждого класса эквивалентности.

Определение 7. Пусть E — класс эквивалентности периодических пар Голея, тогда $d(E) = \min[d(\mathbf{a}), d(\mathbf{b})]$ и $\delta(E) = \min[\delta(\mathbf{a}), \delta(\mathbf{b})]$, где $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ принадлежит E.

Договоримся рассчитывать индекс симметрии $\varsigma(\mathbf{A})$, а также дефекты $d(\mathbf{A})$ и $\boldsymbol{\delta}(\mathbf{A})$ циклической матрицы через показатели порождающей ее *бинарной последовательности*. Для симметрии двуциклической матрицы достаточно требования симметрии первого ее блока $d(\mathbf{A}) = 0$. Двуциклические матрицы не могут быть строго кососимметрическими, дефект кососимметрии измеряет отстояние от структуры (2), наиболее приближенной к кососимметрической, с блоками $-\mathbf{B}^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ в нижнем ряду.

Ремарка. Мы можем сформулировать гипотезу 1 иначе: не существует периодических пар Голея $(\mathbf{a}; \mathbf{b})$ длины $v > 16$ с $d(\mathbf{a}) = 0$.

Целое число 12 — наименьшее положительное целое n, делимое на 4, для которого нет двуциклической матрицы Адамара порядка n.

Алгоритм оптимизации детерминанта

Полный перебор, разумеется, — простейший алгоритм, дающий полную информацию о рассматриваемом случае, но невозможный в реализации на высоких порядках. Алгоритмы, опирающиеся на случайный выбор пар Голея, могут рассматриваться как стартовые, готовящие улучшенные условия для подключения алгоритмов иного типа, отличных от переборных [5]. Это новый вычислительный алгоритм, опирающийся на свойство матриц Адамара иметь максимальный детерминант. Процедура оптимизации детерминанта мало известна, поэтому мы ее опишем.

Класс $n \times n$ матриц с элементами, не превосходящими по модулю 1, выделенный Адамаром, включает в себя не оптимальные по детерминанту ортогональные матрицы, отличающиеся между собой m-нормой.

Определение 8. m-норма ортогональной матрицы $\mathbf{X} = (x_{ij})$ — это $\max_{i,j}|x_{ij}|$.

Матрицы, получаемые из ортогональных умножением их на скалярный множитель, будем называть в общем квазиортогональными. В задачах, связанных с нахождением матриц, оптимальных по модулю детерминанта, учитывается ограничение на модули элементов, поэтому далее нас будут интересовать квазиортогональные матрицы в более узком их смысле.

Определение 9. Квазиортогональная матрица $\underline{\mathbf{X}} = (\underline{x}_{ij})$, этот результат умножения ортогональной матрицы на скаляр такой, что $\max_{ij}\left|\underline{x}_{ij}\right| = 1$.

Поскольку матрицы, ортогональная и квазиортогональная, — это, по сути, одна и та же матрица до и после ее масштабирования, m-норму ортогональной матрицы договоримся считать также показателем квазиортогональной матрицы. Тогда если $\underline{\mathbf{X}}$ — квазиортогональная матрица и m — ее m-норма, то $m\underline{\mathbf{X}}$ ортогональна.

Лемма 3. Если $\underline{\mathbf{X}}$ — квазиортогональная матрица порядка n и m — ее m-норма, то $|\det\underline{\mathbf{X}}| = \dfrac{1}{m^n}$.

Согласно гипотезе Адамара, на выделенных им порядках оптимизация приводит к матрицам, всеми элементами достигающими ограничения 1 или –1. В общем случае, как им доказано, число экстремальных по модулю элементов меньше n^2. Отличные от адамаровых матрицы рассмотрены подробнее в работе [5].

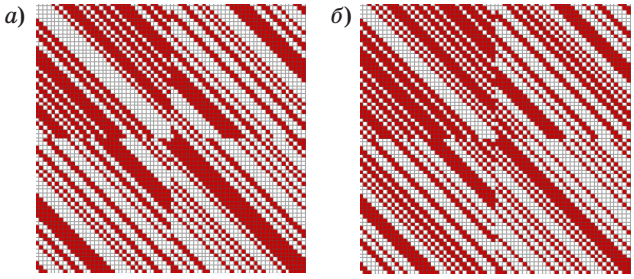
Как следует из неравенства Адамара, предложенные им матрицы экстремальны по детерминанту. Иными словами, отвечающие им матрицы $\mathbf{X}$ — это *минимаксные* ортогональные матрицы, матрицы с *минимально возможным максимальным* модулем их элементов m.

Определение 10. h-норма (адамарова норма) квазиортогональной матрицы — это величина $h = m\sqrt{n}$.

Целесообразность введения h-нормы состоит в том, что она равна 1 для матриц Адамара (максимальный элемент связанной с ней ортогональной матрицы $m = 1/\sqrt{n}$). Это инвариант таких матриц и, в более широком толковании, инвариант преобразования Сильвестра, т. е. инвариант операции, которой Сильвестром были получены первые матрицы интересного нам класса. У всех остальных квазиортогональных матриц показатель h больше единицы. Из рассмотренных выше свойств оптимальных по детерминанту матриц следует алгоритм [5] нахождения матриц Адамара.

На первом этапе генерируется некоторое количество случайных пар $(\mathbf{a}_0, \mathbf{b}_0)$. Из них выбираем пару с минимальной невязкой $\mathrm{PAF}(\mathbf{a}) + \mathrm{PAF}(\mathbf{b}) = n\mathbf{e}$, наиболее близкую по свойствам к периодической паре Голея. Полученную на ее основе двуциклическую матрицу нормируем делением ее элементов на $\sqrt{n}$.

На втором этапе алгоритмом Грамма — Шмидта неортогональная матрица сводится к ортогональной $\mathbf{X}$, после чего выясняется ее адамарова норма. Если $h = 1$, перед нами матрица Адамара. Если $h > 1$, изменим амплитуду элементов $\mathbf{X}$ некоторым порогом насыщения $\rho < m$ так, что



■ ***Рис. 2.*** Портреты начальной (*а*) и оптимальной (*б*) матриц

если $|x_{ij}| \le \rho$, то x_{ij} не меняется, иначе $x_{ij} = \rho$ или $x_{ij} = -\rho$ в соответствии со знаком элемента. Значение ρ может быть константой или итерационно повышаемым до значения m числом, это область эвристических предложений. Разумеется, матрица теряет при этом ортогональность, но мы и начинали с неортогональной матрицы.

Повторим ортогонализацию и уменьшение m-нормы, этот итерационный процесс завершается либо глобальным максимумом модуля детерминанта, либо локальным экстремумом. В первом случае финальную двуциклическую матрицу умножением ее элементов на $\sqrt{n}$ приводим к матрице Адамара с элементами 1 и –1. Во втором случае, при зацикливании процедуры в окрестности локального экстремума $h > 1$, поиск матрицы повторяется с этапа 1.

Процедура Грамма — Шмидта чувствительна к порядку следования столбцов, работа алгоритма улучшается, если в первую очередь обрабатываются измененные столбцы. Чтобы не нарушать циклической структуры матрицы, копить историю всех перестановок столбцов не обязательно, достаточно накапливать матрицу обратной перестановки.

На порядке 68, например, невязку 8 имеет пара $(\mathbf{a}_0, \mathbf{b}_0)$, порождающая матрицу, отображенную на рис 2, *а*. Сравнивая ее с полученной на втором этапе матрицей Адамара (рис 2, *б*), отвечающей периодической паре Голея **(a, b)**, мы видим, что они отличаются несколькими побочными диагоналями циклических блоков. Иными словами, итерационная процедура выступает как алгоритм, исправляющий ошибки в бинарных последовательностях, близких к периодическим парам Голея.

Результаты компьютерного поиска

Результаты компьютерного исследования симметрии двуциклических матриц приведем в табл. 1.

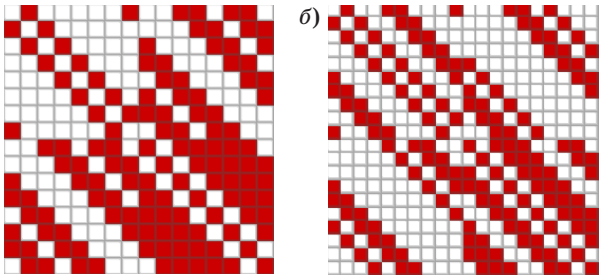
Гипотеза 1 для $n = 2\upsilon > 32$, как видно, подтверждена для длин $\upsilon = 20, 26, 32, 34, 40$. Первый порядок, на котором ортогональность достигается с нарушением симметрии матрицы, отвечает длине $\upsilon = 10$. Симметричная матрица порядка 16 (длина $\upsilon = 8$) существенно отличается от матрицы порядка 20 (длина $\upsilon = 10$) тем, что у последней минимальный дефект симметрии $d(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = 1$ (рис. 3).

Порядок 32-граничный, на нем встречается 11 неэквивалентных между собой периодических пар Голея, 3 из них симметричны. Симметричные матрицы имеют попарно совпадающие между собой блоки (т. е. отвечают одной и той же PAF одного из блоков) (рис. 4).

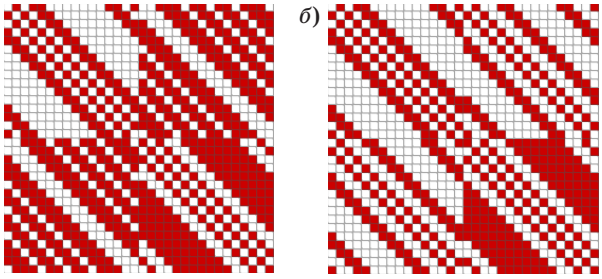
Парное решение соответствует корням матричного квадратичного уравнения (1), когда одной

■ ***Таблица 1***

υ	Минимальный дефект min d(E)	Минимальный дефект min δ(E)	Количество классов эквивалентности	Есть ли симметричная матрица Адамара
2	0	0	1	Да
4	0	0	1	Да
8	0	0	2	Да
10	1	1	1	Нет
16	0	1	11	Да
20	1	1	34	Нет
26	1	2	53	Нет
32	1	0	838	Нет
34	2	3	256	Нет
40	1	1	9301	Нет



■ ***Рис. 3.*** Портреты матриц для длин $\upsilon = 8$ (*а*) и $\upsilon = 10$ (*б*)



■ ***Рис. 4.*** Портреты двух пар симметричных матриц для длин $\upsilon = 16$ (*а*) и (*б*)

■ *Таблица 2*

v	Классы эквивалентности	d(**A**), d(**B**)	δ(**A**), δ(**B**)
2	1) [0],[ ]	0,0	0,0
4	1) [0],[0]	0,0	0,0
8	1) [0,1,2,4],[0,3] 2) [0,1,3,4],[0,2]	1,1 0,0	1,1 0,1
10	1) [0,1,3,5],[0,1,4]	1, 1	1, 1
16	11 классов эквивалентности 1) [0,1,2,3,6,10],[0,1,3,6,8,12] 2) [0,1,2,4,5,10],[0,1,4,7,9,11] 3) [0,1,2,4,6,9],[0,1,2,6,9,12] 4) [0,1,2,4,6,9],[0,1,4,6,9,10] 5) [0,1,2,4,6,9],[0,1,5,7,8,11] 6) [0,1,3,4,7,9],[0,1,5,6,8,10] 7) [0,1,3,5,6,9],[0,1,2,5,9,11] 8) [0,1,3,5,6,9],[0,1,3,5,9,10] 9) [0,1,3,5,7,8],[0,1,2,6,9,12] 10) [0,1,3,5,7,8],[0,1,4,6,9,10] 11) [0,2,3,4,6,11],[0,1,2,6,9,12]	 2,2 2,2 2,0 2,0 2,2 2,2 1,2 1,1 0,0 0,0 0,0	 1,1 2,2 1,2 1,2 1,1 2,2 2,1 2,2 2,2 2,2 2,2
20	34 класса эквивалентности 1) [0,1,2,3,4,6,9,10,14],[0,1,4,8,10,13,15] 2) [0,1,2,3,4,7,9,11,14],[0,1,3,6,7,11,15] 3) [0,1,2,3,4,8,10,13,16],[0,1,3,5,6,10,14] 4) [0,1,2,3,5,6,9,13,15],[0,2,3,5,9,10,14] 5) [0,1,2,3,5,7,8,11,15],[0,1,2,5,9,11,14] 6) [0,1,2,3,5,7,9,12,13],[0,1,3,6,7,10,15] 7) [0,1,2,3,5,7,10,11,14],[0,1,3,5,8,9,15] 8) [0,1,2,3,5,8,11,15,16],[0,1,2,4,6,10,13] 9) [0,1,2,3,6,7,9,11,13],[0,1,4,5,7,12,15] 10) [0,1,2,3,6,7,9,11,15],[0,1,3,4,8,10,13] 11) [0,1,2,3,6,7,9,11,15],[0,2,3,5,9,10,13] 12) [0,1,2,3,6,7,10,12,14],[0,1,4,5,7,10,12] 13) [0,1,2,3,6,7,10,12,14],[0,2,3,5,8,9,13] 14) [0,1,2,3,6,7,11,13,15],[0,2,3,5,8,9,12] 15) [0,1,2,3,6,8,10,11,15],[0,1,3,4,7,9,13] 16) [0,1,2,3,6,8,10,12,15],[0,1,2,5,6,9,12] 17) [0,1,2,3,6,9,11,13,17],[0,1,2,5,7,8,12] 18) [0,1,2,3,7,8,11,13,16],[0,1,3,4,7,9,11] 19) [0,1,2,4,5,6,9,12,14],[0,1,2,5,7,11,14] 20) [0,1,2,4,5,6,9,12,15],[0,1,2,6,8,10,13] 21) [0,1,2,4,6,7,9,10,14],[0,1,2,5,9,11,14] 22) [0,1,2,4,6,7,11,14,15],[0,1,2,4,6,9,12] 23) [0,1,2,4,7,9,10,11,15],[0,1,3,5,6,9,13] 24) [0,1,2,5,6,7,9,13,16],[0,1,2,4,7,10,12] 25) [0,1,2,5,6,7,10,12,14],[0,1,3,4,7,10,12] 26) [0,1,2,5,7,8,10,12,16],[0,1,2,3,6,9,13] 27) [0,1,3,4,5,7,9,13,14],[0,1,2,5,7,10,13] 28) [0,1,3,4,6,8,9,13,14],[0,1,2,4,6,10,13] 29) [0,1,3,4,6,8,10,12,13],[0,1,3,4,8,9,14] 30) [0,1,3,4,6,9,10,11,14],[0,1,2,5,7,9,13] 31) [0,1,3,4,6,9,11,13,17],[0,1,2,3,7,8,12] 32) [0,1,3,4,7,8,9,12,14],[0,1,2,4,6,11,14] 33) [0,2,3,4,5,8,9,12,15],[0,1,2,5,7,11,13] 34) [0,2,3,6,7,9,10,12,14],[0,1,2,5,6,11,13]	 2,2 4,2 2,2 3,3 3,3 2,2 3,3 2,2 3,3 3,3 3,3 3,3 3,3 3,3 3,3 4,3 3,3 3,3 3,3 1,3 3,3 3,3 3,3 3,1 2,2 2,2 2,2 2,3 3,2 3,2 2,3 3,2 3,3 3,3 3,3 3,3 2,2	 3,3 3,3 3,2 3,3 3,3 3,3 2,3 2,2 3,2 3,3 3,3 2,2 2,3 3,3 2,3 2,3 3,2 2,2 3,3 3,3 3,3 3,3 3,3 1,2 2,2 3,3 3,2 3,2 3,3 2,3 2,2 3,4 2,3 3,3

■ *Окончание табл. 2*

v	Классы эквивалентности	d(**A**), d(**B**)	δ(**A**), δ(**B**)
26	53 класса эквивалентности		
	1) [0,1,2,3,4,6,8,12,13,17,20],[0,1,3,4,8,9,11,14,16,20]	4,4	3,3
	2) [0,1,2,3,4,7,8,11,13,17,19],[0,2,3,5,7,8,13,14,17,21]	2,3	4,3
	3) [0,1,2,3,4,7,9,12,13,15,19],[0,1,2,5,6,9,11,13,18,21]	3,4	4,5
	4) [0,1,2,3,4,7,9,12,13,17,19],[0,1,4,6,7,10,12,14,15,19]	4,4	4,4
	5) [0,1,2,3,4,7,9,12,14,16,20],[0,1,4,5,9,10,11,13,16,19]	3,3	3,3
	6) [0,1,2,3,4,8,9,12,14,16,19],[0,1,2,4,7,8,10,13,17,22]	3,3	4,3
	7) [0,1,2,3,5,6,8,14,15,18,22],[0,1,2,5,7,9,11,12,17,20]	4,4	2,3
	8) [0,1,2,3,5,7,9,10,13,17,20],[0,1,4,5,6,10,12,15,17,18]	4,4	3,3
	9) [0,1,2,3,5,7,9,12,15,18,19],[0,1,2,4,6,7,11,12,15,20]	4,4	4,4
	10) [0,1,2,3,5,7,9,12,15,19,20],[0,2,3,4,8,9,12,13,15,18]	4,4	4,4
	11) [0,1,2,3,6,7,9,10,14,18,20],[0,1,2,4,5,7,12,15,17,21]	4,4	3,4
	12) [0,1,2,3,6,7,9,11,13,15,16],[0,1,2,6,9,10,13,16,18,21]	3,4	5,4
	13) [0,1,2,3,6,7,9,12,14,18,22],[0,1,2,3,4,8,11,13,16,20]	4,4	3,4
	14) [0,1,2,3,6,7,10,12,14,17,20],[0,1,2,3,5,7,11,12,15,20]	4,4	5,3
	15) [0,1,2,3,6,7,11,14,17,19,21],[0,1,2,3,5,8,9,12,14,18]	3,4	4,3
	16) [0,1,2,3,6,8,9,12,13,16,18],[0,1,2,4,8,9,11,13,16,22]	4,4	5,4
	17) [0,1,2,3,6,8,11,12,14,18,21],[0,1,3,4,5,8,10,12,16,17]	3,3	4,4
	18) [0,1,2,3,7,8,11,13,15,16,19],[0,2,3,6,7,9,11,12,16,18]	4,1	4,3
	19) [0,1,2,4,5,6,8,10,15,16,19],[0,1,2,6,8,9,11,14,18,21]	4,4	3,4
	20) [0,1,2,4,5,6,10,11,13,16,18],[0,2,3,4,8,10,11,14,17,21]	4,4	4,3
	21) [0,1,2,4,5,7,9,10,15,17,19],[0,1,2,5,6,9,12,13,15,21]	4,4	4,4
	22) [0,1,2,4,5,7,9,10,15,17,19],[0,1,4,5,6,10,12,13,16,19]	4,3	4,3
	23) [0,1,2,4,5,8,9,14,15,18,20],[0,1,2,3,5,7,9,12,17,20]	5,4	4,4
	24) [0,1,2,4,5,8,10,13,14,19,20],[0,1,2,4,5,8,10,12,15,17]	4,4	3,3
	25) [0,1,2,4,5,8,10,14,16,19,21],[0,1,2,4,5,8,11,12,13,18]	5,4	4,5
	26) [0,1,2,4,6,7,8,11,14,16,19],[0,1,2,4,6,9,10,15,16,19]	4,4	3,4
	27) [0,1,2,4,6,7,9,12,15,16,20],[0,2,3,4,5,9,10,13,17,19]	3,4	4,4
	28) [0,1,2,4,6,7,11,12,16,19,20],[0,1,2,3,5,7,9,12,15,18]	4,4	4,3
	29) [0,1,2,4,6,8,9,10,13,16,19],[0,1,2,5,6,11,12,14,16,19]	3,4	3,3
	30) [0,1,2,4,6,8,9,13,16,19,22],[0,1,2,3,5,6,10,12,17,18]	4,4	4,3
	31) [0,1,2,4,6,9,10,13,15,16,22],[0,1,3,4,5,9,11,12,14,19]	4,3	4,5
	32) [0,1,2,4,6,9,11,12,15,18,22],[0,1,2,4,5,6,11,12,14,19]	4,4	5,3
	33) [0,1,2,4,6,10,11,14,15,18,21],[0,1,2,3,4,7,9,12,14,20]	3,4	4,4
	34) [0,1,2,4,7,8,9,12,14,15,18],[0,1,2,5,7,10,11,14,16,18]	2,4	4,3
	35) [0,1,2,4,7,8,10,13,14,18,19],[0,1,2,4,5,8,10,12,15,17]	4,4	3,3
	36) [0,1,2,5,6,8,11,12,16,18,19],[0,1,3,4,6,8,9,13,15,17]	4,3	4,4
	37) [0,1,2,5,7,8,12,14,16,17,20],[0,1,2,4,6,9,10,11,14,17]	3,4	4,3
	38) [0,1,3,4,5,8,10,12,16,17,20],[0,1,2,3,6,8,11,12,14,21]	2,2	4,4
	39) [0,1,3,4,6,8,10,12,13,18,19],[0,1,2,3,5,8,12,13,16,22]	4,4	4,4
	40) [0,1,3,4,6,8,10,14,15,16,19],[0,1,2,4,7,8,9,12,18,21]	4,3	3,3
	41) [0,1,3,4,6,9,10,11,13,17,21],[0,1,2,4,5,7,12,13,17,19]	3,4	4,4
	42) [0,1,3,4,6,9,10,14,16,18,19],[0,1,2,3,6,7,10,12,14,21]	4,4	4,4
	43) [0,1,3,4,6,9,11,13,15,18,19],[0,1,2,3,6,7,8,12,16,19]	4,4	4,5
	44) [0,1,3,4,7,9,11,12,14,17,21],[0,1,2,3,4,8,9,13,15,19]	3,3	4,4
	45) [0,1,3,4,7,9,11,15,16,17,20],[0,1,3,4,6,8,11,12,13,18]	3,3	4,3
	46) [0,1,3,5,6,7,9,11,14,18,21],[0,1,2,3,5,9,10,15,16,19]	2,5	4,4
	47) [0,1,3,5,6,7,9,11,14,18,21],[0,1,3,4,5,9,10,16,17,19]	2,3	4,4
	48) [0,1,3,5,6,8,11,12,13,15,19],[0,1,2,5,6,9,11,15,17,18]	4,4	2,4
	49) [0,1,3,5,8,9,11,13,16,17,20],[0,1,2,3,4,7,9,13,14,19]	4,4	5,2
	50) [0,2,3,4,5,7,10,11,14,18,20],[0,1,2,5,6,7,11,14,17,19]	3,4	2,5
	51) [0,2,3,4,5,8,9,11,16,18,20],[0,1,2,5,6,7,10,14,17,20]	3,3	4,4
	52) [0,2,3,6,7,11,12,13,16,18,20],[0,1,2,3,4,7,9,12,15,19]	3,4	4,4
	53) [0,2,4,5,6,10,12,13,15,18,19],[0,1,3,4,5,9,10,12,15,19]	5,5	3,3

матрице **A** отвечает пара возможных симметричных матриц **B**. Парадокс состоит в том, что для PAF **x** = **Aa** есть компенсирующая ее, с точностью до первого элемента, PAF **y** = **Bb**, разрешимая для нескольких (включая несимметричные решения) матриц. Этот парадокс повышает количество неэквивалентных между собой пар, хотя порождаемые ими матрицы имеют отмеченное внутреннее родство.

Длины $v = 20$ и, далее, $v = 40$ преемственны длине $v = 10$ и интересны в том отношении, что минимальный дефект $d(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ для них не растет. Не надо забывать, впрочем, что уменьшение достигается поднятием $d(\mathbf{B})$ до 3 и 5 соответственно, что несущественно для симметрии матрицы в целом. Это наблюдение предполагает, что подобного сорта зависимость может распространяться и далее на порядки 80, 160, 320, 640 и т. п.

Уравновешенные решения с $d(\mathbf{A}) = d(\mathbf{B})$ имеют для длин 20, 26, 32 значение 2. В дальнейшем мы прогнозируем рост этого осредненного показателя, связанного с минимальным дефектом, тем, что он выше его.

В установлении справедливости гипотезы о граничном значении порядка 32 большое значение имеет порядок 64 ($v = 32$). В самом деле, все начальные симметричные матрицы отвечают порядкам матриц Сильвестра $n = 2^t$, t — целое. В отличие от предыдущего случая и случая $v = 26$ с $d(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = 1$ — это наиболее ожидаемый порядок для проявления симметричной наследственности, если бы таковая была.

Тем не менее мы видим, что в сравнении с $v = 20$ случай $v = 32$ ровно такой же, минимальный дефект $d(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = 1$ достигается увеличением дефекта второго плеча до значения $d(\mathbf{B}) = 3$, минимальная сумма дефектов $d(\mathbf{A}) + d(\mathbf{B}) = 4$, а не 0, как для стартовых значений, что свидетельствует о нарастании некоторой диспропорции с ростом порядка.

За полем нашего внимания оказались индексы симметрии. Стоит отметить, что в отличие от дефектов индекс симметрии чувствителен к порядку. Слишком большое его значение свидетельствовало бы о теоретической возможности ускорить поиск матрицы.

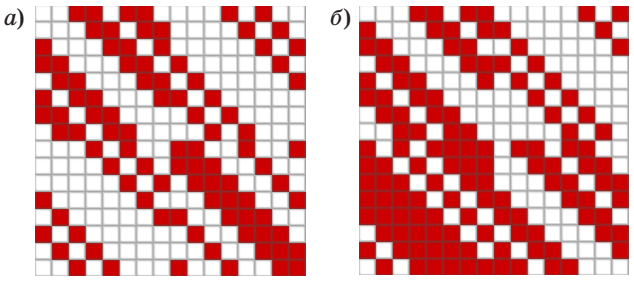
В табл. 2 все классы эквивалентности для $v = 2, 4, 8, 10, 16, 20, 26$ представлены последовательностями (**a**, **b**). Цифры при обозначении содержимого последовательностей обозначают порядковый номер –1 (в составе 1, –1). Например, для $v = 2$ обозначение [0],[ ] означает [–1, 1],[1 1].

Первый нетривиальный пример, когда признаки симметрии $d(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = 0$ и кососимметрии $\delta(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = 0$ выделяют различные между собой варианты решений, наблюдаются при длине последовательностей $v = 8$ (рис. 5, *а* и *б*).

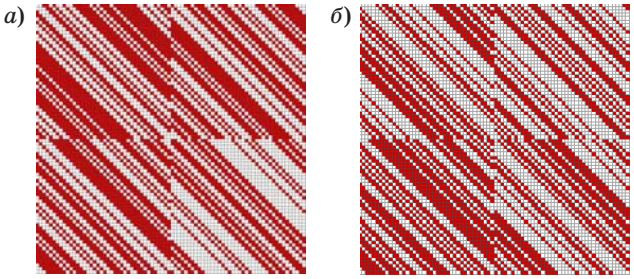
Поясним на примере рис. 5, *б* показатель $\delta(\mathbf{a}) = 0$. При $v = 8$, $p = 4$ значения проверяемых индексов $P = \{1, 2, 3\}$, причем $a_1 \neq a_{-1}$, $a_2 \neq a_{-2}$, $a_3 \neq a_{-3}$. С другой стороны, $a_4 = a_{-4}$, поскольку $4 = -4 \bmod 8$. В общем, всегда $a_p = a_{-p}$. В табл. 3 представлена часть выявленных последовательностей в силу обширности классов эквивалентности для $v \geq 32$.

Для матриц порядков, больших 32, симметрия и кососимметрия в чистом виде, как мы полагаем, не достигается нигде. Приведем для сравнения два варианта из соседних классов эквивалентности с $d(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = 1$ и $\delta(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = 1$, это почти симметричная и почти кососимметричная матрицы при длине последовательностей $v = 40$ (рис. 6, *а* и *б*).

В примере рис. 6, *б* мы можем отметить, что для $p = 20$, помимо $a_p = a_{-p}$, есть еще одно равенство $a_2 = a_{-2}$. Таким образом, мы приходим к выводу, что противоречие между качествами, обеспечивающими симметрию или кососимметрию матрицы и ее ортогональность, неразрешимо для двуциклических матриц, начиная с некоторого критического порядка. Минимальный дефект (симметрии, кососимметрии) для порядков, на которых существуют ординарные последовательности Голея, предположительно равен 1 (и достигается он на периодических парах), на прочих порядках этот показатель выше, вопрос в том, растет ли он с порядком. Переход к блочной конструкции с тремя и четырьмя составляющими позволяет глубже охватить различные типы симметрий, такие матрицы легче в своем отыскании ввиду элементарного сокращения вычислений [20].



■ ***Рис. 5***. Матрицы симметричная (*а*) и почти кососимметричная (*б*) для $v = 8$



■ ***Рис. 6***. Матрицы почти симметричная (*а*) и почти кососимметричная (*б*) для $v = 40$

■ *Таблица 3*

υ	Представители классов эквивалентности	d(A), d(B)	δ(A), δ(B)
32	1) [0,1,2,4,5,7,9,11,12,15,16,17,20,22,23,24],[0,1,4,6,7,8,10,13,14,19,22,24] 2) [0,1,2,3,4,5,8,9,11,13,15,16,18,20,23,24],[0,1,2,4,7,8,10,14,17,22,23,28] 3) [0,1,2,4,5,7,8,9,13,14,15,17,18,20,22,25],[0,1,2,4,6,10,11,12,16,19,22,25] 4) [0,1,2,3,4,5,8,9,11,13,15,16,18,20,23,24],[0,1,2,6,7,8,10,14,17,20,23,28]	3,1 4,3 2,2 4,1	2,6 0,4 4,5 0,4
34	1) [0,1,2,3,5,7,9,11,12,13,14,18,19,21,24,27],[0,1,4,5,6,8,9,15,17,20,21,25,28] 2) [0,1,2,4,5,6,8,9,11,12,15,18,23,24,26,28],[0,1,2,3,5,7,10,14,15,19,20,26,28] 3) [0,1,2,3,4,5,7,9,11,14,17,19,23,24,27,28],[0,1,3,6,7,8,11,15,16,17,19,22,28] 4) [0,1,2,4,5,6,8,9,11,12,15,18,23,24,26,28],[0,1,2,3,5,7,10,14,15,19,20,26,28]	2, 5 6, 4 3, 3 6, 4	5,6 4,3 6,6 4,3
40	1) [0,1,2,4,5,6,9,13,14,16,20,21,23,25,26,27,31,33], [0,1,3,4,6,9,10,11,14,16,17,19,20,26,28,32] 2) [0,1,2,3,5,6,7,9,10,13,15,16,18,24,26,27,30,34], [0,1,2,5,7,9,12,13,14,19,22,23,24,27,29,33] 3) [0,1,2,3,4,6,7,10,11,12,13,14,19,22,26,27,28,32], [0,1,2,4,7,9,12,13,17,19,22,24,26,30,33,36] 4) [0,1,2,3,4,6,7,8,11,12,14,16,18,21,23,27,30,31], [0,1,2,3,6,9,10,16,18,21,23,24,28,29,32,34]	5,1 6,6 2,2 6,5	5,7 1,5 7,7 2,3
64	1) [0,1,2,3,4,5,6,12,13,16,19,20,22,24,25,28,30,33,35,37,40,42,45,46,50,51,57,58], [0,1,2,3,5,6,9,12,13,14,16,19,20,22,24,26,28,30,33,35,36,37,40,41,42,45,50,51] 2) [0,1,2,3,4,5,6,9,11,13,18,19,23,25,26,29,31,32,34,36,38,39,47,49,50,53,58,59], [0,1,3,5,7,8,9,10,13,14,15,17,20,21,24,25,27,29,31,32,40,42,43,46,51,52,55,56] 3) [0,1,2,3,4,5,6,8,11,12,13,15,16,18,21,26,28,29,32,33,38,40,42,47,48,51,52,59], [0,1,2,5,6,8,9,11,13,15,17,20,21,23,24,25,30,31,34,37,39,43,45,46,48,52,53,54] 4) [0,1,2,3,4,6,7,9,12,14,19,20,21,22,23,24,27,28,31,34,35,38,42,44,50,52,55,61], [0,1,2,4,6,7,8,11,13,17,18,19,20,26,28,29,31,33,36,37,40,41,42,45,46,50,56,58]	2,8 11,7 4,4 11,11	12,11 4,10 11,11 5,5

Сравнение периодических и ординарных пар Голея

Эквивалентность ординарных пар Голея определяется примерно так же, как и периодических пар, мы используем только элементарные операции 1, 2, 3, 4, 7 и 9 [21]. Репрезентативные выборки классов эквивалентности таких пар для длин 2, 4, 8, 10, 16, 20, 26, 32 и 40 приведены в табл. 2–4 работы [21], из них возьмем номера выделенных классов. Каждый класс эквивалентности ординарных пар содержится в некотором одном классе эквивалентности периодических пар Голея, причем последний может вмещать в себя несколько таких классов.

Например, первый класс эквивалентности периодических пар Голея длины $\upsilon = 8$ содержит первые четыре класса ординарных пар. Отметим, что не все классы эквивалентности периодических пар Голея содержат ординарные пары. Впервые такое происходит для длины $\upsilon = 16$, в этом случае каждый из семи классов эквивалентности (1, 2, 3, 5, 6, 8 и 10) содержит некоторые ординарные пары Голея, но четыре остальных класса (4, 7, 9 и 11) не содержат их. В табл. 4 мы указываем классы эквивалентности периодических пар Голея для $\upsilon = 2$, 4, 8, 10, 16, 20 и 26, которые содержат, как минимум, один класс эквивалентности ординарных пар, перечисляя их все в последней колонке.

■ *Таблица 4*

υ	Периодические пары Голея	Ординарные пары Голея
2	1	1
4	1	1
8	1 2	1, 2, 3, 4 5
16	1 2 3 5 6 8 10	3, 10, 11, 12, 14, 17, 18, 20, 29, 31 34, 36 33, 35 28 5, 6, 7, 8, 21, 22, 23, 24, 25, 27 1, 2, 4, 9, 13, 15, 16, 19, 30, 32 26
20	1 4 6 7 12 14 15 17 21 25 26 27 28 31 34	5, 17 2 20, 21 22, 23 19 7, 10 3 8, 16 14, 18 6 12, 13 24, 25 4, 15 1 9, 11
26	25	1

Взвешенные матрицы из периодических пар Голея

В этом разделе мы опишем две конструкции взвешенных матриц, использующих периодические пары Голея. Взвешенные матрицы обобщают матрицы Адамара, это тринарные матрицы $\mathbf{W}$ порядка n такие, что $\mathbf{W}^T\mathbf{W} = w\mathbf{I}$, где $w > 0$ — целое. Значение слова «тринарные» состоит в том, что элементы $\mathbf{W}$ принадлежат набору $\{0, 1, -1\}$. Число w называют весом $\mathbf{W}$ и используют в обозначении $\mathbf{W}(n, w)$ взвешенных матриц порядка n. Если $w = n$, то $\mathbf{W}$ — матрица Адамара.

Пусть $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ — периодическая пара Голея четной длины $v = 2p$.

Пусть $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ — соответствующие циклические матрицы порядка v. Они удовлетворяют уравнению $\mathbf{AA}^T + \mathbf{BB}^T = n\mathbf{I}$.

Первая конструкция. Тринарные циклические матрицы $\mathbf{C} = (\mathbf{A} + \mathbf{B})/2$ и $\mathbf{D} = (\mathbf{A} - \mathbf{B})/2$ удовлетворяют уравнению $\mathbf{CC}^T + \mathbf{DD}^T = v\mathbf{I}$. Соответственно, матрица

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{D} \\ \mathbf{D}^T & -\mathbf{C}^T \end{pmatrix}$$

— взвешенная $\mathbf{W}(n, v)$ с $n = 2v$.

Вторая конструкция. Здесь v — четное число, мы можем сжать последовательности $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ с масштабом 2 для получения последовательностей $\mathbf{a}^{(p)}/2$ и $\mathbf{b}^{(p)}/2$ длины $p = v/2$. Более детально вычисляем $a_i^{(p)} = a_i + a_{i+p}$ и $b_i^{(p)} = b_i + b_{i+p}$ для $i = 0, 1, \ldots, p-1$. После деления каждого элемента $\mathbf{a}^{(p)}$ и $\mathbf{b}^{(p)}$ на 2 получаем две тринарные последовательности. Обозначим как $\mathbf{E}$ и $\mathbf{F}$ соответствующие тринарные циклические матрицы порядка p.

Предложение. Матрица

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{F} \\ \mathbf{F}^T & -\mathbf{E}^T \end{pmatrix}$$

— взвешенная $\mathbf{W}(v, p)$.

Доказательство: По теоремам 3 и 4 из работы [22] сжатые последовательности $\mathbf{a}^{(p)}$ и $\mathbf{b}^{(p)}$ комплементарны, т. е. сумма их PAF тождественна нулю везде, за исключением стартовой компоненты. То же самое касается тринарных последовательностей $\mathbf{a}^{(p)}/2$ и $\mathbf{b}^{(p)}/2$. Более того, согласно следствию 1 [22], общее число 0 в этих двух последовательностях равно p. Соответственно, общее число ненулевых компонент тоже равно p, отсюда $\mathbf{EE}^T + \mathbf{FF}^T = p\mathbf{I}$. Из этого следует, что $\mathbf{W}$ — взвешенная матрица с весом p.

Например, возьмем $v = 82$, так как известно, что периодическая пара Голея длины 82 существует (согласно работе [17] и ссылкам). Тогда вторая конструкция дает взвешенную матрицу порядка 82 с весом 41. Согласно табл. 2.86 [23, с. 291], вопрос существования взвешенной матрицы $\mathbf{W}(82, 41)$ не был разрешен. Так что, возможно, это первый пример такой матрицы.

Заключение

В работе введены новые понятия отмеченных выше c- и κ-дефектов, приводящие к некоторым формальным мерам расстояния до симметричных или асимметричных структур. Меры, в свою очередь, позволяют корректно ставить задачи на отыскание периодических пар Голея или соответствующих им двуциклических матриц Адамара, обладающих интересующим нас свойством в наиболее выраженной степени.

Экстремальные по отмеченным свойствам матрицы представляют собой непосредственный научный интерес, поскольку различного сорта симметрии — удобный классификационный признак для отделения более простых матриц от сложных. Симметрия, даже неполная, позволяет экономнее расходовать место на хранение информации. Настоящая работа содержит большое количество новых периодических пар Голея, найденных в ходе компьютерной проверки гипотезы об ограничении порядка симметричных двуциклических матриц Адамара значением 32. Выделены пары и соответствующие им матрицы, обладающие минимальными значениями дефектов симметрии и кососимметрии.

Кроме того, приведены полные таблицы представителей классов эквивалентности периодических пар Голея до длин 26 включительно, полученные в результате трудоемких компьютерных вычислений повышенной сложности. Проведен сопоставительный анализ классов ординарных и периодических пар Голея, используемых при построении двуциклических матриц. В силу повышенной вычислительной сложности задачи на отыскание периодических пар Голея, материал работы уникален и может служить проверочной базой для последующих исследований (см. прил. А, Б).

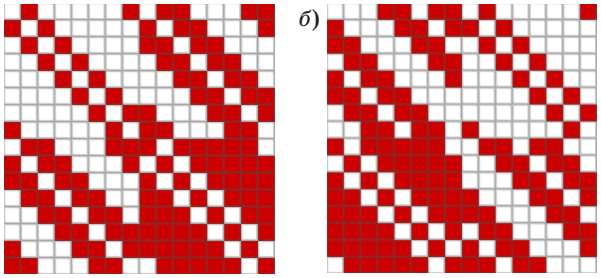
Рассмотрение взвешенных матриц, получаемых из периодических пар Голея, констатирует новые инварианты, например, сохранение свойства ортогональности при компрессии бинарных последовательностей до триарных, вдвое меньших по размеру. Фиксация таких закономерностей очень весома, поскольку это приводит к двухкаскадным вычислительным алгоритмам, когда сначала отыскивается матрица вдвое меньшего порядка, чем искомая (ортогональная взвешенная матрица), а затем уже происходит окончательный поиск двуциклической матрицы Адамара.

Благодарности: Д. Джокович благодарит за общую поддержку NSERC. Эта работа осуществлена благодаря возможностям Shared Hierarchical Academic Research Computing Network (SHARCNET) и Compute/Calcul Canada.

ПРИЛОЖЕНИЯ

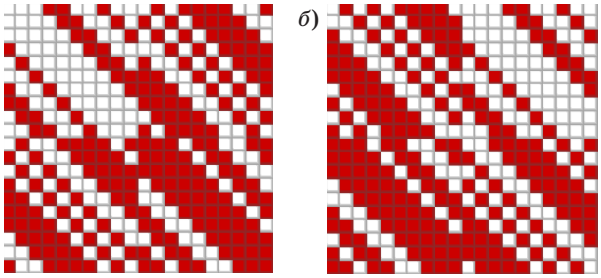
Приложение А. Двуциклические матрицы с минимальными дефектами симметрии и кососимметрии, E(k) отсылает к k-му классу эквивалентности для отмеченной длины v

а) *б)*



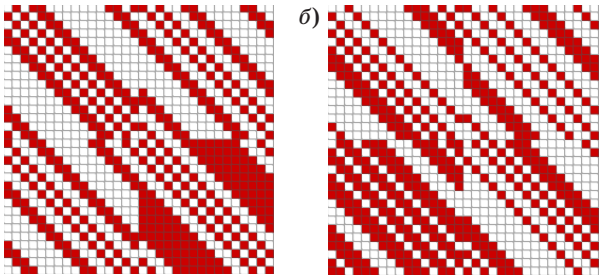
■ ***Рис. А1.*** $v = 8$ E(2), $d(\mathbf{A}) = 0$ ($а$); $\delta(\mathbf{A}) = 0$ ($б$)

а) *б)*



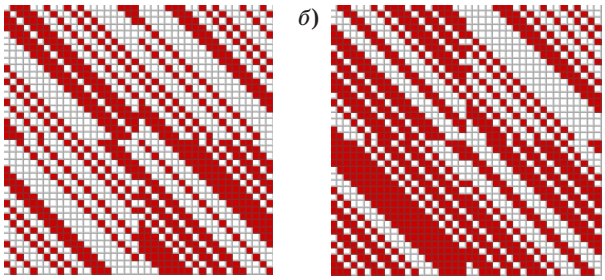
■ ***Рис. А2.*** $v = 10$ E(1), $d(\mathbf{A}) = 1$ ($а$); E(1), $\delta(\mathbf{A}) = 1$ ($б$)

а) *б)*



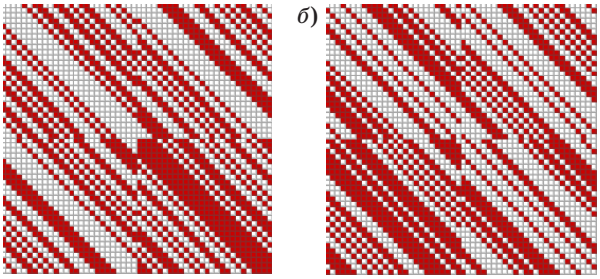
■ ***Рис. А3.*** $v = 16$ E(10), $d(\mathbf{A}) = 0$ ($а$); E(3), $\delta(\mathbf{A}) = 1$ ($б$)

а) *б)*



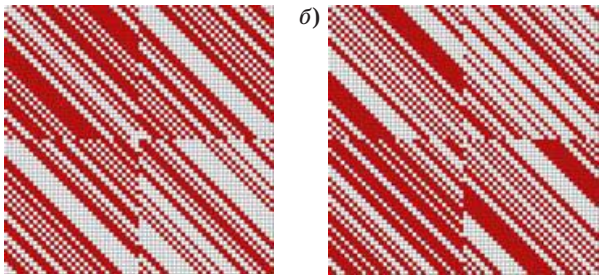
■ ***Рис. А4.*** $v = 20$ E(19), $d(\mathbf{A}) = 1$ ($а$); E(24), $\delta(\mathbf{A}) = 1$ ($б$)

а) *б)*



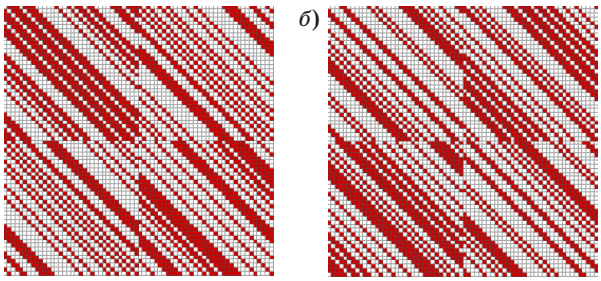
■ ***Рис. А5.*** $v = 26$ E(18), $d(\mathbf{A}) = 1$ ($а$); E(7), $\delta(\mathbf{A}) = 2$ ($б$)

а) *б)*



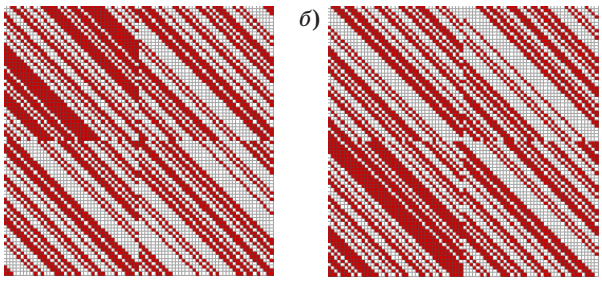
■ ***Рис. А6.*** $v = 32$ E(1), $d(\mathbf{A}) = 1$ ($а$); E(2), $\delta(\mathbf{A}) = 0$ ($б$)

а) *б)*



■ ***Рис. А7.*** $v = 34$ E(1), $d(\mathbf{A}) = 2$ ($а$); E(2), $\delta(\mathbf{A}) = 3$ ($б$)

а) *б)*



■ ***Рис. А8.*** $v = 40$ E(1), $d(\mathbf{A}) = 1$ ($а$); E(2), $\delta(\mathbf{A}) = 1$ ($б$)

Приложение Б. Двуциклические матрицы с максимальным индексом симметрии

■ ***Таблица Б1***

v	a, b	ξ(a), ξ(b)
2	[1],[]	1,1
4	[2],[2]	2,2
8	[1,7],[1,2,6,7]	4,4
10	[3,4,7],[1,3,4,5,6,9]	4,3
16	[1,3,4,12,13,15],[1,4,5,11,12,15]	8,8
20	[1,2,3,5,10,11,12,15,17,18,19],[2,7,9,10,12,13,18]	8,8
26	[1,2,3,7,9,10,12,14,15,16,17,19,23,24,25],[2,5,6,8,11,12,13,14,17,24]	11,5
32	[1,2,5,7,9,10,11,12,14,15,16,19,20,21,22,23,25,27,30,31], [1,2,9,11,14,15,16,17,18,19,22,23,24,28,30,31]	13,4
34	[3,6,7,8,10,12,13,14,15,18,20,21,22,24,26,27,28,31], [1,2,3,6,7,12,13,14,15,16,18,21,23,24,25,26,28,29,31,32,33]	15,5
40	[1,2,3,4,6,7,9,13,15,16,18,19,20,23,24,25,27,31,33,34,36,37,38,39], [2,3,4,6,7,10,17,18,19,25,27,30,32,33,34,36,37,38]	17,8

а) *б)*

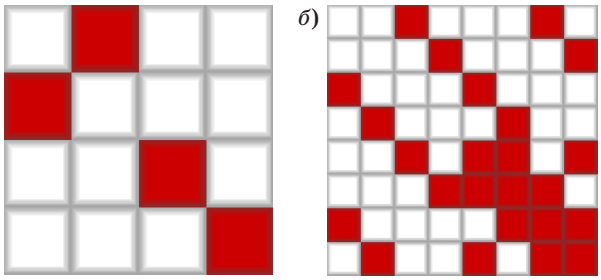


Рис. Б1. $v = 2$, $\varsigma = p = 1$ (*а*); $v = 4$, $\varsigma = p = 2$ (*б*)

а) *б)*

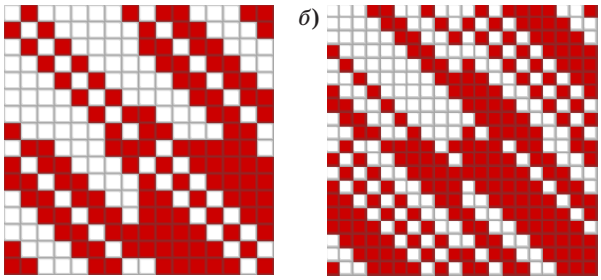


Рис. Б2. $v = 8$, $\varsigma = p = 4$ (*а*); $v = 10$, $\varsigma = 4 < p = 5$ (*б*)

а) *б)*

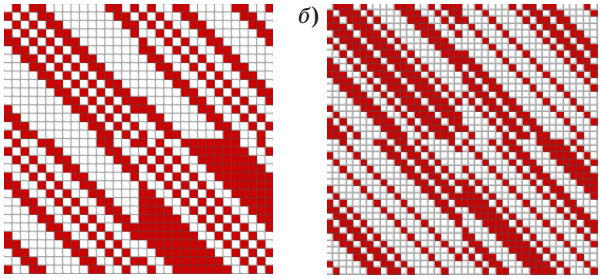


Рис. Б3. $v = 16$, $\varsigma = p = 8$ (*а*); $v = 20$, $\varsigma = 8 < p = 10$ (*б*)

а) *б)*

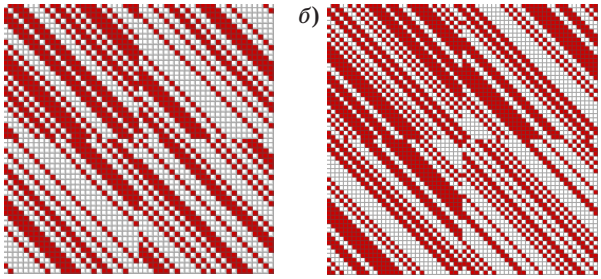


Рис. Б4. $v = 26$, $\varsigma = 11 < p = 13$ (*а*); $v = 32$, $\varsigma = 13 < p = 16$ (*б*)

а) *б)*

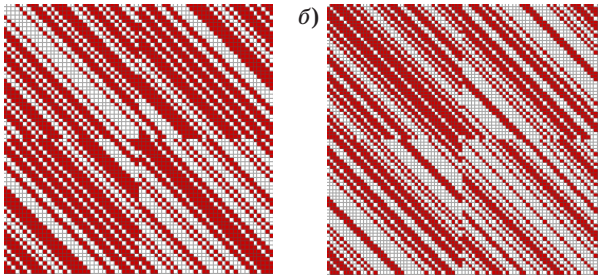


Рис. Б5. $v = 34$, $\varsigma = 15 < p = 17$ (*а*); $v = 40$, $\varsigma = 17 < p = 20$ (*б*)

Литература

1. **Hadamard J.** Résolution d'une Question Relative aux Déterminants//Bulletin des Sciences Mathematiques. 1893. Vol. 17. P. 240–246.
2. **Silvester J. J.** Thoughts on Inverse Orthogonal Matrices, Simultaneous Sign Successions, and Tessellated Pavements in Two or More Colours, with Applications to Newton's Rule, Ornamental Tile-Work, and the Theory of Numbers//Philosophical Magazine. 1867. Vol. 34. P. 461–475.

3. **Scarpis U.** Sui Determinanti di Valore Massimo // Rendiconti della R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere. 1898. Vol. 31. P. 1441–1446.
4. **Paley R. E. A. C.** On Orthogonal Matrices//J. of Mathematics and Physics. 1933. Vol. 12. P. 311–320.
5. **Балонин Н. А., Сергеев М. Б.** Матрицы локального максимума детерминанта // Информационно-управляющие системы. 2014. № 1(68). С. 2–15.
6. **Балонин Н. А., Сергеев М. Б.** К вопросу существования матриц Мерсенна и Адамара // Информационно-управляющие системы. 2013. № 5(66). С. 2–8.
7. **Ryser H. J.** Combinatorial Mathematics // The Carus Mathematical Monographs. Published by The Mathematical Association of America. — New York: John Wiley and Sons, 1963. N 14. — 162 p.
8. **Lint van J. H., Wilson R. M.** A Course in Combinatorics. — Cambridge Univ. Press, 1992. Ch. 18. — 602 p.
9. **Williamson J.** Hadamard's Determinant Theorem and the Sum of Four Squares // Duke Math. J. 1944. Vol. 11. N 1. P. 65–81. doi:10.1215/S0012-7094-44-01108-7
10. **Seberry J., Yamada M.** Hadamard Matrices, Sequences, and Block Designs // Contemporary Design Theory: A Collection of Surveys/ J. H. Dinitz and D. R. Stinson eds. — John Wiley and Sons, 1992. — P. 431–560.
11. **Balonin N. A.** Two Circulant Hadamard Matrices, Mathematical Euler-net "Mathscinet.ru", 2014. http://mathscinet.ru/catalogue/twocirculanthadamard/index.php (дата обращения: 08.03.2015).
12. **Holzmann W. H., Kharaghani H., Tayfeh-Rezaie B.** Williamson Matrices Up to Order 59 // Designs, Codes and Cryptography. 2008. Vol. 46. Iss. 3. P. 343–352.
13. **Djokovic D. Z.** Williamson Matrices of Order 4n for n = 33; 35; 39 // Discrete Mathematics. 1993. N 115. P. 267–271.
14. **Djokovic D. Z.** Note on Periodic Complementary Sets of Binary Sequences // Designs, Codes and Cryptography. 1998. N 13. P. 251–256.
15. **Golay M. J. E.** Complementary Series // IRE Trans. Inform. Theory. 1961. Vol. IT-7. P. 82–87.
16. **Djokovic D. Z., Kotsireas I. S.** Periodic Golay Pairs of Length 72. arXiv:1409.5969v2 [math.CO] 27 Jan. 2015.
17. **Djokovic D. Z., Kotsireas I. S.** Some New Periodic Golay Pairs // Numerical Algorithms (to appear). doi 10.1007/s11075-014-9910-4. arXiv:1310.5773v2 [math.CO] 27 Aug. 2014.
18. **Eliahou S., Kervaire M., Saffari B.** A New Restriction on the Lengths of Golay Complementary Sequences // Jornal of Combinatorial Theory. Ser. A. 1990. Vol. 55. N 1. P. 49–59.
19. **Arasu K. T., Xiang Q.** On the Existence of Periodic Complementary Binary Sequences // Designs, Codes and Cryptography. 1992. N 2. P. 257–262.
20. **Di Matteo O., Djokovic D. Z., Kotsireas I. S.** Symmetric Hadamard Matrices of Order 116 and 172 Exist. 2015. arXiv:1503.04226.
21. **Djokovic D. Z.** Equivalence Classes and Representatives of Golay Sequences / /Discrete Mathematics. 1998. N 189. P. 79–93.
22. **Djokovic D. Z., Kotsireas I. S.** Compression of Periodic Complementary Sequences and Applications // Designs, Codes and Cryptography. 2015. N 74. P. 365–377.
23. **Craigen R. and Kharaghani H.** Orthogonal Designs, in Handbook of Combinatorial Designs. 2nd ed. / C. J. Colbourn, J. H. Dinitz (eds). Discrete Mathematics and its Applications (Boca Raton). Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2007. P. 280–295.

UDC 519.614
doi:10.15217/issn1684-8853.2015.3.2

Symmetry of Two-Circulant Hadamard Matrices and Periodic Golay Pairs

Balonin N. A.[a], Dr. Sc., Tech., Professor, korbendfs@mail.ru
Djokovic D. Z.[b], PhD, Distinguished Professor Emeritus, djokovic@uwaterloo.ca
[a]Saint-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, Saint-Petersburg, Russian Federation
[b]University of Waterloo, Department of Pure Mathematics and Institute for Quantum Computing, Waterloo, Ontario, N2L 3G1, Canada

Purpose: Construction of Hadamard matrices of two-circulant type. The role of symmetry and skew-symmetry of the circulant blocks in this construction is investigated systematically. Another goal of this work is to classify the periodic Golay pairs up to length 40. These pairs are closely related to the above mentioned construction. **Methods:** Computational methods of linear algebra, recursive methods of optimum search, exhaustive search to construct all periodic Golay pairs of a fixed length by using high-performance computers. **Results:** The paper discusses the problem of constructing Hadamard matrices of two-circulant type by introducing certain measures of symmetry (symmetry index, defects of symmetry and skew-symmetry) and enumerates the equivalence classes of periodic Golay pairs of small lengths. An analog of the Ryser's conjecture, the non-existence of circulant Hadamard matrices of order bigger than 4, has been proposed earlier by the first author. It asserts that there are no symmetric Hadamard matrices of two-circulant type and of order bigger than 32. The latter conjecture is verified in several cases by using a computer. A catalogue of the representatives of equivalence classes of two-circulant Hadamard matrices is presented in the form of a list of periodic Golay pairs of lengths up to 26 (inclusive). Examples of nearly symmetric two-circulant Hadamard matrices of relatively large order are given. **Practical relevance:** Hadamard matrices have direct practical applications to the problems of noise-immune coding and compression and masking of video information. Software for constructing two-circulant Hadamard matrices and a library of periodic Golay pairs, together with the online algorithms, are made available on the mathematical network http://mathscinet.ru.

Keywords — Orthogonal Matrices, Hadamard Matrices, Ryser's Conjecture, Circulant Matrices, Two-Circulant Matrices, Periodic Golay Pairs.

References

1. Hadamard J. Résolution d'une Question Relative aux Déterminants. *Bulletin des Sciences Mathematiques*, 1893, vol. 17, pp. 240–246 (In French).
2. Silvester J. J. Thoughts on Inverse Orthogonal Matrices, Simultaneous Sign Successions, and Tessellated Pavements in Two or More Colours, with Applications to Newton's Rule, Ornamental Tile-Work, and the Theory of Numbers. *Philosophical Magazine*, 1867, vol. 34, pp. 461–475.
3. Scarpis U. Sui Determinanti di Valore Massimo. *Rendiconti della R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere*, 1898, vol. 31, pp. 1441–1446 (In Italian).
4. Paley R. E. A. C. On Orthogonal Matrices. *J. of Mathematics and Physics*, 1933, vol. 12, pp. 311–320.
5. Balonin N. A., Sergeev M. B. Local Maximum Determinant Matrices. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2014, no. 1(68), pp. 2–15 (In Russian).
6. Balonin N. A., Sergeev M. B. On the Issue of Existence of Hadamard and Mersenne Matrices. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2013, no. 5(66), pp. 2–8 (In Russian).
7. Ryser H. J. *Combinatorial Mathematics*. The Carus Mathematical Monographs, no. 14, Published by The Mathematical Association of America. New York, John Wiley and Sons, 1963. 162 p.
8. Lint van J. H., and Wilson R. M. *A Course in Combinatorics*. Cambridge Univ. Press, 1992, ch. 18. 602 p.
9. Williamson J. Hadamard's Determinant Theorem and the Sum of Four Squares. *Duke Math. J.*, 1944, vol. 11, no. 1, pp. 65–81. doi:10.1215/S0012-7094-44-01108-7
10. Seberry J., and Yamada M. Hadamard Matrices, Sequences, and Block Designs. *Contemporary Design Theory: A Collection of Surveys.* J. H. Dinitz and D. R. Stinson, eds. John Wiley and Sons, 1992. Pp. 431–560.
11. Balonin N. A. Two Circulant Hadamard Matrices, Mathematical Euler-net "Mathscinet.ru", 2014. Available at: http://mathscinet.ru/catalogue/twocirculanthadamard/index.php (accessed 8 March 2015).
12. Holzmann W. H., Kharaghani H., Tayfeh-Rezaie B. Williamson Matrices Up to Order 59. *Designs, Codes and Cryptography*, 2008, vol. 46, iss. 3, pp. 343–352.
13. Djokovic D. Z. Williamson Matrices of Order 4n for n = 33; 35; 39. *Discrete Mathematics*, 1993, no. 115, pp. 267–271.
14. Djokovic D. Z. Note on Periodic Complementary Sets of Binary Sequences. *Designs, Codes and Cryptography*, 1998, no. 13, pp. 251–256.
15. Golay M. J. E. Complementary Series. *IRE Trans. Inform. Theory*, 1961, vol. IT-7, pp. 82–87.
16. Djokovic D. Z., Kotsireas I. S. Periodic Golay Pairs of Length 72. arXiv:1409.5969v2 [math.CO] 27 Jan. 2015.
17. Djokovic D. Z., Kotsireas I. S. Some New Periodic Golay Pairs. *Numerical Algorithms* (to appear). doi 10.1007/s11075-014-9910-4. arXiv:1310.5773v2 [math.CO] 27 Aug. 2014.
18. Eliahou S., Kervaire M., Saffari B. A New Restriction on the Lengths of Golay Complementary Sequences. *J. Combin. Theory*. Ser. A, 1990, vol. 55, no. 1, pp. 49–59.
19. Arasu K. T., and Xiang Q. On the Existence of Periodic Complementary Binary Sequences. *Designs, Codes and Cryptography*, 1992, no. 2, pp. 257–262.
20. Di Matteo O., Djokovic D. Z., Kotsireas I. S. Symmetric Hadamard Matrices of Order 116 and 172 Exist. 2015. arXiv:1503.04226.
21. Djokovic D. Z. Equivalence Classes and Representatives of Golay Sequences. *Discrete Mathematics*, 1998, no. 189, pp. 79–93.
22. Djokovic D. Z., Kotsireas I. S. Compression of Periodic Complementary Sequences and Applications. *Designs, Codes and Cryptography*, 2015, no. 74, pp. 365–377.
23. Craigen R., and Kharaghani H. *Orthogonal Designs, in Handbook of Combinatorial Designs*. 2nd ed. C. J. Colbourn, J. H. Dinitz (eds). Discrete Mathematics and its Applications (Boca Raton). Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2007. Pp. 280–295.