УДК 519.61 + 517.925
doi:10.31799/1684-8853-2018-6-24-34

Научные статьи
Articles

# Поиск периодических решений обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью метода нормальной формы. Случай уравнений четвертого порядка

***В. Ф. Еднерал***[а, б]*, канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник, доцент, orcid.org/0000-0002-5125-0603, edneral@theory.sinp.msu.ru*
***О. Д. Тимофеевская***[в]*, канд. физ.-мат. наук, доцент, orcid.org/0000-0003-2047-0934*
[а]*НИИ ядерной физики им. Д. В. Скобельцына Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, Ленинские горы, 1(2), Москва, 119991, РФ*
[б]*Российский университет дружбы народов, Миклухо-Маклая ул., 6, Москва, 117198, РФ*
[в]*Физический факультет Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, Ленинские горы, 1(2), Москва, 119991, РФ*

***Постановка проблемы:*** *в основе метода резонансной нормальной формы лежит сведение системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений к более простому виду, исследовать который проще. Более того, для ряда автономных нелинейных задач удается получить в явном виде формулы, аппроксимирующие численные расчеты семейств их периодических решений. Замена численных вычислений их заранее просчитанными формулами ведет к существенной экономии вычислительного времени. Подобные расчеты делались и ранее, однако их точность была недостаточной, а трудоемкость была весьма велика.* ***Цель:*** *применение метода резонансной нормальной формы и разработанного для этих целей программного пакета к системам четвертого порядка для повышения скорости вычислений.* ***Результаты:*** *показано, что при помощи единого алгоритма возможно изучать уравнения высоких порядков (четвертого и более). Сравнение табуляции полученных формул с численными решениями соответствующих уравнений показывает хорошее количественное согласие. К тому же скорость вычислений по заранее подготовленным аппроксимирующим формулам на порядки превосходит скорость численных расчетов. Полученные аппроксимирующие приближения успешно применимы и к неустойчивым решениям. Так, в системе Хенона — Хейлеса периодические решения окружены хаотическими решениями, и при численном интегрировании алгоритмы зачастую на них неустойчивы.* ***Практическая значимость:*** *разработанный подход может быть использован при моделировании физических и биологических систем.*

***Ключевые слова*** *— резонансная нормальная форма, динамические системы, локальные периодические семейства решений, компьютерная алгебра.*

**Цитирование:** Еднерал В. Ф., Тимофеевская О. Д. Поиск периодических решений обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью метода нормальной формы. Случай уравнений четвертого порядка. *Информационно-управляющие системы*, 2018, № 6, с. 24–34. doi:10.31799/1684-8853-2018-6-24-34
**Citation:** Edneral V. F., Timofeevskaya O. D. Normal form method in search for periodic solutions of ordinary differential equations. Case of the fourth order. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2018, no. 6, pp. 24–34 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2018-6-24-34

## Введение

Метод нормальной формы основывается на преобразовании системы обыкновенных дифференциальных уравнений к более простой системе, называемой нормальной формой в окрестности стационарной точки. Системам второго порядка была посвящена работа [1]. На важность этого метода в случае исследования обыкновенных дифференциальных уравнений обратили внимание достаточно давно, см., например, [2] или [3].

Само определение нормальной формы и нормализующего преобразования дается в несколько различающихся формах в общем и специальных случаях. Так, очень развиты приложения для гамильтоновых систем [4–7; 8, ч. 1, 2]. Резонансные и нормальные формы Белицкого исследуются в работах [9; 10, ч. 5, § 20; 11]. Существует немало алгоритмов (и их реализаций) для построения нормальных форм и соответствующих преобразований. Для гамильтонова случая это улучшенный алгоритм Деприи Хори [12] и его символическая алгебраическая реализация в системе REDUCE [13]. Сущность метода численного построения нормальных форм для гамильтонианов описывается в работе [14]. Вопросы сходимости нормализующего преобразования обсуждаются в работах [6, 7, 15, 16]. Что же касается построения нормальной формы в общем случае, мы упомянем здесь (в дополнение к книге А. Д. Брюно [17]) также статьи [18–20].

В настоящей работе мы будем использовать алгоритм, основанный на подходе, который был развит А. Д. Брюно [6, 7, 9, 10, 17] для резонансной нормальной формы. Важным преимуществом этого подхода является возможность исследования широкого класса автономных систем в рамках единой схемы, которая легко поддается алгоритмизации.

В частности, этот подход обеспечивает конструктивный метод получения приближений для локальных семейств периодических и условно периодических решений в форме степенных/фурье-рядов. Мы уделяем особое внимание проблеме сходимости применяемых преобразований, что позволяет надеяться на достаточную точность получаемых приближений. Кроме самих решений, мы можем также найти приближения для начальных условий, которые инициируют такие периодические решения. То есть возможно проводить некоторые элементы фазового анализа.

Другое достоинство используемого подхода состоит в алгоритмической простоте построения нормальной формы и соответствующего преобразования. Мы имеем прямую рекуррентную формулу для этой процедуры, которая не требует хранения большого объема промежуточных результатов. Подход свободен от необходимости решать промежуточные системы уравнений, а также не имеет каких-либо ограничений на случаи резонансов низких порядков.

С помощью предлагаемого метода также возможно получать приближения для непериодических семейств. В этом случае получаемые результаты близки к результатам метода линеаризации Карлемана. Для периодических и условно периодических случаев метод представляет собой обобщение подхода Пуанкаре — Линдстеда.

Исследованию системы шестого порядка Эйлера — Пуассона посвящена работа [21]. Исследованию локальной интегрируемости систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) посвящена работа [22]. Наконец, к серии работ по изучению интегрируемости сильно вырожденной двухмерной системы ОДУ относятся работы [23, 24]. Метод также был применен для вычисления оценок цикличности в планарной кубической системе [25] в связи с шестнадцатой проблемой Гильберта. Завершая это перечисление, следует отметить продуктивность описываемого метода не только для поиска чисто периодических орбит, но и для описания условно периодического движения. Примером может служить работа [26], где построено приближение, описывающее движение двойного маятника. При этом счет по полученным аппроксимирующим формулам опережает соответствующие расчеты по методу Рунге — Кутты в сотни раз.

## Примеры обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка

### Система Хенона — Хейлеса

В работах [27–29] описывается применение метода нормальной формы для построения аналитической аппроксимации всех (включая комплексные) локальных семейств периодических решений в окрестности начала координат для системы уравнений Хенона — Хейлеса. Семейства решений представлены в виде отрезков рядов Фурье с приближенными коэффициентами и частотами, а соответствующие траектории описаны как пересечения гиперповерхностей, которые определены в виде многомерных степенных рядов от значений механической энергии системы. Сравнение численных значений, полученное табулированием приближенных результатов, полученных описанными выше методами, с результатами численной интеграции системы Хенона — Хейлеса демонстрирует хорошее согласование, которого достаточно, чтобы применять эти приближенные решения в инженерных приложениях.

Система уравнений Хенона — Хейлеса первоначально возникла в теории движения частиц в аксиально симметричном гравитационном поле, точнее, из задачи о движении звезд в галактическом поле [30], как простая модель для численных экспериментов. Это система двух дифференциальных уравнений второго порядка

$$\ddot{x} = -x - 2xy;\ \ddot{y} = -y - x^2 + y^2. \tag{1}$$

Она может быть записана как система автономных обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}), \tag{2}$$

где $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$ — векторная функция времени; $\dot{\mathbf{x}} \overset{\text{def}}{=} \mathrm{d}\mathbf{x} / \mathrm{d}t$ — временная производная; $\mathbf{\Phi} = (\Phi_1, ..., \Phi_n)$ — вектор, который является функцией от $\mathbf{x}$ и, возможно, каких-то параметров, как гамильтонова система уравнений с функцией Гамильтона

$$H = \frac{1}{2}[(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + x^2 + y^2] + x^2 y - \frac{1}{3}y^3. \tag{3}$$

Линейная замена переменных

$$x = y_1 + y_3,\ \dot{x} = -i(y_1 - y_3);$$
$$y = y_2 + y_4,\ \dot{y} = -i(y_2 - y_4) \tag{4}$$

преобразует (1) к форме с диагональной линейной частью

$$\dot{y}_i = \lambda_i y_i + \sigma_i y_{i-1} + \tilde{\Phi}_i(\mathbf{y}),\ \sigma_1 = 0,\ i = 1,\ \ldots,\ n, \quad (5)$$

или в переменных системы к виду

$$\begin{gathered}
\dot{y}_1 = -iy_1 - i(y_1 + y_3)(y_2 + y_4); \\
\dot{y}_2 = -iy_2 - \frac{i}{2}[(y_1 + y_3)^2 - (y_2 + y_4)^2]; \\
\dot{y}_3 = iy_3 + i(y_1 + y_3)(y_2 + y_4); \\
\dot{y}_4 = iy_4 + \frac{i}{2}[(y_1 + y_3)^2 - (y_2 + y_4)^2]. \quad (6)
\end{gathered}$$

Собственными значениями этой системы являются две пары комплексно сопряженных мнимых единиц $\Lambda = (-i,\ -i,\ i,\ i)$. Таким образом, это истинно резонансная задача, а это, как известно, самый трудный тип задач для решения методами теории возмущений.

**Нормальная форма системы Хенона — Хейлеса**

Для системы Хенона — Хейлеса (1) отношения всех пар собственных значений равны $\pm 1$, поэтому это резонансный случай низшего порядка. Напомним, что формально условие А выполнено [6], если существует не зависящий от времени и индекса $i$ параметр $\omega$ такой, что нормальная форма системы удовлетворяет уравнениям

$$\begin{aligned}
A = \{\mathbf{z} :\ & \psi_i = \lambda_i z_i \omega,\ \text{если}\ \mathrm{Re}\lambda_i = 0; \\
& z_i = 0,\ \text{если}\ \mathrm{Re}\lambda_i \neq 0;\ i = 1,\ \ldots,\ n\}. \quad (7)
\end{aligned}$$

Если условие А для (1) выполнено, то нормализующее преобразование сходится и решения нормальной формы содержат все локальные для данной неподвижной точки семейства периодических решений. Нормальная форма для системы (6) имеет вид

$$\begin{gathered}
\dot{z}_i = z_i g_i \stackrel{\text{def}}{=} \lambda_i z_i + \\
+ z_i \sum_{\substack{q_i \geq -1, \\ q_1, \ldots, q_{i-1}, q_{i+1}, \ldots, q_4 \geq 0, \\ q_1 + q_2 = q_3 + q_4 > 0}} g_{i, q_1, q_2, q_3, q_4} z_1^{q_1} z_2^{q_2} z_3^{q_3} z_4^{q_4}, \\
i = 1,\ 2,\ 3,\ 4. \quad (8)
\end{gathered}$$

Условие А для (1) определяется системой уравнений (7)

$$\begin{gathered}
\lambda_i z_i \omega = \lambda_i z_i + z_i \sum g_{i, q_1, q_2, q_3, q_4} z_1^{q_1} z_2^{q_2} z_3^{q_3} z_4^{q_4}, \\
i = 1,\ 2,\ 3,\ 4, \quad (9)
\end{gathered}$$

где $\omega$ есть функция $z_1$, ..., $z_4$, которая не зависит от индекса $i$ и времени $t$, но определяется только условием А.

Поиск всех решений системы типа (9) представляет собой независимую задачу решения систем уравнений в кольце формальных степенных рядов. Важно, что при удовлетворении условия А в кольце таких рядов соответствующие решения имеют базис, состоящий из сходящихся рядов. Поэтому и семейства периодических решений (9) могут быть выражены в терминах сходящихся рядов. Для решения системы типа (9) мы воспользуемся простой факторизацией.

Поскольку система Хенона — Хейлеса (1) действительна, то в нормальной форме (8) ряды $g_j(\mathbf{z})$ должны удовлетворять условию действительности

$$\begin{gathered}
g_{j+2}(\mathbf{z}) = \bar{g}_j(\mathbf{z}); \\
z_{j+2} = \bar{z}_j, \quad j = 1,\ 2.
\end{gathered}$$

Здесь надчеркивание обозначает процедуру комплексного сопряжения.

Используя программу NORT [24], для системы Хенона — Хейлеса мы получили

$$\begin{gathered}
g_3 = i \cdot \Big[1 - \tfrac{7}{3} z_1 z_3^{-1} z_4^2 + \tfrac{2}{3} z_2 z_4 - \tfrac{5}{3} z_1 z_3 + \\
+ \frac{413}{54} z_3^{-1} z_1 z_2 z_4^3 + \frac{157}{12} z_2^2 z_4^2 - \frac{59}{4} z_1^2 z_4^2 - \\
- \frac{601}{18} z_1 z_2 z_3 z_4 - \frac{403}{108} z_2^2 z_3^2 + \frac{223}{108} z_1^2 z_3^2 + \\
+ \frac{21203}{432} z_1 z_2^2 z_3^{-1} z_4^4 + \frac{67025}{1296} z_1^3 z_3^{-1} z_4^4 + \\
+ \frac{21206}{405} z_2^3 z_4^3 - \frac{22387}{135} z_1^2 z_2 z_4^3 + \frac{67627}{1080} z_1 z_2^2 z_3 z_4^2 - \\
- \frac{20551}{360} z_1^3 z_3 z_4^2 - \frac{3832}{405} z_2^3 z_3^2 z_4 - \frac{4789}{15} z_1^2 z_2 z_3^2 z_4 - \\
- \frac{46313}{2160} z_1 z_2^2 z_3^3 + \frac{102541}{6480} z_1^3 z_3^3 + O(z^8)\Big]; \\
g_4 = i \cdot \Big[1 - \tfrac{5}{3} z_2 z_4 + \tfrac{2}{3} z_1 z_3 - \tfrac{7}{3} z_2 z_3^2 z_4^{-1} - \\
- \frac{785}{108} z_2^2 z_4^2 + \frac{605}{108} z_1^2 z_4^2 + \frac{407}{18} z_1 z_2 z_3 z_4 + \\
+ \frac{53}{4} z_2^2 z_3^2 - \frac{179}{12} z_1^2 z_3^2 - \frac{595}{54} z_1 z_2 z_3^3 z_4^{-1} - \\
- \frac{65495}{1296} z_2^3 z_4^3 + \frac{40139}{432} z_1^2 z_2 z_4^3 + \frac{11291}{135} z_1 z_2^2 z_3 z_4^2 - \\
- \frac{12472}{405} z_1^3 z_3 z_4^2 + \frac{25295}{216} z_2^3 z_3^2 z_4 + \frac{52267}{1080} z_1^2 z_2 z_3^2 z_4 - \\
- \frac{16307}{135} z_1 z_2^2 z_3^3 - \frac{30626}{405} z_1^3 z_3^3 + \frac{77777}{1296} z_2^3 z_3^4 z_4^{-1} - \\
- \frac{130753}{2160} z_1^2 z_2 z_3^4 z_4^{-1} + O(z^8)\Big]. \quad (10)
\end{gathered}$$

Вычисление нормальной формы и нормализующего преобразования для системы Хенона — Хейлеса до 11-го порядка на NORT в рациональной арифметике заняло около 6 секунд на компьютере Pentium-Pro 200 MHz и дало 110 членов нормальной формы, а также 1250 членов нормализующего преобразования. В описываемом здесь примере нормальная форма была вычислена до членов 19-го порядка в рациональной арифметике бесконечной точности. Отметим, что существует значительное различие в скорости вычислений при использовании различных арифметик (с плавающей запятой, длинной целой, модулярной) для обработки численных коэффициентов.

## Локальные семейства периодических решений системы Хенона — Хейлеса в окрестности начала координат

Уравнения (9) могут быть представлены (посредством исключения ω, которое отлично от нуля для нетривиальных решений) в таком виде:

$$P_1 \stackrel{\text{def}}{=} z_1 z_3 \left[ g_1(z) + g_3(z) \right] = 0;$$
$$P_2 \stackrel{\text{def}}{=} z_2 z_4 \left[ g_2(z) + g_4(z) \right] = 0;$$
$$P_3 \stackrel{\text{def}}{=} z_1 z_4 \left[ g_1(z) + g_4(z) \right] = 0;$$
$$P_4 \stackrel{\text{def}}{=} z_2 z_3 \left[ g_2(z) + g_3(z) \right] = 0. \qquad (11)$$

Нахождение всех локальных семейств периодических решений системы (8) эквивалентно определению всех решений системы (11). Для каждого из решений (11) соответствующее семейство решений (8) вследствие (9) имеет вид

$$z_j = c_j \exp(-i\omega t);\ z_{j+2} = c_{j+2} \exp(i\omega t),\ j = 1,\ 2. \qquad (12)$$

Константы $c_j$ — постоянные интегрирования и ω — параметр из (9), который играет роль частоты.

Важно, что для любой обратимой системы оба полинома $P_1$ и $P_2$ в (11) имеют одинаковый множитель [9; 10, гл. 5, §10]

$$P_1(\mathbf{z}) = (z_1^r z_4^s - z_2^r z_3^s) Q_1(\mathbf{z});$$
$$P_2(\mathbf{z}) = (z_1^r z_4^s - z_2^r z_3^s) Q_2(\mathbf{z}),$$

где $r$ и $s$ — наименьшие натуральные целые, удовлетворяющие уравнению $\lambda_1 r - \lambda_2 s = 0$.

Система Хенона — Хейлеса обратима и имеет $s = r = 1$, но благодаря дополнительной симметрии из (10) и (11) можно найти, что

$$P_1 = \alpha(z_1^2 z_4^2 - z_2^2 z_3^2)\left[1 + \tfrac{85}{18} z_1 z_3 - \tfrac{59}{18} z_2 z_4 + O(z^4)\right];$$
$$P_2 = -\alpha(z_1^2 z_4^2 - z_2^2 z_3^2)\left[1 + O(z^2)\right], \qquad (13)$$

где $\alpha \neq 0$ — числовая константа, а последние множители имеют ненулевые постоянные члены, т. е. они не могут давать вклад ни в какое дополнительное семейство решений (напомним, что мы интересуемся решениями, которые включают стационарную точку $\mathbf{z} = 0$). Таким образом, вместо первой пары уравнений в (11) мы имеем лишь одно уравнение

$$z_1^2 z_4^2 - z_2^2 z_3^2 = 0.$$

Уравнение $z_1 z_4 = \pm z_2 z_3$ описывает пару гиперповерхностей

$$h_+ = \{\mathbf{z} : z_1 z_4 = z_2 z_3\} \text{ и } h_- = \{\mathbf{z} : z_1 z_4 = -z_2 z_3\} \qquad (14)$$

соответственно. Для второй пары уравнений в системе (11) имеем:

$$\text{если } z_1 z_4 = z_2 z_3, \text{ тогда } P_3 = \beta z_1 z_4 (3 z_1 z_3 - z_2 z_4) \times$$
$$\times (z_1 z_3 - 3 z_2 z_4)\left[1 + \tfrac{977}{180}(z_1 z_3 + z_2 z_4) + O(z^4)\right];$$
$$P_4 = -\beta z_2 z_3 (3 z_1 z_3 - z_2 z_4)(z_1 z_3 - 3 z_2 z_4)\left[1 + O(z^2)\right];$$
$$\text{если } z_1 z_4 = -z_2 z_3, \text{ тогда}$$
$$P_3 = \gamma z_1 z_4 (z_1 z_3 - z_2 z_4)\left[1 - \tfrac{23}{18} z_1 z_3 + \tfrac{49}{18} z_2 z_4 + O(z^4)\right];$$
$$P_4 = -\gamma z_2 z_3 (z_1 z_3 - z_2 z_4)\left[1 + O(z^2)\right],$$

где β и γ — численные константы, не равные нулю.

Определим также гиперповерхности

$$h_a = \{\mathbf{z} : 3 z_1 z_3 = z_2 z_4\};$$
$$h_b = \{\mathbf{z} : z_1 z_3 = 3 z_2 z_4\};$$
$$h_c = \{\mathbf{z} : z_1 z_3 = z_2 z_4\};$$
$$h_i = \{\mathbf{z} : z_i = 0\}, \quad i = 1,\ 2,\ 3,\ 4. \qquad (15)$$

Таким образом, имеется две ветви решений уравнений (11), которые соответствуют пересечению $h_+ \cap h_a$ и $h_+ \cap h_b$, и одна ветвь, соответствующая пересечению $h_- \cap h_c$. Еще две ветви решений соответствуют пересечению гиперповерхностей $h_1 \cap h_2$ и $h_3 \cap h_4$.

Имеется также пара ветвей, которая соответствует комплексно сопряженным семействам решений с нулевой энергией и единичной частотой ω. Первая ветвь — это $h_1 \cap h_3$, а вторая ветвь — $h_2 \cap h_4$. Перечисленные ветви исчерпывают все возможные локальные семейства периодических решений уравнений (6) через подстановки (12), константы связи $c_j$ и вычисление соответствующих частот ω в виде рядов от этих констант.

Эти семь ветвей решений системы уравнений (11) порождают 10 различных локальных семейств периодических решений системы (1) с четырьмя различными частотами [см. (17) ниже]:

$$\text{семейства 1 и 1}' \ (h_+ \cap h_a):\ z_1 z_4 = z_2 z_3,\ 3 z_1 z_3 = z_2 z_4;$$
$$\text{семейства 2 и 2}' \ (h_+ \cap h_b):\ z_1 z_4 = z_2 z_3,\ z_1 z_3 = 3 z_2 z_4;$$
$$\text{семейства 3 и 3}' \ (h_- \cap h_c):\ z_1 z_4 = -z_2 z_3,\ z_1 z_3 = z_2 z_4;$$
$$\text{семейство 4 } (h_2 \cap h_4):\ z_2 = z_4 = 0;$$
$$\text{семейство 5 } (h_1 \cap h_3):\ z_1 = z_3 = 0;$$
$$\text{семейство 6 } (h_1 \cap h_2):\ z_1 = z_2 = 0;$$
$$\text{семейство 7 } (h_3 \cap h_4):\ z_3 = z_4 = 0. \qquad (16)$$

Некоторые из этих семейств были представлены в работе [31]. Причиной дублирования первых трех семейств является симметрия первоначальной системы (1) по отношению к обращению времени. Это обращение изменяет знаки в $\dot{x}$ и $\dot{y}$, таким образом дублируя число семейств. Но обращение времени только переставляет семейства 6 и 7 и эквивалентно тривиальному временному сдвигу для семейств 4 и 5.

Используя представление (12), можно переписать приведенные выше соотношения через константы интегрирования $c_1$, ..., $c_4$, просто заменив там $z_i \to c_i$. Если мы интересуемся семейством действительных решений (6), тогда мы должны выбрать в выражении (12) $c_1 = \overline{c}_3$ и $c_2 = \overline{c}_4$. Однако в резонансном случае требуется больше дополнительных условий, чтобы гарантировать действительность решений. Первая пара уравнений в (11) — это критическое условие действительности резонансных решений, что следует из (12). Так как система (1) автономная, решения содержат обычный фазовый сдвиг, которым можно пренебречь, и тогда все константы могут быть выбраны действительными (или, иногда, чисто мнимыми). После этого каждое решение (16) (кроме существенно комплексных семейств 6 и 7, которые определяются комплексными константами) определяется только тремя из четырех действительных констант $c_i$. Поэтому каждое действительное семейство решений системы (12) зависит от единственной константы.

Используя определенную константу $c_i$, скажем, $c_1$ (для действительных параметрических семейств 1–5), подставим ее в систему (12) и получим соответствующую величину частоты ω в виде ряда по $c_1$ через (9). Чтобы найти соответствующие семейства периодических решений (1) как усеченный ряд по этой постоянной, мы подставим (12) в ранее подсчитанное нормализующее преобразование и в преобразование (4). Наконец, константа $c_1$ может быть зафиксирована подстановкой решения (1) в выражение для энергии $H$ из (3). Энергия (которая не зависит от времени!) тогда представляет собой ряд по одной постоянной (скажем, $c_1$), и обращением этого ряда величина $c_1$ может быть найдена как ряд по степеням энергии, и тогда все другие константы можно исключить. Для действительного случая решения представляются в виде усеченных рядов Фурье.

Это дает приближенные частоты для семейства периодических решений системы (1) как функции механической энергии (3), которые равны

$$\omega_{1,4} = 1 - \frac{5}{6}H + \frac{17}{48}H^2 + \frac{127517}{38880}H^3 + \\ + \frac{51952319}{3732480}H^4 + \frac{1675438657}{111974400}H^5;$$

$$\omega_{2,5} = 1 - \frac{5}{6}H - \frac{95}{48}H^2 - \frac{54935}{7776}H^3 - \\ - \frac{22030445}{746496}H^4 - \frac{200207485}{1492992}H^5;$$

$$\omega_3 = 1 + \frac{1}{3}H - \frac{2}{3}H^2 + \frac{5389}{2430}H^3 - \\ - \frac{52393}{5832}H^4 + \frac{29471957}{729000}H^5;$$

$$\omega_{6,7} = \pm 1, \tag{17}$$

где индексы у ω соответствуют пронумерованным выше ветвям решений. Для каждой частоты соответствующая аппроксимация семейства периодических решений представляет собой ряд Фурье по времени и степенной ряд по $H$, который приводится в работе [31].

Результаты проверялись двумя способами. Первый состоял в прямой подстановке ряда в первоначальные уравнения (1). Результаты содержали только члены пренебрежимо малых порядков. Второй путь состоял в сравнении численного решения $(x_{num}(t), y_{num}(t), \dot{x}_{num}(t), \dot{y}_{num}(t))$ уравнений (1), вычисленного с использованием метода Рунге — Кутты, с табулированием величин приближенных решений $(x_{app}(t), y_{app}(t), \dot{x}_{app}(t), \dot{y}_{app}(t))$, вычисленных с использованием предварительно рассчитанных формул. Решения были вычислены при значениях энергии $H = \frac{1}{24}$, $H = \frac{1}{12}$ и $H = \frac{1}{8}$. Эти значения были взяты из оригинальной работы [30]. Ошибка вычислялась методом относительной среднеквадратической ошибки:

$$f_{err} \stackrel{\text{def}}{=} \max_{t\in[0,2\pi/\omega_i]} \times \\ \times \sqrt{\frac{\left(x_{num}(t)-x_{app}(t)\right)^2+\left(y_{num}(t)-y_{app}(t)\right)^2}{x_{num}^2(t)+y_{num}^2(t)+\dot{x}_{num}^2(t)+\dot{y}_{num}^2(t)} + \frac{\left(\dot{x}_{num}(t)-\dot{x}_{app}(t)\right)^2+\left(\dot{y}_{num}(t)-\dot{y}_{app}(t)\right)^2}{x_{num}^2(t)+y_{num}^2(t)+\dot{x}_{num}^2(t)+\dot{y}_{num}^2(t)}}.$$

Результаты численного сравнения (т. е. величины $f_{err}$) таковы:

| | $H = \frac{1}{24}$: | $H = \frac{1}{12}$: |
|---|---|---|
| для решений с $\omega_1$: | $1{,}3\times10^{-5}$ | $7{,}6\times10^{-4}$; |
| для решений с $\omega_2$: | $4{,}7\times10^{-5}$ | $4{,}4\times10^{-3}$; |
| для решений с $\omega_3$: | $1{,}1\times10^{-5}$ | $5{,}0\times10^{-4}$; |
| для решений с $\omega_4$: | $1{,}3\times10^{-5}$ | $7{,}6\times10^{-4}$; |
| для решений с $\omega_5$: | $2{,}9\times10^{-5}$ | $1{,}8\times10^{-3}$. |

Так как для значения $H = \frac{1}{6}$ система (1) имеет хаотический характер [30], значения $\frac{1}{24}$ и $\frac{1}{12}$ не являются физически малыми. Для значения $H = \frac{1}{8}$ максимальная относительная среднеквадратическая ошибка составляет 10 %.

Мы не проводили численную проверку для семейств 6 и 7, которые относятся к специальному типу. Такие семейства существуют для любой системы, у которой есть по крайней мере одно мнимое собственное значение [32].

Тем же самым образом была исследована обобщенная система Хенона — Хейлеса как случай параметрической системы четвертого порядка [33]. Некоторые семейства периодических решений существуют только при фиксированных величинах параметров системы, а другие семейства существуют в интервале этих величин. Это пример бифуркационного анализа методом нормальной формы. Замечательно, что система имеет дополнительное нетривиальное комплексное семейство периодических решений при некоторой фиксированной величине параметра.

## Еще один пример системы четвертого порядка. Резонансный и нерезонансный случаи

В этом разделе будет изучено семейство локально периодических решений гамильтоновой системы обыкновенных дифференциальных уравнений с кубической нелинейностью [34]. Такая система возникает при рассмотрении проблемы распространения волн на поверхности воды после сведения ее к нормальной форме. Будет найдено локальное семейство периодических решений и продемонстрирована важность специального исследования резонансного поведения при соответствующих значениях параметров.

Давайте рассмотрим систему с гамильтонианом

$$H = x_2 y_1 - x_1 y_2 + \frac{1}{2} y_2^2 + \frac{\alpha}{2} x_1^2 + \frac{\beta}{3} x_1^3 - \frac{1}{4} x_1^4.$$

Это система четырех дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2; \\ \dot{x}_2 &= y_2 - x_1; \\ \dot{y}_1 &= y_2 - \alpha x_1 - \beta x_1^2 + x_1^3; \\ \dot{y}_2 &= -y_1. \end{aligned} \qquad (18)$$

Система обратима по отношению к инволюции: $(x_1, x_2, y_1, y_2) \to (x_1, -x_2, -y_1, y_2)$. Начало координат (0, 0, 0, 0) — стационарная точка, и собственные значения равны

$$\left\{-\sqrt{-1-\sqrt{\alpha}},\ \sqrt{-1-\sqrt{\alpha}},\ -\sqrt{-1+\sqrt{\alpha}},\ \sqrt{-1+\sqrt{\alpha}}\right\}. \quad (19)$$

Ниже мы обсудим случай с положительной $\alpha$, когда мы имеем по крайней мере одну пару мнимых собственных значений.

**Случай $\alpha > 1$**

В этом случае только первая пара собственных значений чисто мнимая:

$$\alpha \to (\omega_0^2 - 1)^2, \quad \omega_0^2 > 2,$$

собственные значения будут равны

$$\left\{-i\omega_0,\ i\omega_0,\ -\sqrt{\omega_0^2 - 2},\ \sqrt{\omega_0^2 - 2}\right\}. \qquad (20)$$

После нормализации получаем систему в новых координатах $(z_1, z_2, z_3, z_4)$:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -i\omega_0 z_1 + z_1 P_1(z_1 \cdot z_2,\ z_3 \cdot z_4) \overset{\text{def}}{=} \psi_1; \\ \dot{z}_2 &= i\omega_0 z_2 + z_2 P_2(z_1 \cdot z_2,\ z_3 \cdot z_4) \overset{\text{def}}{=} \psi_2; \\ \dot{z}_3 &= -\sqrt{\omega_0^2 - 2} z_3 + z_3 P_3(z_1 \cdot z_2,\ z_3 \cdot z_4) \overset{\text{def}}{=} \psi_3; \\ \dot{z}_4 &= \sqrt{\omega_0^2 - 2} z_4 + z_4 P_4(z_1 \cdot z_2,\ z_3 \cdot z_4) \overset{\text{def}}{=} \psi_4. \end{aligned} \qquad (21)$$

Здесь $P_1$, ..., $P_4$ — ряды, вычисленные на MATHEMATICA до третьего порядка по переменным $z_i$. Заметим, что ряды $P_i$ в правой стороне зависят только от произведений $z_1 \cdot z_2$ и $z_3 \cdot z_4$.

Периодичность условий налагает требование, что локальное периодическое семейство решений должно удовлетворять условиям А. Так как имеются ненулевые действительные части в собственных значениях $\lambda_3$, $\lambda_4$, то условие (7) требует, чтобы $z_3 = z_4 = 0$. Но вычисленные величины $P_1$ и $P_2$ таковы, что $P_1(z_1 \cdot z_2,\ 0) = -P_2(z_1 \cdot z_2,\ 0)$, следовательно, видно, что по отношению к (21) произведение $z_1 \cdot z_2$ постоянно, и мы имеем однопараметрическое[1] семейство периодических решений (21)

$$z_1 = \mu \exp(-i \cdot \omega \cdot t);\ \ z_2 = \mu \exp(i \cdot \omega \cdot t);\ \ z_3 = z_4 = 0, \quad (22)$$

где частота $\omega = \omega_0 + i \cdot P_1(\mu^2,\ 0)$; $\mu$ — действительная постоянная. Вычисления дают для низших порядков по $\mu$

$$\omega = \omega_0 + \\ + \mu^2 \frac{\beta^2(20 - 58\omega_0^2) - 9\omega_0^2(\omega_0^2 - 2)(5\omega_0^2 - 2)}{12\omega_0^3(\omega_0^2 - 1)^3(\omega_0^2 - 2)(5\omega_0^2 - 2)} + O(\mu^4). \quad (23)$$

Первый порядок[2] решения для $(x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2)$ (мы получили его, подставляя $z_i$, полученные выше, в нормализующее преобразование) равен

[1] Мы опустили тривиальный временной сдвиг как параметр.

[2] Высшие члены в $\mu$ не приводятся в силу громоздкости.

$$\left(-2\mu\frac{\cos(\omega t)}{\omega_0^2-1},\right.$$
$$\left.2\mu\omega_0\frac{\sin(\omega t)}{\omega_0^2-1},\ 2\mu\omega_0\sin(\omega t),\ 2\mu\cos(\omega t)\right). \qquad (24)$$

Итак, мы имеем два внешних параметра $\left(\alpha=\left(\omega_0^2-1\right)^2 \text{ и } \beta\right)$, один внутренний параметр (постоянную интегрирования $\mu$) и тривиальный временной сдвиг.

**Случай $0 < \alpha < 1$**

В этом случае все собственные значения чисто мнимы, т. е. $\omega_0^2<2$, и собственные значения равны

$$\left\{-i\omega_0,\ i\omega_0,\ -i\sqrt{2-\omega_0^2},\ i\sqrt{2-\omega_0^2}\right\}. \qquad (25)$$

Мы теперь имеем два подслучая: собственные значения не соотносятся как целые числа и резонансный случай.

**Случай, когда собственные значения не соотносятся как целые числа**

Это означает, что дробь $\lambda_1/\lambda_3=\dfrac{\omega_0}{\sqrt{2-\omega_0^2}}$ не является рациональным числом. Нормализованное уравнение не будет иметь ту же самую форму, что и (21), но будет уравнением, все собственные значения которого чисто мнимы. Мы опускаем условно периодический двухчастотный случай. Но периодические семейства могут здесь появиться только если $z_3=z_4=0$ или $z_1=z_2=0$. Если $z_3=z_4=0$, как в случае выше, мы будем иметь ту же самую частоту (23) и то же самое решение (24). Поэтому это семейство существует для $\alpha>0$.

Если $z_1=z_2=0$, мы будем иметь другую частоту

$$\omega=\sqrt{2-\omega_0^2}+$$
$$+\mu^2\frac{\beta^2\left(96-58\omega_0^2\right)-9\omega_0^2\left(\omega_0^2-2\right)\left(5\omega_0^2-8\right)}{12\omega_0^2\left(\omega_0^2-1\right)^3\left(2-\omega_0^2\right)^{3/2}\left(5\omega_0^2-8\right)}+$$
$$+O\left(\mu^4\right) \qquad (26)$$

и первый порядок приближения для решений

$$\left(2\mu\frac{\cos(\omega t)}{\omega_0^2-1},\ -2\mu\sqrt{2-\omega_0^2}\,\frac{\sin(\omega t)}{\omega_0^2-1},\right.$$
$$\left.2\mu\sqrt{2-\omega_0^2}\sin(\omega t),\ 2\mu\cos(\omega t)\right). \qquad (27)$$

В этих выражениях частоты содержат полюса. Имеются полюса при $\omega_0^2=0,\ 2/5,\ 1,\ 2,\ 8/5$. Посмотрим, какие собственные значения соответствуют этим величинам:

$\omega_0^2=0,\ 1,\ 2$ — жорданова матрица в линейной части;

$\omega_0^2=2/5,\ 8/5$ — резонансный случай в линейной части:

$$\{\lambda_i\}=\left\{-i\sqrt{\frac{2}{5}},\ i\sqrt{\frac{2}{5}},\ -2i\sqrt{\frac{2}{5}},\ 2i\sqrt{\frac{2}{5}}\right\}. \qquad (28)$$

Поэтому имеются области в $\omega_0$ (или $\alpha$), где ряды медленно расходятся и могут терять смысл. Это связано с характеристиками линейной части. Мы опустим здесь рассмотрение случая жордановой формы линейной части.

**Резонансный случай**

При $\omega_0^2=2/5,\ 8/5$ все собственные значения сопоставимы. В нашем случае мы имеем резонанс третьего порядка (1:2), т. е. $\lambda_1/\lambda_3=1/2$. Порядок резонанса определяется как сумма числителя и знаменателя этой дроби. После нормализации в этом случае имеем систему

$$\begin{aligned}
\dot z_1 &= -i\sqrt{\frac{2}{5}}z_1+z_1P_1(z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4);\\
\dot z_2 &= \ \ i\sqrt{\frac{2}{5}}z_2+z_2P_2(z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4);\\
\dot z_3 &= -2i\sqrt{\frac{2}{5}}z_3+z_3P_3(z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4);\\
\dot z_4 &= \ \ 2i\sqrt{\frac{2}{5}}z_4+z_4P_4(z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4).
\end{aligned} \qquad (29)$$

Можно выбрать это решение в форме (мы фиксируем ниже тривиальный временной сдвиг, выбирая постоянную $a$ в $z_1$, $z_2$ чисто действительной):

$$\begin{aligned}
&z_1=a\exp(-i\cdot\omega\cdot t),\ \ z_2=a\exp(i\cdot\omega\cdot t);\\
&z_3=(\mu-ic)\exp(-2i\cdot\omega\cdot t);\\
&z_4=(\mu+ic)\exp(2i\cdot\omega\cdot t).
\end{aligned} \qquad (30)$$

После подстановки этих переменных в условие (7) (уравнения здесь те же, что и в работе [27]) получаем соотношение $ac=0$, которое имеет два решения.

*Подслучай $c=0$.* Остаток условия периодичности (7) дает связь между величинами $a$ и $\mu$. Разрешая эту связь, мы получаем частоту

$$\omega=\sqrt{\frac{2}{5}}+$$
$$+\sqrt{\frac{5}{2}}\left(\frac{25}{18}\beta\mu-\frac{125}{6}\mu^2+\frac{30625}{864}\beta^2\mu^2\right)+O(\mu^4). \qquad (31)$$

*Подслучай $a=0$.* Частота

$$\omega=\sqrt{\frac{2}{5}}+\sqrt{\frac{5}{2}}\frac{125}{31104}\mu^2\left(455\beta^2-216\right)+O(\mu^4). \qquad (32)$$

Как видно, у величин частот не возникает сингулярностей при изучении резонанса. Решения также не имеют полюсов. Можно дать следующую общую рекомендацию: следует отдельно изучать резонансы в каждом порядке, который меньше чем порядок нормальной формы, используемой для анализа.

Итак, для локальных семейств периодических решений системы кубических уравнений с двумя внешними параметрами, приведенной выше, можно заключить, что существует две области для каждого параметра. В первой области — одно семейство периодических решений с одним внутренним параметром, для второй области — два семейства с одним внутренним параметром. Показано, что резонансы низших уровней следует изучать отдельно.

## Заключение

Таким образом, при помощи метода нормальных форм построены достаточно точные аппроксимирующие формулы для получения количественных приближений семейств периодических решений автономной системы ОДУ в окрестности нулевой начальной точки. Метод может также успешно применяться для бифуркационного анализа и исследования фазовой картины. Также продемонстрировано, что подобный анализ эффективен лишь если его проводить в окрестности некоторого заранее выбранного резонанса.

Публикация подготовлена при поддержке Программы РУДН «5-100».

## Литература


1. **Еднерал В. Ф., Тимофеевская О. Д.** Поиск периодических решений обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью метода нормальной формы. Ч. I. *Вестник РУДН. Серия: Математика. Информатика. Физика*, 2014, № 3, с. 28–45.
2. **Anosov D. V., Bronshtejn I. U., Aranson Samuel Kh., Arnold V. I., Grines V. Z.** *Dynamical systems I (Encyclopaedia of Mathematical Sciences)*. N. Y., Springer-Verlag, 1988. 237 p.
3. **Guckenheimer J., Holmes P.** Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields. *Applied Mathematical Sciences*, N. Y., Springer-Verlag, 1983. 420 p.
4. **Deprit A.** Canonical transformation depending on a small parameter. *Celestial Mechanics*, 1969, vol. 1, no. 1, pp. 12–30. https://doi.org/10.1007/BF01230629
5. **Hori G. I.** Theory of general perturbations with unspecified canonical variables. *J. Japan Astron. Soc.*, 1966, vol. 18, no. 4, p. 287. Available at: http://adsabs.harvard.edu/abs/1966PASJ...18..287H (accessed 8 August 2018).
6. **Bruno A. D.** Analytical form of differential equations. I. *Trans. Mosc. Mat. Soc.*, 1971, vol. 25, pp. 119–262. Available at: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow = paper&jrnid = mmo&paperid = 256&option_lang = eng (accessed 8 August 2018).
7. **Bruno A. D.** Analytical form of differential equations. II. *Trans. Mosc. Mat. Soc.*, 1972, vol. 26, pp. 199–239. Available at: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml? wshow = paper&jrnid = mmo&paperid = 256&option_lang = eng (accessed 8 August 2018).
8. **Bruno A. D.** *The restricted 3-body problem: plane periodic orbits*. Series: De Gruyter Expositions in Mathematics. Berlin, New York, 1994. 362 p. Available at: https://www.degruyter.com/view/product/137385 (accessed 8 August 2018).
9. **Bruno A. D.** Normal forms. *J. Mathematics and Computers in Simulation*, Elsevier, 1998, vol. 45, pp. 413–427. Available at: https://ideas.repec.org/a/eee/matcom/v45y1998i5p413-427.html (accessed 8 August 2018).
10. **Bruno A. D.** *The power geometry in algebraic and differential equations*. Amsterdam, Elsevier Science (North-Holland), 2000. 395 p.
11. **Bibikov Yu. N.** *Local theory of nonlinear analytic ordinary differential equations*. Series: Lect. Notes Math. Berlin, New York, Springer-Verlag, 1979, vol. 702. 146 p.
12. **Mersman W. A.** A new algorithm for Lie transformation. *Celestial Mechanics*, 1970, vol. 3, no. 1, pp. 81–89. Available at: https://link.springer.com/article/10.1007/BF01230434 (accessed 8 August 2018).
13. **Shevchenko I. I., Sokolsky A. G.** Algorithms for normalization of Hamiltonian systems by means of computer algebra. *Comp. Phys. Comm.*, 1993, vol. 77, no. 1, pp. 11–18. https://doi.org/10.1016/0010-4655(93)90032-8
14. **Godziewski K., Maciejewski A. J.** Normalization algorithms of Hamiltonian near an equilibrium point. *Astrophysics and Space Science*, 1991, vol. 179, no. 1, pp. 1–11. doi:10.1007/BF00642349
15. **Ito H.** Convergence of Birkhoff normal forms for integrable systems. *Comment. Math. Helv.*, 1989, vol. 64, no. 3, pp. 412–461.
16. **Ito H.** Integrability of Hamiltonian systems and Birkhoff normal forms in the simple resonance case. *Math. Ann.*, 1992, vol. 292, no. 1, pp. 411–444. https://doi.org/10.1007/BF01444629
17. **Bruno A. D.** *Local method in nonlinear differential equations*. Springer Series in Soviet Mathematics. Berlin etc., Springer-Verlag, 1989. 348 p.
18. **Walcher S.** On differential equations in normal form. *Math. Ann.*, 1991, vol. 291, pp. 293–314. https://doi.org/10.1007/BF01445209

19. **Walcher S.** On transformations into normal form. *J. Math. Analysis and Appl.*, 1993, vol. 180, pp. 617–632. https://doi.org/10.1006/jmaa.1993.1420
20. **Vallier L.** An algorithm for the computation of normal forms and invariant manifolds. *Proceedings of the 1993 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, Kiev, Ukraine, July 1993, N. Y., ACM Press, ed. by M. Bronstein, 1993, pp. 225–233.
21. **Bruno A. D., Edneral V. F.** On integrability of the Euler — Poisson equations. *Journal of Mathematical Sciences*, 2008, vol. 152, no. 4, pp. 479–489. https://doi.org/10.1007/s10958-008-9085-4
22. **Bruno A. D., Edneral V. F.** Algorithmic analysis of local integrability. *Doklady Mathematics*, 2009, vol. 79, no. 1, pp. 48–52. doi:10.1134/S1064562409010141
23. **Bruno A., Edneral V.** On possibility of additional solutions of the degenerate system near double degeneration at the special value of the parameter. *Proceedings of 15th International Workshop "Computer Algebra in Scientific Computing"*, Lecture Notes in Computer Science, 2013, vol. 8136, pp. 75–87. http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-02297-0
24. **Edneral V. F.** Application of power geometry and normal form methods to the study of nonlinear odes. *EPJ Web of Conferences*, 2018, vol. 173, pp. 01004. https://doi.org/10.1051/epjconf/201817301004
25. **Edneral V. F.** Computer evaluation of cyclicity in planar cubic system. *Proceedings of the ISSAC'97*, Hawaii, USA, July 1997, ed. by W. Küchlin, N. Y., ACM, 1997, pp. 305–309. doi>10.1145/258726.258823
26. **Edneral V. F., Khanin R.** Investigation of the double pendulum system by the normal form method in MATHEMATICA. *Programming and Computer Software*, 2004, vol. 30, no. 2, pp. 115–117. https://doi.org/10.1023/B:PACS.0000021271.80969.ef
27. **Edneral V. F.** Computer generation of normalizing transformation for systems of nonlinear ODE. *Proceedings of the 1993 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, Kiev, Ukraine, July 1993, N. Y., ACM Press, ed. by M. Bronstein, 1993, pp. 14–19.
28. **Edneral V. F.** About normal form method. *Proceedings of the Second Workshop on Computer Algebra in Scientific Computing (CASC'99)*, Munich, Germany, 1999, ed. by Ganzha et al., Springer, 1999, pp. 51–66.
29. **Edneral V. F.** An algorithm for construction of normal forms. *Computer Algebra in Scientific Computing*, Lecture Notes in Computer Science, Springer Berlin Heidelberg, 2007, vol. 4770, pp. 134–142.
30. **Henon M., Heiles C.** The applicability of the third integral of motion: some numerical experiments. *Astronomical J.*, 1964, vol. 69, pp. 73–79. doi:10.1086/109234
31. **Edneral V. F.** A symbolic approximation of periodic solutions of the Henon — Heiles system by the normal form method. *J. Mathematics and Computers in Simulation*, Elsevier, North-Holland, 1998, vol. 45, no. 5-6, pp. 445–463.
32. **Edneral V. F.** Complex periodic solutions of autonomous ODE systems with analytical right sides near an equilibrium point. *Fundamentalnaya i prikladnaya matematika*, 1995, vol. 1, no. 2, pp. 393–398.
33. **Edneral V. F.** Bifurcation analysis of low resonant case of the generalized Henon — Heiles system. *Proceedengs of the Fourth Workshop on Computer Algebra in Scientific Computing (CASC 2001)*, Konstanz, Germany, 2001, ed. by Ganzha et al., Springer-Verlag, Berlin Heidelbedg New York, 2001, pp. 167–176.
34. **Edneral V. F.** Periodic solutions of a cubic ODE system. *Proceedengs of the Fifth Workshop on Computer Algebra in Scientific Computing (CASC 2003)*, Passau, Germany, September 20–26, 2003, ed. by Ganzha et al., Tech. Univ. München, Munich, 2003, pp. 77–80.


UDC 519.61 + 517.925
doi:10.31799/1684-8853-2018-6-24-34

**Normal form method in search for periodic solutions of ordinary differential equations. Case of the fourth order**

V. F. Edneral[a,b], PhD, Phys.-Math., Senior Researcher, Associate Professor, orcid.org/0000-0002-5125-0603, edneral@theory.sinp.msu.ru
O. D. Timofeevskaya[c], PhD, Phys.-Math., Associate Professor, orcid.org/0000-0003-2047-0934
[a]Skobeltsyn Institute of Nuclear Physics of Lomonosov Moscow State University, 1(2), Leninskie gory, 119991, Moscow, Russian Federation
[b]Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), 6, Miklukho-Maklaya St., 117198, Moscow, Russian Federation
[c]Department of Physics, Lomonosov Moscow State University, 1(2), Leninskie gory, 119991, Moscow, Russian Federation

**Introduction:** The method of resonant normal form is based on reducing a system of nonlinear ordinary differential equations to a simpler form, easier to explore. Moreover, for a number of autonomous nonlinear problems, it is possible to obtain explicit formulas which approximate numerical calculations of families of their periodic solutions. Replacing numerical calculations with their precalculated formulas leads to significant savings in computational time. Similar calculations were made earlier, but their accuracy was insufficient, and their complexity was very high. **Purpose:** Application of the resonant normal form method and a software package developed for these purposes to fourth-order systems in order to increase the calculation speed. **Results:** It has been shown that with the help of a single algorithm it is possible to study equations of high orders (4th and higher). Comparing the tabulation of the obtained formulas with the numerical solutions of the corresponding equations shows good quantitative agreement. Moreover, the speed of calculation by prepared approximating formulas is orders of magnitude greater than the numerical calculation speed. The obtained approximations can also be successfully applied to unstable solutions. For example, in the Henon — Heyles system, periodic solutions are surrounded by chaotic solutions and, when numerically integrated, the algorithms are often unstable on them. **Practical relevance:** The developed approach can be used in the simulation of physical and biological systems.

**Keywords** — resonant normal form, dynamic systems, local periodic families of solutions, computer algebra.

**Citation:** Edneral V. F., Timofeevskaya O. D. Normal form method in search for periodic solutions of ordinary differential equations. Case of the fourth order. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2018, no. 6, pp. 24–34 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2018-6-24-34

## References

1. Edneral V. F., Timofeevskaya O. D. Looking for families of periodic solutions of ordinary differential equations systems by normal form method. Part I. *Vestnik RUDN. Seriya: Matematika. Informatika. Fizika* [RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics], 2014, no. 3, pp. 28–45 (In Russian).
2. Anosov D. V., Bronshtejn I. U., Aranson Samuel Kh., Arnold V. I., Grines V. Z. *Dynamical systems I (Encyclopaedia of Mathematical Sciences)*. N. Y., Springer-Verlag, 1988. 237 p.
3. Guckenheimer J., Holmes P. Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields. *Applied Mathematical Sciences*, N. Y., Springer-Verlag, 1983. 420 p.
4. Deprit A. Canonical transformation depending on a small parameter. *Celestial Mechanics*, 1969, vol. 1, no. 1, pp. 12–30. https://doi.org/10.1007/BF01230629
5. Hori G. I. Theory of general perturbations with unspecified canonical variables. *J. Japan Astron. Soc.*, 1966, vol. 18, no. 4, p. 287. Available at: http://adsabs.harvard.edu/abs/1966PASJ...18..287H (accessed 8 August 2018).
6. Bruno A. D. Analytical form of differential equations. I. *Trans. Mosc. Mat. Soc.*, 1971, vol. 25, pp. 119–262. Available at: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=–paper&jrnid=mmo&paperid=256&option_lang=eng (accessed 8 August 2018).
7. Bruno A. D. Analytical form of differential equations. II. *Trans. Mosc. Mat. Soc.*, 1972, vol. 26, pp. 199–239. Available at: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=–paper&jrnid=mmo&paperid=256&option_lang=eng (accessed 8 August 2018).
8. Bruno A. D. *The restricted 3-body problem: plane periodic orbits*. Series: De Gruyter Expositions in Mathematics. Berlin, New York, 1994. 362 p. Available at: https://www.degruyter.com/view/product/137385 (accessed 8 August 2018).
9. Bruno A. D. Normal forms. *J. Mathematics and Computers in Simulation*, Elsevier, 1998, vol. 45, pp. 413–427. Available at: https://ideas.repec.org/a/eee/matcom/v45y1998i5p413-427.html (accessed 8 August 2018).
10. Bruno A. D. *The power geometry in algebraic and differential equations*. Amsterdam, Elsevier Science (North-Holland), 2000. 395 p.
11. Bibikov Yu. N. *Local theory of nonlinear analytic ordinary differential equations*. Series: Lect. Notes Math. Berlin, New York, Springer-Verlag, 1979, vol. 702. 146 p.
12. Mersman W. A. A new algorithm for Lie transformation. *Celestial Mechanics*, 1970, vol. 3, no. 1, pp. 81–89. Available at: https://link.springer.com/article/10.1007/BF01230434 (accessed 8 August 2018).
13. Shevchenko I. I., Sokolsky A. G. Algorithms for normalization of Hamiltonian systems by means of computer algebra. *Comp. Phys. Comm.*, 1993, vol. 77, no. 1, pp. 11–18. https://doi.org/10.1016/0010-4655(93)90032-8
14. Godziewski K., Maciejewski A. J. Normalization algorithms of Hamiltonian near an equilibrium point. *Astrophysics and Space Science*, 1991, vol. 179, no. 1, pp. 1–11. doi:10.1007/BF00642349
15. Ito H. Convergence of Birkhoff normal forms for integrable systems. *Comment. Math. Helv.*, 1989, vol. 64, no. 3, pp. 412–461.
16. Ito H. Integrability of Hamiltonian systems and Birkhoff normal forms in the simple resonance case. *Math. Ann.*, 1992, vol. 292, no. 1, pp. 411–444. https://doi.org/10.1007/BF01444629
17. Bruno A. D. *Local method in nonlinear differential equations*. Springer Series in Soviet Mathematics. Berlin etc., Springer-Verlag, 1989. 348 p.
18. Walcher S. On differential equations in normal form. *Math. Ann.*, 1991, vol. 291, pp. 293–314. https://doi.org/10.1007/BF01445209
19. Walcher S. On transformations into normal form. *J. Math. Analysis and Appl.*, 1993, vol. 180, pp. 617–632. https://doi.org/10.1006/jmaa.1993.1420
20. Vallier L. An algorithm for the computation of normal forms and invariant manifolds. *Proceedings of the 1993 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, Kiev, Ukraine, July 1993, N. Y., ACM Press, ed. by M. Bronstein, 1993, pp. 225–233.
21. Bruno A. D., Edneral V. F. On integrability of the Euler — Poisson equations. *Journal of Mathematical Sciences*, 2008, vol. 152, no. 4, pp. 479–489. https://doi.org/10.1007/s10958-008-9085-4
22. Bruno A. D., Edneral V. F. Algorithmic analysis of local integrability. *Doklady Mathematics*, 2009, vol. 79, no. 1, pp. 48–52. doi:10.1134/S1064562409010141
23. Bruno A., Edneral V. On possibility of additional solutions of the degenerate system near double degeneration at the special value of the parameter. *Proceedings of 15th International Workshop "Computer Algebra in Scientific Computing"*, Lecture Notes in Computer Science, 2013, vol. 8136, pp. 75–87. http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-02297-0
24. Edneral V. F. Application of power geometry and normal form methods to the study of nonlinear odes. *EPJ Web of Conferences*, 2018, vol. 173, pp. 01004. https://doi.org/10.1051/epjconf/201817301004
25. Edneral V. F. Computer evaluation of cyclicity in planar cubic system. *Proceedings of the ISSAC'97*, Hawaii, USA, July 1997, ed. by W. Küchlin, N. Y., ACM, 1997, pp. 305–309. doi>10.1145/258726.258823
26. Edneral V. F., Khanin R. Investigation of the double pendulum system by the normal form method in MATHEMATICA. *Programming and Computer Software*, 2004, vol. 30, no. 2, pp. 115–117. https://doi.org/10.1023/B:PACS.0000021271.80969.ef
27. Edneral V. F. Computer generation of normalizing transformation for systems of nonlinear ODE. *Proceedings of the 1993 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, Kiev, Ukraine, July 1993, N. Y., ACM Press, ed. by M. Bronstein, 1993, pp. 14–19.
28. Edneral V. F. About normal form method. *Proceedings of the Second Workshop on Computer Algebra in Scientific Computing (CASC'99)*, Munich, Germany, 1999, ed. by Ganzha et al., Springer, 1999, pp. 51–66.
29. Edneral V. F. An algorithm for construction of normal forms. *Computer Algebra in Scientific Computing*, Lecture Notes in Computer Science, Springer Berlin Heidelberg, 2007, vol. 4770, pp. 134–142.
30. Henon M., Heiles C. The applicability of the third integral of motion: some numerical experiments. *Astronomical J.*, 1964, vol. 69, pp. 73–79. doi:10.1086/109234
31. Edneral V. F. A symbolic approximation of periodic solutions of the Henon — Heiles system by the normal form method. *J. Mathematics and Computers in Simulation*, Else-

vier, North-Holland, 1998, vol. 45, no. 5-6, pp. 445–463.
32. Edneral V. F. Complex periodic solutions of autonomous ODE systems with analytical right sides near an equilibrium point. *Fundamentalnaya i prikladnaya matematika*, 1995, vol. 1, no. 2, pp. 393–398.
33. Edneral V. F. Bifurcation analysis of low resonant case of the generalized Henon — Heiles system. *Proceedengs of the Fourth Workshop on Computer Algebra in Scientific Computing (CASC 2001)*, Konstanz, Germany, 2001, ed. by Ganzha et al., Springer Verlag, Berlin Heidelbedg New York, 2001, pp. 167–176.
34. Edneral V. F. Periodic solutions of a cubic ODE system. *Proceedengs of the Fifth Workshop on Computer Algebra in Scientific Computing (CASC 2003)*, Passau, Germany, September 20–26, 2003, ed. by Ganzha et al., Tech. Univ. München, Munich, 2003, pp. 77–80.

## Уважаемые авторы!

**При подготовке рукописей статей необходимо руководствоваться следующими рекомендациями.**

Статьи должны содержать изложение новых научных результатов. Название статьи должно быть кратким, но информативным. В названии недопустимо использование сокращений, кроме самых общепринятых (РАН, РФ, САПР и т. п.).

Объем статьи (текст, таблицы, иллюстрации и библиография) не должен превышать эквивалента в 20 страниц, напечатанных на бумаге формата А4 на одной стороне через 1,5 интервала Word шрифтом Times New Roman размером 13, поля не менее двух сантиметров.

Обязательными элементами оформления статьи являются: индекс УДК, заглавие, инициалы и фамилия автора (авторов), ученая степень, звание (при отсутствии — должность), полное название организации, аннотация и ключевые слова на русском и английском языках, электронные адреса авторов, которые по требованию ВАК должны быть опубликованы на страницах журнала. При написании аннотации не используйте аббревиатур и не делайте ссылок на источники в списке литературы. Предоставляйте подрисуночные подписи и названия таблиц на русском и английском языках.

Статьи авторов, не имеющих ученой степени, рекомендуется публиковать в соавторстве с научным руководителем, наличие подписи научного руководителя на рукописи обязательно; в случае самостоятельной публикации обязательно предоставляйте заверенную по месту работы рекомендацию научного руководителя с указанием его фамилии, имени, отчества, места работы, должности, ученого звания, ученой степени — эта информация будет опубликована в ссылке на первой странице.

**Формулы** набирайте в Word, не используя формульный редактор (Mathtype или Equation), при необходимости можно использовать формульный редактор; для набора одной формулы не используйте два редактора; при наборе формул в формульном редакторе знаки препинания, ограничивающие формулу, набирайте вместе с формулой; для установки размера шрифта никогда не пользуйтесь вкладкой Other..., используйте заводские установки редактора, не подгоняйте размер символов в формулах под размер шрифта в тексте статьи, не растягивайте и не сжимайте мышью формулы, вставленные в текст; в формулах не отделяйте пробелами знаки: + = –.

Для набора формул в Word никогда не используйте Конструктор (на верхней панели: «Работа с формулами» — «Конструктор»), так как этот ресурс предназначен только для внутреннего использования в Word и не поддерживается программами, предназначенными для изготовления оригинал-макета журнала.

При наборе символов в тексте помните, что символы, обозначаемые латинскими буквами, набираются светлым курсивом, русскими и греческими — светлым прямым, векторы и матрицы — прямым полужирным шрифтом.

**Иллюстрации** предоставляются отдельными исходными файлами, поддающимися редактированию:

— рисунки, графики, диаграммы, блок-схемы предоставляйте в виде отдельных исходных файлов, поддающихся редактированию, используя векторные программы: Visio (*.vsd, *.vsdx); Coreldraw (*.cdr); Excel (*.xls); Word (*.docx); Adobe Illustrator (*.ai); AutoCad (*.dxf); Matlab (*.ps, *.pdf или экспорт в формат *.ai);

— если редактор, в котором Вы изготавливаете рисунок, не позволяет сохранить в векторном формате, используйте функцию экспорта (только по отношению к исходному рисунку), например, в формат *.ai, *.esp, *.wmf, *.emf, *.svg;

— фото и растровые — в формате *.tif, *.png с максимальным разрешением (не менее 300 pixels/inch).

Наличие подрисуночных подписей обязательно (желательно не повторяющих дословно комментарии к рисункам в тексте статьи).

**В редакцию предоставляются:**

— сведения об авторе (фамилия, имя, отчество, место работы, должность, ученое звание, учебное заведение и год его окончания, ученая степень и год защиты диссертации, область научных интересов, количество научных публикаций, домашний и служебный адреса и телефоны, e-mail), фото авторов: анфас, в темной одежде на белом фоне, должны быть видны плечи и грудь, высокая степень четкости изображения без теней и отблесков на лице, фото можно представить в электронном виде в формате *.tif, *.png с максимальным разрешением — не менее 300 pixels/inch при минимальном размере фото 40×55 мм;

— экспертное заключение.

**Список литературы** составляется по порядку ссылок в тексте и оформляется следующим образом:

— для книг и сборников — фамилия и инициалы авторов, полное название книги (сборника), город, издательство, год, общее количество страниц;

— для журнальных статей — фамилия и инициалы авторов, полное название статьи, название журнала, год издания, номер журнала, номера страниц;

— ссылки на иностранную литературу следует давать на языке оригинала без сокращений;

— при использовании web-материалов указывайте адрес сайта и дату обращения.

Список литературы оформляйте двумя отдельными блоками по образцам lit.dot на сайте журнала (http://i-us.ru/paperrules): Литература и References.

Более подробно правила подготовки текста с образцами изложены на нашем сайте в разделе «Оформление статей».

**Контакты**

Куда: 190000, Санкт-Петербург,
Б. Морская ул., д. 67, ГУАП, РИЦ
Кому: Редакция журнала «Информационно-управляющие системы»
Тел.: (812) 494-70-02
Эл. почта: ius.spb@gmail.com
Сайт: www.i-us.ru