

СИНТЕЗ ДИФФЕРЕНЦИРУЮЩЕГО ФИЛЬТРА С ЛИНЕЙНОЙ ЧАСТОТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ

С. И. Зиатдинов^а, доктор техн. наук, профессор

^аСанкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, Санкт-Петербург, РФ

Цель: разработка высокоточных алгоритмов вычисления производной сигнала для уменьшения ошибок дифференцирования пространственного положения объекта. **Методы:** использование обратного преобразования Фурье применительно к линейной частотной характеристике дифференцирующего фильтра в заданном диапазоне частот. **Результаты:** показано, что известные дифференцирующие устройства, выполненные на базе операционного усилителя с использованием «С-*R*»-цепи, а также дискретные алгоритмы дифференцирования, основанные на разложении в степенной ряд частотной передаточной функции идеального дифференциатора, при ограниченном числе членов ряда не обеспечивают линейной частотной характеристики в широком диапазоне частот. Разработан дифференцирующий фильтр для высокоточного вычисления производной сигнала в широком диапазоне частот от нуля до частоты Найквиста. Получена его импульсная характеристика, позволяющая с использованием интеграла Дюамеля сравнительно легко вычислить выходной сигнал дифференцирующего фильтра при заданном входном воздействии.

Ключевые слова — дифференцирование, импульсная характеристика, ошибки дифференцирования.

Введение

Задача дифференцирования сигналов достаточно часто встречается при построении измерителей линейных и угловых скоростей движения разнообразных объектов; при создании корректирующих устройств в системах автоматического управления, системах стабилизации положения космических аппаратов и т. д. Существующие дифференцирующие устройства на базе простейших «С-*R*» электрических цепей, а также дифференцирующие фильтры с использованием операционных усилителей [1] и дискретные алгоритмы дифференцирования [2] не обладают достаточной линейностью частотной характеристики в широком диапазоне частот. Представляет интерес разработка высокоточных дифференцирующих устройств, позволяющих минимизировать ошибки при измерении скорости перемещения разнообразных объектов.

Сравнительный анализ существующих алгоритмов дифференцирования

Известно [3], что идеальный дифференцирующий фильтр обладает частотной передаточной функцией (ПФ) вида

$$W_{ид}(j\omega) = j\omega = \omega e^{j\frac{\pi}{2}}. \quad (1)$$

При этом амплитудно-частотная (АЧХ) и фазочастотная (ФЧХ) характеристики дифференцирующего фильтра определяются соотношениями

$$W_{ид}(\omega) = |\omega| \text{ и } \varphi(\omega)_{ид} = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \omega > 0; \\ -\frac{\pi}{2}, & \omega < 0. \end{cases}$$

К числу простейших аналоговых непрерывных дифференцирующих фильтров относится «С-*R*»-цепочка, включающая конденсатор и резистор. Частотная ПФ такого дифференцирующего фильтра описывается выражением [1]

$$W(j\omega) = \frac{j\omega\tau}{1 + j\omega\tau}, \quad (2)$$

где $\tau = RC$ — постоянная времени фильтра.

Сопоставляя соотношения (1) и (2), можно заметить, что простейший дифференцирующий фильтр будет обеспечивать относительную линейность АЧХ лишь при $\omega\tau \ll 1$. Данное обстоятельство резко ограничивает дифференцирующие способности простейшего фильтра. При этом существенно уменьшается значение выходного сигнала.

Возможно построение дифференцирующего фильтра с использованием операционного усилителя, у которого во входной цепи установлен конденсатор *C*, а в цепи обратной связи — резистор *R*.

Частотная ПФ такого дифференцирующего фильтра выглядит следующим образом [1]:

$$W(j\omega) = -j\omega RC \frac{1}{1 + j\omega \frac{RC}{K}},$$

где *K* — коэффициент усиления операционного усилителя, который может быть равен нескольким десяткам тысяч. Для идеального операционного усилителя $K = \infty$. Тогда для дифференцирующего фильтра на базе операционного усилителя частотная ПФ принимает вид

$$W(j\omega) = -j\omega RC.$$

На практике такая ПФ реализована быть не может из-за ограничений полосы пропускания

и конечного коэффициента усиления операционного усилителя. Представляет опасность и значительное усиление на достаточно высоких частотах. Это обусловлено тем, что высокочастотные составляющие спектра собственных шумов операционного усилителя после значительного усиления накладываются на полезный продифференцированный сигнал и искажают его.

При использовании ЦВМ для разработки дискретных (или цифровых) алгоритмов дифференцирования воспользуемся оператором задержки на период дискретизации входного сигнала во времени

$$z^{-1} = e^{-j\omega T},$$

где T — период поступления отсчетов (период дискретизации) входного сигнала на дифференцирующий фильтр.

Из данного выражения следует, что $j\omega = \ln z$. Разложение $\ln z$ в степенной ряд дает алгоритм дискретного дифференцирования [2]

$$j\omega = \frac{1}{T} \left[(1 - e^{-j\omega T}) + \frac{1}{2}(1 - e^{-j\omega T})^2 + \frac{1}{3}(1 - e^{-j\omega T})^3 + \dots \right] = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(1 - e^{-j\omega T})^i}{i}. \quad (3)$$

В практических задачах в выражении (3) можно использовать только ограниченное число членов степенного ряда, что приводит к снижению линейности АЧХ дифференцирующего фильтра.

Так, например, при использовании в алгоритме (3) только первого члена степенного ряда для нормированной частоты дифференцируемого гармонического сигнала $\omega T = \pi$ возникает относительная ошибка дифференцирования, равная 36,3 %. При использовании двух первых членов степенного ряда относительная ошибка дифференцирования составляет 27,4 %.

Следует отметить, что при значительном числе учитываемых в (3) членов степенного ряда

в АЧХ дифференцирующего фильтра появляются в определенной области частот недопустимо большие выбросы, что резко снижает линейность АЧХ.

Алгоритмы высокоточного дифференцирования

С учетом вышерассмотренного возникает задача синтеза дифференцирующего фильтра с линейной АЧХ в заданном диапазоне частот. Пусть верхняя частота дифференцируемого сигнала равняется ω_B . Используя выражение (1) для частотной ПФ идеального дифференцирующего фильтра, найдем импульсную характеристику дифференцирующего фильтра с линейной АЧХ в рассматриваемом диапазоне частот:

$$h(t) = \int_{-\omega_B}^{\omega_B} j\omega e^{j\omega T} d\omega = j \int_{-\omega_B}^{\omega_B} \omega \cos(\omega t) d\omega - \int_{-\omega_B}^{\omega_B} \omega \sin(\omega t) d\omega.$$

Первое слагаемое в данном выражении является нечетной функцией частоты, поэтому оно равно нулю. В результате получим

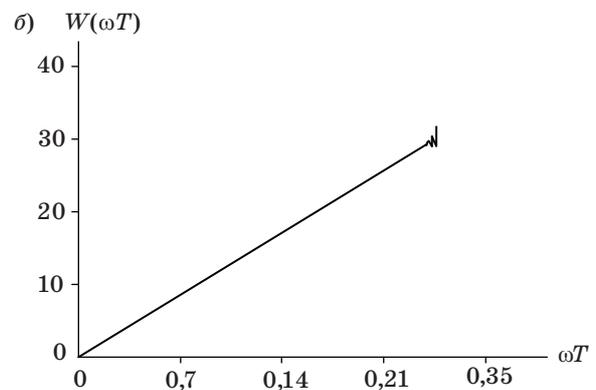
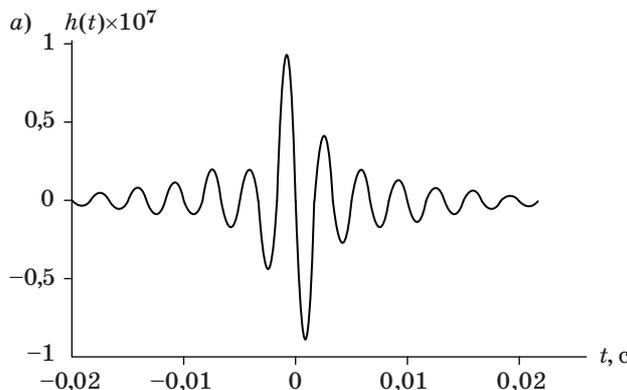
$$h(t) = - \int_{-\omega_B}^{\omega_B} \omega \sin(\omega t) d\omega.$$

Опуская несложные математические выкладки, окончательно запишем

$$h(t) = -\frac{2}{t^2} (\sin \omega_B t - \omega_B t \cos \omega_B t).$$

Импульсная характеристика рассматриваемого дифференцирующего фильтра показана на рисунке, а.

Следует отметить, что синтезированный дифференцирующий фильтр имеет импульсную ха-



■ Импульсная (а) и амплитудно-частотная (б) характеристика дифференцирующего фильтра

рактическую, которая бесконечно длинная как при положительных, так и при отрицательных значениях аргумента. Это так называемые идеальные фильтры, нереализуемые на практике. Этот факт в литературе известен.

Проблема перехода от идеального фильтра к реальному и ее решение обсуждаются в работе [3]. Предлагается в импульсную характеристику $h(t)$ идеального фильтра ввести задержку на величину t_0 . При этом величина импульсной характеристики $h(t - t_0)$ для $t = 0$ должна быть меньше заданной величины, например, $h_i(-t_0)/h_i(0) < 0,01$. Возникающие при этом амплитудные и фазовые искажения являются незначительными.

Вводимая задержка выходного сигнала является абсолютно нормальным явлением для любого реального фильтра с ограниченной верхней частотой АЧХ.

При этом АЧХ синтезированного дифференцирующего фильтра может быть найдена из соотношения

$$W(\omega) = \left| \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt \right|$$

Анализ приведенной АЧХ (рисунок, б) показывает, что дифференцирующий фильтр обладает линейной частотной характеристикой в широком диапазоне нормированных частот $\omega T = 0 \div \pi$.

Заключение

В результате проведенных исследований показано, что простейшие дифференцирующие устройства, в основе которых используются «R-C»-фильтры, дифференцирующие фильтры с операционными усилителями, обладают низкой линейностью частотной характеристики в широком диапазоне частот. Использование дискретных алгоритмов при ограниченном порядке дифференцирующего фильтра также приводит к значительным ошибкам вычисления производной. Синтезированный дифференцирующий фильтр обладает линейной частотной характеристикой и может найти применение в задачах построения измерителей скоростей перемещения разнообразных объектов, при создании корректирующих фильтров в системах автоматического управления, системах управления космическими аппаратами и т. д.

Литература

1. Степаненко И. П. Основы микроэлектроники. — М.: Высш. шк., 2001. — 488 с.
2. Зиятдинов С. И., Осипов Л. А. Проектирование специализированных вычислителей цифровой обработки сигналов. — СПб.: ГУАП, 2006. — 74 с.
3. Сергиенко А. В. Цифровая обработка сигналов. — СПб.: Питер, 2002. — 608 с.

UDC 621.372

doi:10.15217/issn1684-8853.2015.4.119

Synthesis of the Differentiated Filter with Linear Frequency Characteristic

Ziatdinov S. I.^a, Dr. Sc., Tech., Professor, kaf53@guap.ru

^aSaint-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, 67, B. Morskaya St., Saint-Petersburg, Russian Federation

Purpose: The goal of the research is developing high-precision algorithms for the signal derivative calculation to minimize the mistakes in the differentiation of the object position. **Method:** Inverse Fourier transformation was applied to the linear frequency characteristic of the differentiating filter in the given frequency range. **Results:** It is shown that the existing differentiating devices based on an operation amplifier with a "C-R" chain, and the discrete differentiation algorithms based on a power series expansion of the frequency transmission function of an ideal differentiator with a limited number of the series members do not provide a linear frequency characteristic in a wide range of frequencies. A differentiating filter is developed for high-precision calculation of the signal derivative in a wide range from zero to Naives frequency. Its impulse response is obtained. Duhamel integral helps to relatively easily calculate the output signal of the differentiating filter for a given input.

Keywords — Differentiation, Impulse Response, Differentiation Mistakes.

References

1. Stepaneko I. P. *Osnovy mikroelektroniki* [Fundamentals of Microelectronics]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 2001. 488 p. (In Russian).
2. Ziatdinov S. I., Osipov L. A. *Proektirovanie spetsializirovannykh vychislitelei tsifrovoi obrabotki signalov* [De-

signing Specialized Calculators DSP]. Saint-Petersburg, GUAP Publ., 2006. 74 p. (In Russian).

3. Sergienko A. V. *Tsifrovaia obrabotka signalov* [Digital Signal Processing]. Saint-Petersburg, Piter Publ., 2002. 608 p. (In Russian).