

# РАСЧЕТ ОПТИМАЛЬНОГО И РАЦИОНАЛЬНОГО ЧИСЛА ВЕТВЕЙ РАЗНЕСЕНИЯ В КАНАЛАХ СВЯЗИ С АДДИТИВНЫМ БЕЛЫМ ГАУССОВЫМ ШУМОМ И ОБЩИМИ ЗАМИРАНИЯМИ РАЙСА — НАКАГАМИ

Н. В. Савищенко<sup>а</sup>, доктор техн. наук, профессор

О. А. Остроумов<sup>а</sup>, адъюнкт

<sup>а</sup>Военная академия связи им. Маршала Советского Союза С. М. Буденного, Санкт-Петербург, РФ

**Введение:** как правило, в реальных каналах связи присутствуют общие частотно-неселективные замирания, которые традиционно описываются математическими моделями Райса, Релея, Накагами. Для уменьшения влияния замираний в канале связи широкое применение нашел разнесенный прием, заключающийся в объединении на приеме сигналов, поступивших по  $L$  независимым каналам связи с замираниями. **Цель:** оценка помехоустойчивости в канале связи с замираниями при использовании разнесенного приема многопозиционных сигналов и выбор оптимального или рационального количества ветвей разнесения при различных видах разнесения. **Результаты:** представлена математическая модель канала связи с общими замираниями и аддитивным белым гауссовым шумом, предложены точные формулы для расчета вероятностей средней битовой ошибки при когерентном приеме сигналов квадратурной амплитудной модуляции и фазовой модуляции и использовании различных видов разнесенного приема. Проведены расчет энергетического выигрыша от использования различных видов разнесенного приема сигналов квадратурной амплитудной модуляции для однородного канала связи и расчет вероятности средней битовой ошибки для неоднородного канала при пространственном разнесении по двум каналам. Показано, что при большом отношении сигнал/шум  $\gamma_{\text{pc}} \gg 1$  практически отсутствует зависимость энергетических потерь от коэффициента эффективности  $\lambda$  использования мощности передатчика и позиционности сигналов  $M$ . **Практическая значимость:** предложенные методики выбора оптимального и рационального количества ветвей при различных видах разнесенного приема многопозиционных сигналов по критерию минимума вероятности средней битовой ошибки при фиксированном отношении сигнал/шум могут быть использованы при разработке аппаратуры автовыбора ветвей в системах связи с разнесенным приемом.

**Ключевые слова** — разнесенный прием, помехоустойчивость, многопозиционные сигналы, вероятность битовой (символьной) ошибки.

## Введение

Помехи, присутствующие в каналах связи, могут носить различный характер: мультипликативные и аддитивные, межсимвольные и адаптивные, искусственные и естественные, преднамеренные и непреднамеренные и т. д. В данной статье рассмотрено влияние на канал связи общих замираний, возникающих вследствие многолучевого распространения и характеризующихся случайными изменениями коэффициента передачи канала  $\mu$ . Если предположить, что коэффициент передачи практически не меняется на тактовом интервале времени и на разных интервалах времени коэффициенты передачи являются независимыми, то методика вычисления вероятности ошибки в этом случае известна. При этом возникают две частные задачи. Во-первых, необходимо получить точные формулы символьной (битовой) вероятности ошибки приема многопозиционных сигнальных конструкций в канале связи с аддитивным белым гауссовым шумом (АБГШ). Во-вторых, на основе выбранной математической модели замираний — плотности распределения вероятности коэффициента передачи  $\omega(\mu)$  — осуществить интегрирование соответствующих вероятностей ошибок с весовой

функцией  $\omega(\mu)$ . В последнем случае требуется применять именно точные формулы, иначе при использовании, например, верхней аддитивной границы вероятности ошибки возникающая в этом случае вычислительная погрешность будет значительно усложнять анализ реального влияния замираний на помехоустойчивость. В рамках четырехпараметрической гауссовой модели канала для описания общих частотно-неселективных замираний наиболее часто выбирают распределения Релея и Райса, полученные на основе математических методов, отражающих физические свойства каналов связи. Если экспериментальные данные не очень хорошо согласуются с распределениями Релея и Райса, в качестве плотности распределения коэффициента передачи можно воспользоваться распределением Накагами, и тогда задача интегрирования вероятности ошибки, ввиду относительной простоты аналитического выражения для распределения Накагами, значительно упрощается. Более удобным представляется использование распределения Райса — Накагами, частными случаями которого являются распределения Релея, Райса и Накагами.

Известно, что одним из наиболее эффективных способов борьбы с замираниями является

разнесенный прием [1–3]. Он позволяет без увеличения мощности передатчика значительно повысить помехоустойчивость системы связи, однако в этом случае задача интегрирования значительно усложняется, так как фактически для основных методов разнесения необходимо вычислять  $L$ -кратный интеграл. Существуют различные методы разнесенного приема сигналов, которые требуют организации и схем комбинирования нескольких путей передачи (приема) сигналов, называемых ветвями разнесения, или выбора одного из них. В зависимости от системы связи и характера распространения радиоволн различают следующие основные виды разнесенного приема: пространственное, угловое, поляризационное, частотное, временное.

Выбор количества ветвей разнесения может определяться по различным критериям: минимальной стоимости, максимальной помехоустойчивости или помехозащищенности и т. д. В данной статье критерием выбора числа ветвей является минимум средней вероятности битовой ошибки:  $L_{opt} = \arg \min_L P_b(L, \gamma_{bc}^*)$ , где вероятность ошибки в общем случае зависит от отношения сигнал/шум и от параметров, характеризующих замирания.

Проведенный анализ [1] показал, что в зависимости от вида разнесения существует оптимальное количество ветвей разнесения  $L_{opt}$ , при котором достигается  $\min_L P_b(L, \gamma_{bc}^*)$  (частотное

разнесение, реализованное на одном передатчике), либо рациональное количество ветвей разнесения  $L_{ratio}$  (временное разнесение), при котором дальнейшее увеличение числа ветвей не является эффективным, так как приводит лишь к незначительному снижению вероятности ошибки. Исходя из этого практический интерес представляет нахождение  $L_{opt}$  и  $L_{ratio}$  при использовании на передаче сигнальных конструкций, применяемых в современных стандартах связи.

Вопросам оценивания помехоустойчивости и использования разнесенного приема посвящены работы И. С. Андропова, Д. Л. Бураченко, Д. Д. Кловского, Л. М. Финка, М.-S. Alouini, N. С. Beaulieu, G. K. Karagiannidis, M. K. Simon и др. [2–5].

Для определения  $L_{opt}$  и  $L_{ratio}$  необходимо разработать методику оценки помехоустойчивости при разнесенном приеме многопозиционных сигналов в канале связи с АБГШ и общими замираниями.

Для достижения поставленной цели необходимо решить ряд частных задач:

1) получить аналитические выражения для вероятности символьной (битовой) ошибки в канале связи с АБГШ и общими замираниями при разнесенном приеме;

2) разработать методику выбора оптимального (рационального) количества ветвей разнесения;

3) используя полученную методику, определить  $L_{opt}$  и  $L_{ratio}$  для различных видов разнесения и отношения сигнал/шум.

### Методика расчета вероятности битовой (символьной) ошибки при разнесенном приеме в канале с общими замираниями

Рассмотрим математическую модель канала связи с разнесенным приемом.

Пусть для передачи информации используется  $M$  сигналов  $s_r(t)$ ,  $t \in [0, T]$ ,  $r = \overline{0, M-1}$ , имеющих конечную энергию и передаваемых на интервале  $T = T_b \log_2 M$ ,  $T_b$  — длительность одного бита. Рассмотрим математическую модель канала связи [1, 6]

$$y_l(t) = \mu_{c,l}(t)s_{r,l}(t) + \mu_{s,l}(t)\widehat{s_{r,l}}(t) + n_l(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

где  $y_l(t)$  — принятый сигнал в  $l$ -й ветви;  $\mu_{c,l}(t)$ ,  $\mu_{s,l}(t)$  — синфазный и квадратурный коэффициенты передачи канала в  $l$ -й ветви,  $l = \overline{1, L}$ ;  $s_{r,l}(t)$  — передаваемый сигнал;  $n_l(t)$  — аддитивная помеха в  $l$ -й ветви, представляющая собой белый гауссовый шум с односторонней спектральной плотностью мощности шума  $N_0/2$ . Для каналов с общими неселективными замираниями коэффициент передачи  $\mu_l(t) = \mu_l$  является случайной величиной.

Для анализа помехоустойчивости сигнальных конструкций при разнесенном приеме воспользуемся следующими предположениями: в каждой ветви разнесения осуществляется однолучевой прием сигналов; число ветвей разнесения  $L \geq 1$ ; величина  $\gamma_0$  есть среднее отношение энергии сигнала к спектральной плотности шума (помехи), которое было бы, если бы тот же передатчик использовался для одиночного приема; для любой ветви разнесения помеха является АБГШ с односторонней спектральной плотностью мощности шума  $N_0/2$  и коэффициентом передачи  $\mu_l$ ,  $l = \overline{1, L}$ ; сигналы во всех ветвях некоррелированы; в каждой ветви разнесения отношение сигнал/шум есть величина  $\gamma_l = E_l/N_l$ ,  $l = \overline{1, L}$ ; для разнесенного приема справедливо соотношение  $\gamma_L = \gamma_0/L^\lambda$ , где  $\gamma_0$  — среднее отношение сигнал/шум в одной отдельной ветви разнесения и  $\lambda \in [0, 2]$  — коэффициент эффективности использования мощности передатчика при разнесенном приеме [1, 6].

Отношение сигнал/шум при оптимальном когерентном приеме и некоррелированной по отдельным ветвям помехи равно сумме всех отношений каждой из ветвей [1, 6]:

$$\gamma_\Sigma = \sum_{l=1}^L \gamma_l = \gamma \sum_{l=1}^L \delta_l^2 = \gamma \Delta_L, \quad 0 \leq \Delta_L \leq L,$$

где  $\delta_l^2 = \frac{\gamma_l}{\gamma_1}$ ,  $\gamma = \gamma_l$ , тогда, если предположить упорядоченность по мощности, справедливо неравенство  $\delta_1^2 \geq \delta_2^2 \geq \dots \geq \delta_L^2$ ,  $\delta_1^2 = 1$ . При переходе от одиночного к разнесенному приему энергетический выигрыш  $\eta_\Sigma^2 = \frac{\gamma_\Sigma}{\gamma_0} = \frac{1}{L^\lambda} \sum_{l=1}^L \delta_l^2$ . Если в канале связи присутствуют замирания, то

$$\gamma_{l,\mu} = \frac{\mu_l^2}{\mu_l^2} \gamma_l, \quad \overline{\mu_l^2} = m_{2,l} = \int_0^\infty \mu_l^2 \omega(\mu_l) d\mu_l, \quad l = \overline{1, L},$$

где  $\omega(\mu)$  — плотность распределения вероятности коэффициента передачи  $\mu_l$  для  $l$ -й ветви.

В теории связи для описания замираний в канале связи наибольшее применение нашли плотности распределения вероятностей Релея, Райса и Накагами [1, 2, 6], поэтому для дальнейших исследований удобно рассмотреть обобщенное распределение Райса — Накагами  $RN(p, \gamma, \beta)$  [6]:

$$\omega(\mu) = \frac{(\beta\mu)^p}{\gamma^{p-1}} \exp\left(-\frac{\gamma^2}{2\beta} - \frac{\beta}{2}\mu^2\right) I_{p-1}(\gamma\mu), \quad (1)$$

включающее в себя, как частный случай, плотности распределения Релея, Райса и Накагами. Введем понятие коэффициента глубины замираний для распределения Райса — Накагами:  $k^2 = \frac{\gamma^2}{2\beta}$ . Плотность распределения Райса — Накагами определяется параметрами  $p, \gamma, \beta, k^2$ : для

распределения Релея  $p = 1, \gamma = 0, \beta = 1/\sigma^2, k^2 = 0$ ; для распределения Райса  $p = 1, \gamma = \mu_0/\sigma^2, \beta = 1/\sigma^2, k^2 = \frac{\mu_0^2}{2\sigma^2}$ ; для распределения Накагами  $p = m, \gamma = 0, \beta = 2m/\mu^2 = 2m/\Omega, k^2 = 0$ .

Полная вероятность ошибки в канале с разнесением и некоррелированными по ветвям замираниями (независимо от вида замираний) имеет вид [1, 5, 6]

$$\overline{P}_{e|b} = \mathbb{E}P_{e|b} = \int_0^{+\infty} \dots \int_0^{+\infty} P_{e|b} \left( \gamma_{bc} \sum_{l=1}^L \delta_l^2 \mu_l^2 / \overline{\mu_l^2} \right) \times \prod_{l=1}^L \omega(\mu_l) d\mu_1 \dots d\mu_L, \quad (2)$$

где  $P_{e|b}$  — вероятность символьной (битовой) ошибки в канале с детерминированными параметрами и белым шумом;  $\mu_l$  — коэффициент передачи в  $l$ -й ветви,  $l = \overline{1, L}$ .

Известно, что вероятность символьной (битовой) ошибки при когерентном приеме в канале с детерминированными параметрами и АБГШ может быть представлена в виде [6]

$$P_{e|b}(\gamma_{bc}) = \sum_k a_k T(\alpha_k \sqrt{\gamma_{bc}}, \eta_k), \quad (3)$$

где  $\alpha_k = \sqrt{2g_k}$ .

Из (2) с учетом (3) следует, что для расчета полной вероятности ошибки в канале связи с разнесением необходимо вычислить интеграл

$$J_L = \int_0^\infty \dots \int_0^\infty T \left( \alpha \sqrt{\gamma_{bc} \sum_{l=1}^L \delta_l^2 \frac{\mu_l^2}{\overline{\mu_l^2}}}, \eta \right) \prod_{l=1}^L \omega(\mu_l) d\mu_1 d\mu_2 \dots d\mu_L = \frac{1}{2\pi} \int_0^\eta \frac{1}{1+x^2} \prod_{l=1}^L \left( \int_0^\infty e^{-\frac{\alpha^2 \gamma_{bc} \delta_l^2 \mu_l^2}{2} \frac{1+x^2}{\mu_l^2}} \omega(\mu_l) d\mu_l \right) dx. \quad (4a)$$

Преобразовав формулу (4a) с учетом (1), получим выражение, по своей структуре похожее на  $H$ -функцию [6]:

$$J_L = H_p((z_L), (b_L), \eta) = \frac{1}{2\pi} \prod_{l=1}^L (1-b_l^2)^p \int_0^\eta \frac{1}{1+x^2} \frac{1}{\prod_{l=1}^L (1+b_l^2 x^2)^p} e^{-\frac{1}{2}(1+x^2) \sum_{l=1}^L \frac{z_l^2}{1+b_l^2 x^2}} dx, \quad (4б)$$

где  $(z_L) = z_1, z_2, \dots, z_L$  и  $(b_L) = b_1, b_2, \dots, b_L$  — специальные векторы;  $b_l^2 = \frac{\alpha^2 \gamma_{bc} \delta_l^2}{\alpha^2 \gamma_{bc} \delta_l^2 + \mu_l^2 \beta_l}$  и  $z_l^2 = \frac{\gamma_l^2}{\beta_l} b_l^2$ .

Если при разнесенном приеме каналы связи однородные, т. е. статические параметры одинаковы:  $b_l^2 = b^2, z_l^2 = z^2, l = \overline{1, L}$ , тогда

$$H_p^{(L)}(z_L, b_L, \eta) = H_{pL}(z\sqrt{L}, b, \eta) \text{ и } H_p^{(1)}(z, b, \eta) = H_p(z, b, \eta),$$

где [6]

$$H_\nu(z, b, \eta) = \frac{(1-b^2)^\nu}{2\pi} \int_0^\eta \frac{1}{1+x^2} \frac{1}{(1+b^2 x^2)^\nu} e^{-\frac{z^2}{2} \frac{1+x^2}{1+b^2 x^2}} dx, \quad \nu \geq 0, 0 \leq b^2 \leq 1, \eta \geq 0. \quad (5)$$

При проведении численных расчетов (5) можно записать в виде

$$H_v(z, b, \eta) = \frac{(1-b^2)^v \operatorname{arctg} \eta}{2\pi} \int_0^{\operatorname{arctg} \eta} \frac{\cos^{2p} t}{(1-(1-b^2)\sin^2 t)^v} e^{-\frac{z^2}{2} \frac{1}{1-(1-b^2)\sin^2 t}} dt.$$

Для численных расчетов  $H$ -функции можно воспользоваться также выражениями, представленными в работе [7].

Полученные соотношения могут быть использованы для произвольных двумерных сигнальных конструкций, однако в дальнейшем ограничимся численными расчетами вероятности ошибки при передаче сигналов многопозиционных фазовой модуляции (ФМ) и квадратурной амплитудной модуляции (КАМ), широко применяемых в современных телекоммуникационных стандартах. Для других сигнальных конструкций расчеты могут быть проведены по формулам вероятностей ошибок [6].

Для сигналов ФМ- $M$ , где  $M \geq 8$ , средняя вероятность битовой ошибки

$$P_b = \frac{1}{K} \sum_{j=1}^{M/4} \left[ \omega_j T \left( \sqrt{2\gamma_{bc} K} \sin \frac{(2j-1)\pi}{M}, \operatorname{ctg} \frac{(2j-1)\pi}{M} \right) + \frac{8}{M} Q \left( \sqrt{2\gamma_{bc} K} \sin \frac{(2j-1)\pi}{M} \right) \right],$$

где  $P_b = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K P_{bi}$  — средняя вероятность битовой ошибки,  $K = \log_2 M$ ;  $\omega_j = \frac{1}{M} \sum_{i=3}^K 2^{i+1} (-1)^{\operatorname{ent} \left( \frac{j-1}{2^{K+1-i}} \right)}$ ;

$T(z, a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^a \frac{1}{1+x^2} e^{-\frac{z^2}{2}(1+x^2)} dx$  — функция Оуэна,  $z \geq 0, a \geq 0$ ;  $Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} dt$  — функция Гаусса.

Для сигналов КАМ- $M$  при  $M = 2^K$  средняя вероятность битовой ошибки рассчитывается по формуле

$$P_b = \frac{1}{K} \sum_{j=1}^{\sqrt{M}-1} a_{2j-1} Q \left( (2j-1) \sqrt{\frac{3 \log_2 M}{M-1} \gamma_{bc}} \right), \quad (6)$$

где, например, при  $M \leq 64$

$$a_1 = 4 \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{M}} \right); \quad a_3 = 4 \left( 1 - \frac{2}{\sqrt{M}} \right); \quad a_5 = -\frac{4}{\sqrt{M}}; \quad a_7 = 0; \quad a_9 = 4 \left( \frac{1}{2} - \frac{3}{\sqrt{M}} \right);$$

$$a_{11} = 4 \left( \frac{1}{2} - \frac{4}{\sqrt{M}} \right); \quad a_{13} = -4 \left( \frac{1}{2} - \frac{3}{\sqrt{M}} \right); \quad a_{15} = -4 \left( \frac{1}{2} - \frac{4}{\sqrt{M}} \right);$$

общая формула для расчета коэффициентов  $a_{2j-1}$  при  $M \geq 4$  представлена в работе [6].

### Результаты расчета вероятности битовой ошибки при пространственном разнесении приеме

Используя вышеприведенные результаты, с учетом (4) и (6) формулу для расчета вероятности битовой ошибки при разнесении приеме сигналов КАМ- $M$  и общих замираниях Райса — Накагами можно записать в виде

$$P_b = \frac{2}{K} \sum_{j=1}^{\sqrt{M}-1} a_{2j-1} H_L \left( \begin{matrix} \sqrt{L} \sqrt{\frac{2k^2 g_{2j-1} \gamma_{bc}}{g_{2j-1} \gamma_{bc} + L^\lambda (k^2 + 1)}}, \\ \sqrt{\frac{g_{2j-1} \gamma_{bc}}{g_{2j-1} \gamma_{bc} + L^\lambda (k^2 + 1)}}, \infty \end{matrix} \right),$$

где  $k^2 \geq 0$  — коэффициент, который характеризует глубину замираний (при  $k^2 \rightarrow \infty$  канал без замираний);  $g_{2j-1} = (2j-1)^2 \frac{3K}{2(M-1)}$ .

Как видно из полученных зависимостей (рис. 1, а, б), увеличение числа ветвей разнесения при коэффициенте использования мощности передатчика  $\lambda = 0$  и общих замираниях в канале связи всегда приводит к повышению помехоустойчивости. Например, при передаче сигналов КАМ-64 в канале с райсовскими замираниями для вероятности ошибки  $P_b = 10^{-5}$  и двух ветвей разнесения обеспечивается энергетический выигрыш порядка 7 дБ, при четырех — 11 дБ, восьми — 14 дБ. На практике обычно используют две-три ветви разнесения, так как увеличение ветвей связано с материальными и техническими затратами, а необходимый выигрыш считается достаточным при небольшом количестве ветвей разнесения. Результаты анализа графиков рис. 1 представлены в табл. 1, где  $\Delta\gamma_{bc*} = \Delta\gamma_{bc}(L) - \Delta\gamma_{bc}(L-1)$  для сигналов КАМ-16 и  $\Delta\gamma_{bc} = \Delta\gamma_{bc}(L) - \Delta\gamma_{bc}(L-1)$  для сигналов КАМ-64.

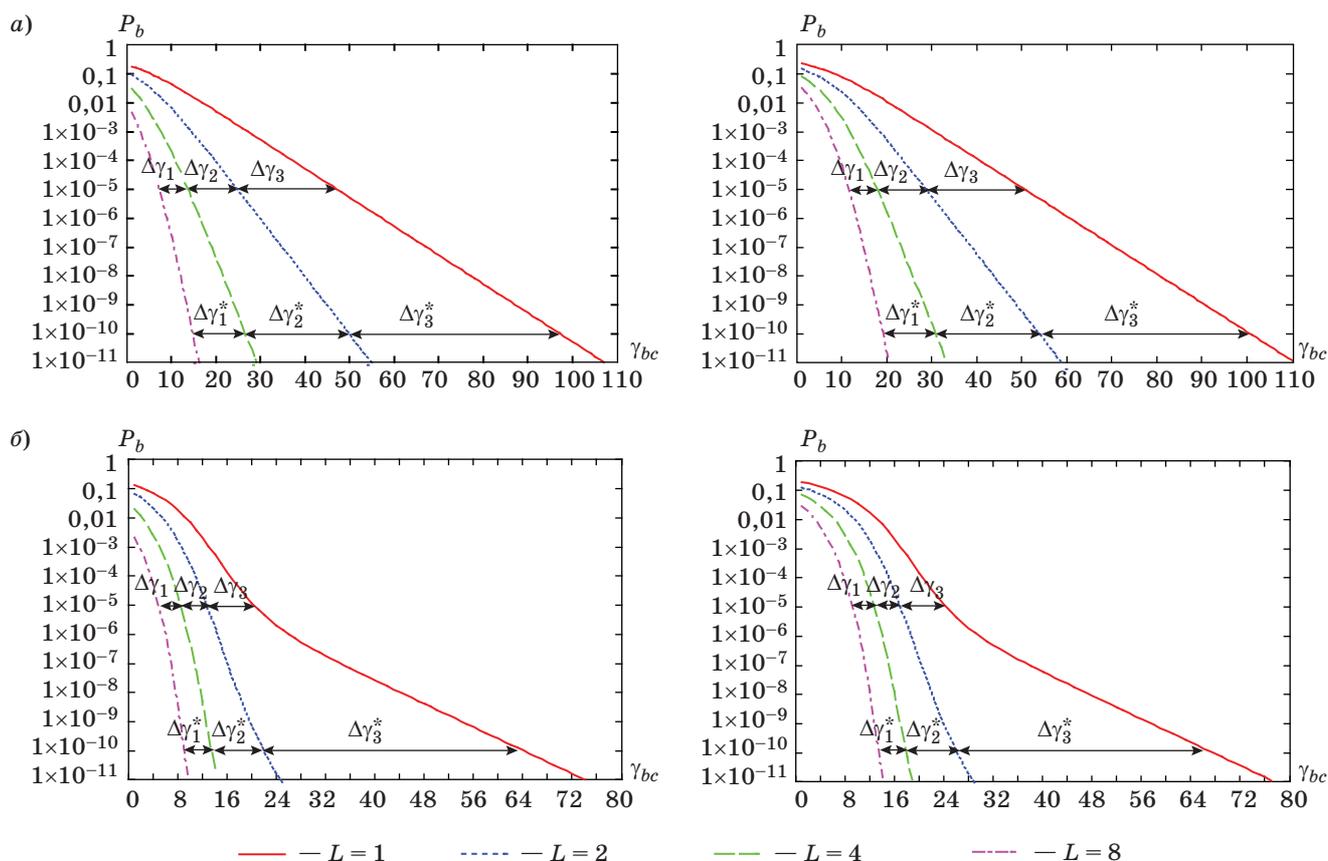


Рис. 1. Зависимость  $P_b(\gamma_{bc})$  при приеме сигналов КАМ-16 (слева) и КАМ-64 (справа) в канале с релейскими при  $k^2 = 0$  (а) и райсовскими при  $k^2 = 10$  (б) замираниями и пространственным разнесением ( $\lambda = 0$ )

Таблица 1. Энергетический выигрыш в канале связи с замираниями и пространственным разнесением

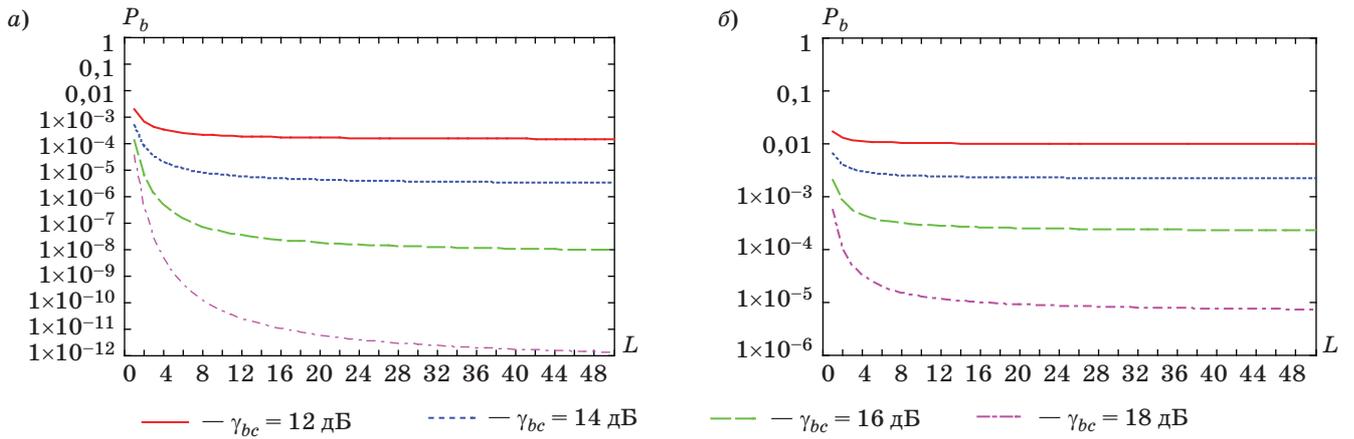
L	$\Delta\gamma_{bc}$ , дБ, для КАМ-16		$\Delta\gamma_{bc}^*$ , дБ, для КАМ-64	
	$P_b = 10^{-5}$	$P_b = 10^{-10}$	$P_b = 10^{-5}$	$P_b = 10^{-10}$
<b>Релейские замирания (<math>k^2 = 0</math>)</b>				
2	22,259271	47,229239	21,831636	46,797711
4	11,104341	23,251425	10,860718	22,985694
8	6,382294	11,75277	6,279525	11,625923
<b>Райсовские замирания (<math>k^2 = 10</math>)</b>				
2	7,60747	42,069467	7,33501	41,361792
4	4,271147	8,419363	4,225982	8,248689
8	3,527448	4,429917	3,512034	4,405172

### Результаты расчета вероятности битовой ошибки при временном разнесении

Используя формулу для вероятности средней битовой ошибки при разнесенном приеме сигналов КАМ-M и общих замираниях Райса — Накагами

$$P_b = \frac{2}{K} \sum_{j=1}^{\sqrt{M}-1} a_{2j-1} H_L \left( \sqrt{L} \sqrt{\frac{2k^2 g_{2j-1} \gamma_{bc}}{g_{2j-1} \gamma_{bc} + L^\lambda (k^2 + 1)}}, \sqrt{\frac{g_{2j-1} \gamma_{bc}}{g_{2j-1} \gamma_{bc} + L^\lambda (k^2 + 1)}}, \infty \right),$$

рассмотрим влияние временного разнесенного приема на помехоустойчивость системы связи.



■ **Рис. 2.** Зависимость  $P_b(L, \lambda)$  при передаче сигналов КАМ-16 (а) и КАМ-64 (б), замираниях Райса ( $k^2 = 10$ ) и временном разнесении ( $\lambda = 1$ )

■ **Таблица 2.** Расчет коэффициента  $\sigma_{\text{порог}}$  для различных  $L$  при передаче сигналов КАМ-64 в канале связи с глубокими райсовскими замираниями ( $k^2 = 10$ ) и временным разнесением

$\gamma_{bc}$ , дБ	$\sigma_{\text{порог}}$						
	$L = 2$	$L = 4$	$L = 6$	$L = 8$	$L = 12$	$L = 15$	$L = 20$
12	0,911475	0,970946	0,985743	0,991559	0,996046	0,997415	0,998514
14	0,827126	0,939192	0,969465	0,981715	0,991341	0,994314	0,996718
16	0,680062	0,874028	0,934203	0,95983	0,980616	0,987179	0,992547
18	0,580773	0,821557	0,904073	0,940589	0,970928	0,980667	0,988703

Зависимости вероятности средней битовой ошибки от количества ветвей при временном разнесении ( $\lambda = 1$ ) представлены на рис. 2, а, б. Для такого вида разнесения найти оптимальное число ветвей (по критерию минимума вероятности средней битовой ошибки) невозможно, так как вероятность ошибки имеет монотонно убывающий характер и при  $L \rightarrow \infty$  асимптотически стремится к вероятности ошибки в канале с АБГШ. Однако в этом случае можно ввести понятие рационального числа ветвей разнесения  $L_{\text{ratio}}$ . Для определения конкретного значения рационального числа ветвей предполагаем, что увеличение числа ветвей сверх этого значения ведет лишь к незначительному повышению помехоустойчивости, а степень повышения помехоустойчивости задается исследователями. Так, например, для сигналов КАМ-64 в табл. 2 представлен расчет степени повышения помехоустойчивости, характеризуемой отношением вероятностей ошибок, т. е. минимальной величиной  $\sigma_{\text{порог}} = P(L + 1, \gamma_{bc})/P(L, \gamma_{bc})$ , удовлетворяющей неравенству  $\sigma_{\text{порог}} > 1 - \varepsilon$ , где  $\varepsilon > 0$  — заданная величина.

Анализ результатов, представленных в табл. 2, показывает, что, например, при  $\varepsilon = 0,1$  и  $\gamma_{bc} = 18$  дБ величина  $\sigma_{\text{порог}} = 0,904073$  и, следовательно,  $L_{\text{ratio}} = 6$ , т. е. можно ограничиться примени-

ем шести ветвей разнесения, и дальнейшее увеличение этого числа будет приводить лишь к незначительному снижению вероятности ошибки. Аналогично можно рассчитать  $\sigma_{\text{порог}}$  для других видов сигналов, используемых в современных телекоммуникационных стандартах.

### Результаты расчета вероятности битовой ошибки при частотном разнесении, реализованном на одном передатчике

В системе с частотным разнесенным приемом, реализованным на одном передатчике (коэффициент  $\lambda = 2$ ) (рис. 3, а, б), существует оптимальное значение числа ветвей, при котором достигается минимум вероятности битовой ошибки:  $L_{\text{opt}} = \arg \min_L P_b(L, \gamma_{bc}^*)$ . Ввиду того, что вероятность ошибки имеет один экстремум и переменная  $L$  является дискретной величиной, задача определения оптимального числа ветвей может быть решена численными методами.

По графикам видно, что, например, в канале с райсовскими замираниями ( $k^2 = 10$ ) для сигналов КАМ-16 (см. рис. 3, б, слева):

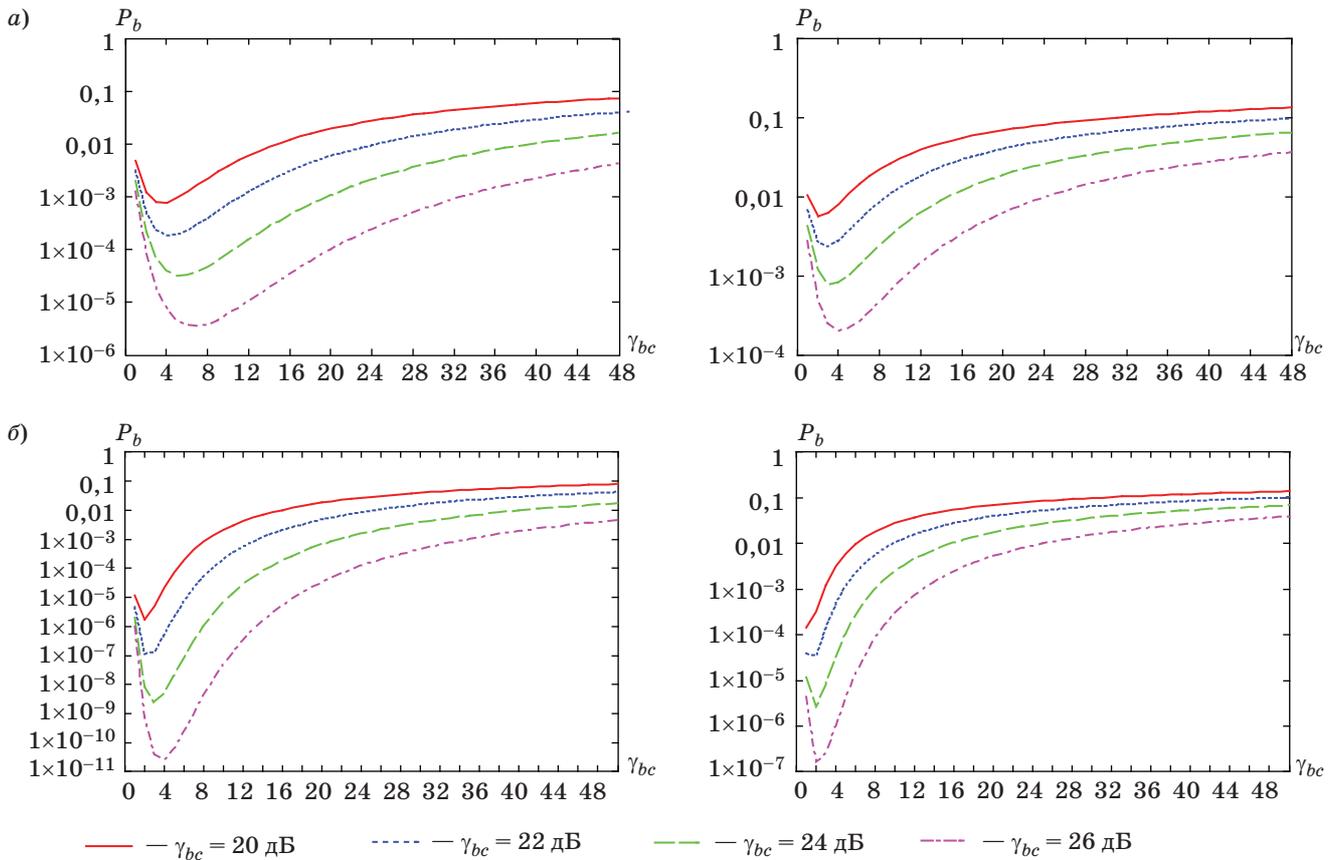
1) при  $\gamma_{bc} = 20$  дБ при использовании двух ветвей вероятность битовой ошибки  $P_b = 1,69788 \cdot 10^{-6}$ , а при трех ветвях  $P_b = 4,95217 \cdot 10^{-6}$ ; при больших

значениях числа ветвей наблюдается снижение помехоустойчивости. Очевидно, что оптимальным будет выбор двух ветвей разнесения. Аналогичная картина для  $\gamma_{bc} = 22$  дБ;

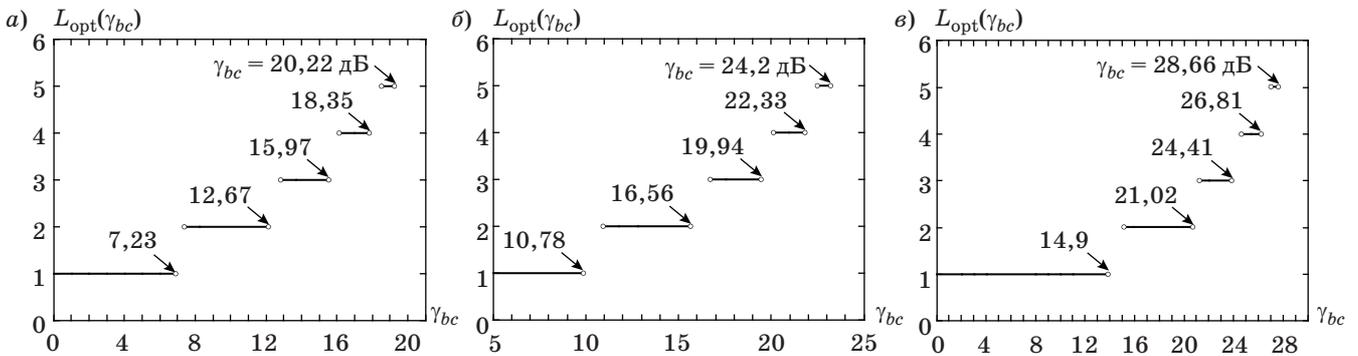
2) при  $\gamma_{bc} = 24$  дБ при использовании двух ветвей вероятность битовой ошибки  $P_b = 7,49155 \cdot 10^{-9}$ , а при трех ветвях  $P_b = 2,32279 \cdot 10^{-9}$ ; при больших значениях числа ветвей наблюдается повышение вероятности ошибки, следовательно, оптимальным будет выбор трех ветвей разнесения;

3) при  $\gamma_{bc} = 26$  дБ при использовании трех ветвей вероятность битовой ошибки  $P_b = 3,65435 \cdot 10^{-11}$ , а при четырех ветвях  $P_b = 2,57744 \cdot 10^{-11}$ , следовательно, оптимальным (по вероятности битовой ошибки) будет выбор четырех ветвей разнесения, так как при больших значениях наблюдается повышение вероятности ошибки.

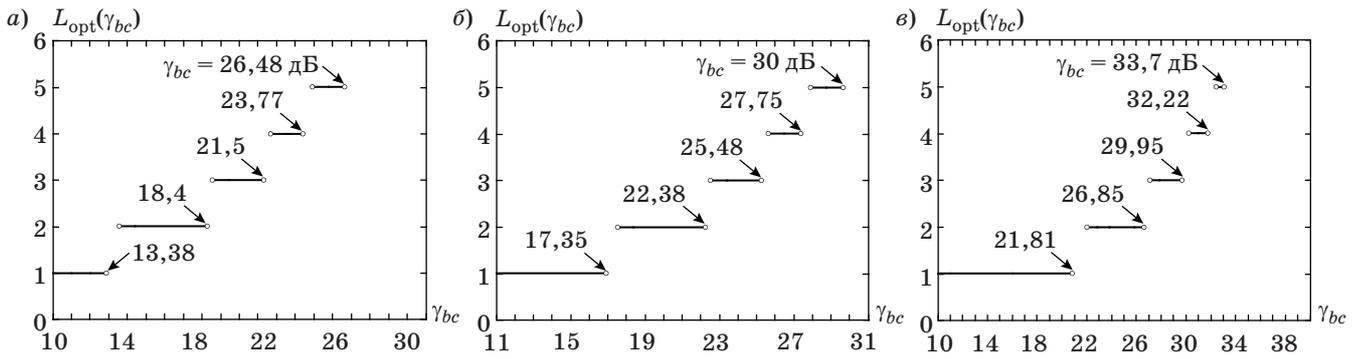
Аналогично рассуждая, можно определить оптимальное количество ветвей разнесения, которое необходимо использовать при передаче сиг-



■ Рис. 3. Зависимость  $P_b(L, \lambda)$  при передаче сигналов КАМ-16 (слева) и КАМ-64 (справа) в канале связи с релейским,  $k^2 = 0$  (а) и глубокими райсовскими,  $k^2 = 10$  (б) замираниями и частотным разнесением при использовании одного передатчика ( $\lambda = 2$ )



■ Рис. 4. Зависимость  $L_{opt}(\gamma_{bc})$  при приеме сигналов КАМ-4 (а), КАМ-16 (б) и КАМ-64 (в) в канале с релейскими замираниями ( $k^2 = 0$ ) и частотном разнесении, реализованном на одном передатчике ( $\lambda = 2$ )



■ Рис. 5. Зависимость  $L_{opt}(\gamma_{bc})$  при приеме сигналов КАМ-4 (а), КАМ-16 (б) и КАМ-64 (в) в канале с райсовскими замираниями ( $k^2 = 10$ ) и частотном разнесении, реализованном на одном передатчике ( $\lambda = 2$ )

налов КАМ-64 (см. рис. 3, а и б, справа) в канале с релейскими и райсовскими замираниями.

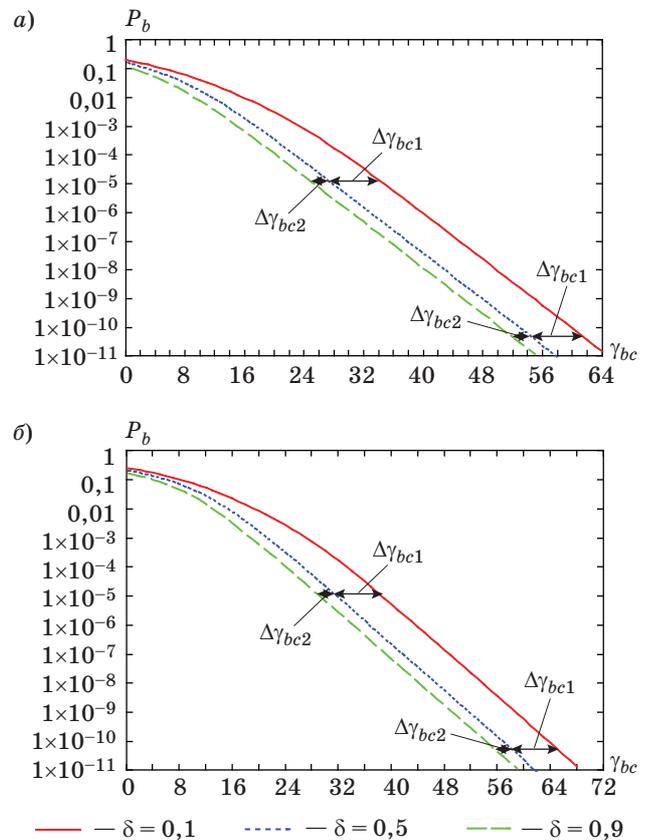
Полезной является зависимость количества ветвей разнесения от отношения сигнал/шум (рис. 4, а-в и 5, а-в), где наглядно можно увидеть, при каком  $\gamma_{bc}$  необходимо увеличивать количество ветвей разнесения, однако данные зависимости не показывают полученную в этом случае вероятность ошибки в канале связи.

Увеличение количества ветвей разнесения может быть связано с повышением стоимости (сложности) аппаратуры связи, что не всегда приемлемо. В зависимости от помеховой ситуации может решаться задача выбора оптимального количества ветвей по критерию минимума вероятности битовой ошибки или рационального количества ветвей, исходя из разумного соотношения необходимой помехоустойчивости, стоимости, массы и др.

**Расчет вероятности битовой ошибки для двояного приема многопозиционных сигналов при различном отношении сигнал/шум  $\gamma_{bc}$  в каждой ветви**

Рассмотрим канал связи с релейскими замираниями ( $k^2 = 0$ ) при двояном приеме ( $L = 2$ ), без ограничения общности, полагая, что  $\delta^2 = \gamma_1/\gamma_2$ . Случай при большем количестве ветвей представляется более сложным для исследования, поэтому ограничимся только двумя ветвями разнесения. Воспользуемся выражением для расчета средней вероятности битовой ошибки [6]

$$P_b = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{1 - \delta^2} \frac{1}{K} \sum_{j=1}^{\sqrt{M}-1} a_{2j-1} \left( \frac{\sqrt{g_{2j-1} \gamma_{bc}}}{\sqrt{g_{2j-1} \gamma_{bc} + 2^\lambda}} - \frac{-\delta^2 \sqrt{g_{2j-1} \gamma_{bc} \delta^2}}{\sqrt{g_{2j-1} \gamma_{bc} \delta^2 + 2^\lambda}} \right) \right)$$



■ Рис. 6. Зависимость  $P_b(\gamma_{bc})$  при передаче сигналов КАМ-16 (а) и КАМ-64 (б) и пространственном разнесении на две ветви ( $\lambda = 0$ )

Как видно из рис. 6, а и б, увеличение параметра  $\delta$  ведет к повышению помехоустойчивости. Энергетические потери при уменьшении  $\delta$  можно оценить, предположив, что  $\gamma_{bc} \gg 1$  и  $\lambda = \text{const}$ , тогда

$$\Delta \gamma_{bc} = 10 \lg \gamma_{bc}^* - 10 \lg \gamma_{bc} \approx 10 \lg \frac{\delta^*}{\delta},$$

где  $\gamma_{bc}^*(\gamma_{bc})$  — отношение сигнал/шум в первой ветви при выборе параметра  $\delta^*(\delta)$ . Напри-

мер, если для вероятности битовой ошибки  $P_b^* = 10^{-10}$  при разнесенном приеме  $\delta^* = 0,9$ , то при снижении  $\delta$  до 0,5 потери будут составлять  $\Delta\gamma_{bc2} = 2,55$  дБ, а при снижении  $\delta$  до 0,1  $\Delta\gamma_{bc2} = 9,54$  дБ. Эти результаты совпадают с полученными по графикам. При снижении  $\delta$  от 0,9 до 0,5 при передаче сигналов КАМ-16  $\Delta\gamma_{bc2} = 2,5527$  дБ, при снижении  $\delta$  до 0,1  $\Delta\gamma_{bc1} = 9,5421$  дБ. При передаче сигналов КАМ-64 снижение  $\delta$  с 0,9 до 0,5 ведет к получению  $\Delta\gamma_{bc2} = 2,5527$  дБ, до 0,1 — к  $\Delta\gamma_{bc1} = 9,542$  дБ.

Увеличение коэффициента мощности передатчика  $\lambda$  и позиционности передаваемого сигнала  $M$  практически не влияет на величину потерь  $\Delta\gamma_{bc}$ .

### Заключение

Получены аналитические соотношения для расчета вероятности ошибки в канале связи с замираниями Райса — Накагами, АБГШ и разнесенным приемом. На основе полученных соотношений проведен численный расчет и определен потенциальный энергетический выигрыш от ис-

пользования пространственного разнесенного приема сигналов КАМ-16 и КАМ-64.

Проведенные исследования показали, что в каналах связи для различных видов разнесения может решаться задача оптимального или рационального выбора количества ветвей.

Так, для разнесения по частоте при использовании одного передатчика можно найти оптимальное число ветвей разнесения по критерию минимума вероятности средней битовой ошибки.

В свою очередь, для временного разнесения выбор оптимального количества ветвей невозможен, поэтому здесь используется понятие рационального количества ветвей.

При использовании разнесенного приема выбор количества ветвей может производиться в зависимости от тех требований, которые предъявляются к системе связи.

Если канал связи неоднородный, то при сдвоенном пространственном разнесенном приеме величина энергетических потерь, связанная с тем, что в разных ветвях отношение сигнал/шум различное, практически не зависит от позиционности используемых сигналов.

### Литература

1. Кловский Д. Д. Передача дискретных сообщений по радиоканалам. — М.: Радио и связь, 1982. — 362 с.
2. Simon K., Alouini M.-S. Digital Communication over Fading Channels: A Unified Approach to Performance Analysis. — N. Y.: John Wiley&Sons, 2000. — 544 p.
3. Савищенко Н. В. и др. Расчет вероятности битовой и символьной ошибок для канала связи, при приеме сигнальных конструкций стандарта DVB-S2/Н. В. Савищенко, О. А. Остроумов, В. С. Кириллов, Д. Д. Капралов, И. Н. Африкантов // Информация и Космос. 2015. № 1. С. 9–15.
4. Бураченко Д. Л., Савищенко Н. В. Геометрические модели сигнально-кодовых конструкций. — СПб.: Военная академия связи, 2012. — 388 с.
5. Андронов И. С., Финк Л. М. Передача дискретных сообщений по параллельным каналам. — М.: Сов. радио, 1971. — 408 с.
6. Savischenko Nikolay V. Special Integral Functions Used in Wireless Communications Theory. — Singapore: World Scientific Publishing Company, 2014. — 600 p.
7. Brychkov Yu. A., Savischenko N. V. A Special Function of Communication Theory // Integral Transforms and Special Functions. 2015. N 26(6). P. 470–484.

UDC 621.39

doi:10.15217/issn1684-8853.2015.6.71

### Calculation of Optimal and Reasonable Number of Diversity Branches in Communication Channels with Additive White Gaussian Noise and Common Rice – Nakagami Fading

Savischenko N. V.<sup>a</sup>, Dr. Sc., Tech., Professor, snikaspb@mail.ru

Ostroumov O. A.<sup>a</sup>, Post-Graduate Student, oleg-26stav@mail.ru

<sup>a</sup>S. M. Budenny Military Academy of Communication, 3, Tikhoretskii Pr., 190064, Saint-Petersburg, Russian Federation

**Purpose:** Real communication channels usually have common frequency nonselective fading, traditionally described by means of the mathematical models by Rice, Rayleigh and Nakagami. Diversity reception (combining signals sent over L independent communication channels with fading) is now widely used to diminish the influence of fading. The purpose of this work is estimating the noise immunity in a communication channel with fading when using diversity reception of multiposition signals and choosing the optimal or reasonable amount of the diversity branches using different kinds of diversity. **Results:** A mathematical model is discussed for a communication channel with common fading and white Gaussian noise. Precise formulas are proposed to calculate the average bit error probability for QAM-M and PSK-M signals using various kinds of diversity reception and coherent reception. The paper contains the calculation of the energy gain from using various kinds of diversity reception of QAM-M signals for a homogeneous communication channel, along with

the calculation of the average bit error probability for an unhomogeneous channel using the space diversity in two channels. It is shown that when  $\text{SNR } \gamma_{bc} \gg 1$  is large, the energy losses actually do not depend on the effectiveness coefficient  $\lambda$  of the transmitter power or on the usage of  $M$  signals. **Practical relevance:** The proposed techniques of choosing the optimal and reasonable amount of branches for various kinds of diversity reception of multiposition signals by minimum average bit error criterion with a fixed SNR can be used for developing automatic branch choice facilities in communication systems with diversity reception.

**Keywords** — Diversity Reception, Noise Immunity, Multiposition Signals, Bit (Symbol) Error Probability.

### References

1. Klovsij D. D. *The Transmission of the Discrete Messages in Radio Channels*. Moscow, Radio i sviaz' Publ., 1982. 362 p. (In Russian).
2. Simon K., Alouini M.-S. *Digital Communication over Fading Channels: A Unified Approach to Performance Analysis*. New York, John Wiley&Sons, 2000. 544 p.
3. Savischenko N. V., Ostroumov O. A., Kirillov V. S., Kapralov D. D., Afrikantov I. N. The Calculation of the Bit and Symbol Errors Possibility for the Communication Channel During DVB-S2 Standard Signal Constructions. *Informatsiia i Kosmos*, 2015, no. 1, pp. 9–15 (In Russian).
4. Byrachenko D. L., Savischenko N. V. *Geometricheskie modeli signal'no-kodovykh konstruksii* [The Geometric Models of the Signal-code Constructions]. Saint-Petersburg, S. M. Budenny Military Academy of Communication Publ., 2012. 388 p. (In Russian).
5. Andronov I. S., Fink L. M. *Peredacha diskretnykh soobshchenii po parallel'nym kanalam* [The Transmission of the Discrete Messages in Paralleled Channels]. Moscow, Sovetskoe radio Publ., 1971. 408 p. (In Russian).
6. Savischenko Nikolay V. *Special Integral Functions Used in Wireless Communications Theory*. Singapore: World Scientific Publishing Company, 2014. 600 p.
7. Brychkov Yu. A., Savischenko N. V. A Special Function of Communication Theory. *Integral Transforms and Special Functions*, 2015, no. 26(6), pp. 470–484.

### ПАМЯТКА ДЛЯ АВТОРОВ

*Поступающие в редакцию статьи проходят обязательное рецензирование.*

При наличии положительной рецензии статья рассматривается редакционной коллегией. Принятая в печать статья направляется автору для согласования редакторских правок. После согласования автор представляет в редакцию окончательный вариант текста статьи.

Процедуры согласования текста статьи могут осуществляться как непосредственно в редакции, так и по e-mail (ius.spb@gmail.com).

При отклонении статьи редакция представляет автору мотивированное заключение и рецензию, при необходимости доработать статью — рецензию. Рукописи не возвращаются.

*Редакция журнала напоминает, что ответственность за достоверность и точность рекламных материалов несут рекламодатели.*