УДК 004.67
doi:10.15217/issn1684-8853.2017.6.2

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МАТРИЦЫ СИММЕТРИЧНЫХ СТРУКТУР ДЛЯ ЗАДАЧ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ ИЗОБРАЖЕНИЙ

А. М. Сергеев[а]*, канд. техн. наук, старший преподаватель*
Н. Ш. Блаунштейн[б, в]*, доктор физ.-мат. наук, профессор*
[а]*Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, Санкт-Петербург, РФ*
[б]*Негевский университет им. Бен-Гуриона, Беэр-Шева, Израиль*
[в]*Иерусалимский технологический институт, Иерусалим, Израиль*

Введение: *во многих задачах обработки и преобразования информации широкое применение находят матрицы с ортогональными столбцами (строками). Для разработчиков систем обработки изображений крайне важно иметь возможность простого выбора оптимального вида структурированных двухуровневых ортогональных матриц.* ***Цель исследования:*** *систематизация основных видов структурированных симметричных матриц Адамара, таких как циклические, негациклические, бициклические, четырехблочные и трехблочные в форме Пропус, которые можно использовать для обработки изображений в задачах сжатия, фильтрации и маскирования.* ***Результаты:*** *расширен базис матриц Адамара квазиортогональными матрицами Мерсенна нечетных порядков со свойствами симметрии. Выявлено, что матрицы Мерсенна и построенные с их помощью матрицы Адамара жестко связаны с числовыми последовательностями, для ряда из которых наблюдается сосуществование циклических, бициклических матриц, а также матриц в форме Пропус. Показано, что использование матриц Мерсенна в качестве «ядра» порождает матрицы Адамара новых симметричных структур, что расширяет классификацию симметричных ортогональных матриц. Приведены «портреты» ранее неизвестных симметричных матриц Адамара.* ***Практическая значимость:*** *полученные результаты дают более широкие возможности в выборе наиболее удачной матрицы для обработки конкретных изображений, в том числе изображений нестандартных размеров. Для всех рассмотренных матриц определено количество матричных фрагментов, достаточных для воспроизведения всей матрицы. Такие экономные представления симметричных матриц Адамара в памяти вычислителя позволяют увеличить эффективность процесса обработки изображений.*

Ключевые слова *— ортогональные матрицы, квазиортогональные матрицы, бициклические матрицы, матрицы Пропус, матрицы Адамара, матрицы Мерсенна, обработка изображений.*

Введение

В задачах обработки и преобразования информации широкое применение находят матрицы с ортогональными столбцами (строками). Такими, например, являются матрицы Адамара (**H**) [1] порядков 1, 2 и $n = 4k$, где k — натуральное число, с двумя значениями элементов (уровнями) {1, –1}. Для них справедливо равенство $\mathbf{H}_n^{\mathrm{T}}\,\mathbf{H}_n = n\mathbf{I}$, где **I** — единичная матрица. Привлекательность матриц Адамара состоит в том, что они имеют всего два значения элементов (два уровня) и алгоритмы вычисления с ними просто реализуемы.

К задачам цифровой обработки изображений с использованием ортогональных матриц относятся, в частности, фильтрация, сжатие, маскирование изображений и видеопоследовательностей, представляемых покадрово [2–7].

В практике применения ортогональных матриц большое значение имеет максимальная простота их структуры, что во многом определяет затраты памяти для хранения матриц или время на их генерацию, если система обработки изображений предполагает такой способ получения матриц.

Среди возможных структур матриц Адамара выделяются симметричные, циклические, негациклические, блочно-симметричные, в форме «ядро с окаймлением» и др.

В настоящей статье рассматриваются основные виды структурированных двухуровневых ортогональных матриц в целях обеспечения для разработчиков систем обработки изображений возможности простого выбора оптимальной из них.

Структуры симметричных ортогональных матриц

Среди структур ортогональных матриц, относящихся к простейшим, можно выделить *симметричные*, обладающие рядом полезных свойств. Название связано с тем, что одинаковые элементы таких матриц расположены симметрично относительно главной диагонали. Для хранения таких матриц требуется $(n^2 + n)/2$ их элементов.

Отметим, что умножение на симметричные матрицы требует меньше операционных затрат [8], поэтому симметрия в целом выгодна как при их хранении, так и при обработке изображений.

Циклические симметричные ортогональные матрицы представляют собой еще более простую структуру, задаваемую первой строкой n ее элементов. Все последующие строки получаются последовательным сдвигом предыдущей вправо с размещением вытесняемого элемента слева. Однако такое строгое ограничение для ортогональных матриц, согласно гипотезе Райзера [9], значительно лимитирует возможность их существования — последняя из циклических симметричных матриц Адамара имеет порядок 4. Очевидно, применение таких матриц весьма ограничено, а вопрос хранения или их вычисления не является для таких порядков принципиальным.

В общем случае циклическая матрица может быть симметрична относительно побочной диагонали. В ряде конструкций это свойство используется для получения симметричных матриц элементарным зеркальным отражением элементов относительно центральной осевой линии. Преимущество такой инверсии элементов очевидно: вместо $(n^2 + n)/2$ элементов симметричной матрицы необходимо хранить лишь n элементов развернутого блока, который дает, помимо экономии памяти, еще и экономию при выполнении умножения на него.

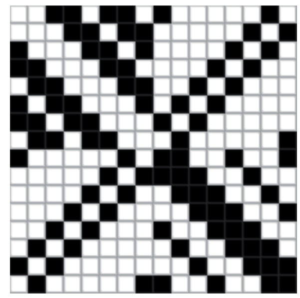
Единого алгоритма прямого построения симметричных матриц Адамара порядка $n = 4k$ не существует. Наибольший интерес представляют симметричные матрицы Адамара в форме *блочно-симметричных* конструкций — матриц со сложными симметриями, состоящих из некоторого набора блоков (матриц меньшего порядка), не обязательно симметричных и ортогональных. Это широкий класс ортогональных матриц Адамара, алгоритмы вычисления которых базируются на схеме Пэли и ее модификациях [10], методе Сильвестра [11], четырехблочных массивах Вильямсона [12], методе Скарпи [13] и др. Указанные алгоритмы позволяют вычислять матрицы Адамара порядков общей последовательности $4k$, но различаемые по внешнему виду — их «портретам» [14], на которых два значения (уровня) элементов представлены клетками разного цвета.

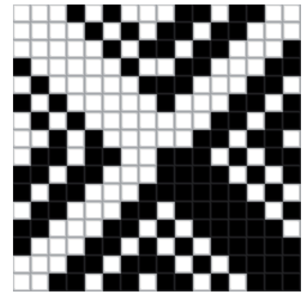
Бициклическая форма характерна для матриц Адамара, получаемых из двух циклических блоков (матриц) $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ в виде

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^{\mathrm{T}} & -\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}$ — транспонированная матрица $\mathbf{B}$, а $-\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ — транспонированная $\mathbf{A}$ с инверсными знаками элементов. Такие матрицы, являясь по конструкции блочно-симметричными, могут одновременно быть и симметричными (рис. 1).

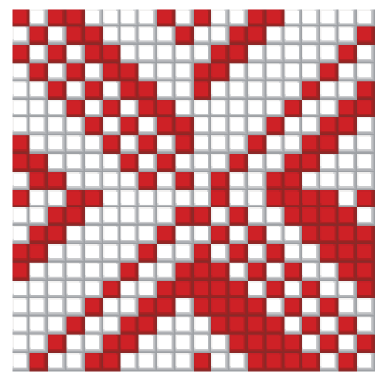
В работе [15] сформулирована гипотеза, расширяющая гипотезу Райзера о существовании симметричных бициклических матриц Адамара порядков не выше 32-го. Для получения симметричных матриц в бициклической форме необходимо хранить только блоки $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, что составит





■ ***Рис. 1.*** Матрицы Адамара $\mathbf{H}_{16}$ с симметричными блоками

■ ***Fig. 1.*** Hadamard matrix $\mathbf{H}_{16}$ containing the symmetrical blocks



■ ***Рис. 2.*** Несимметричная матрица $\mathbf{H}_{20}$ в бициклической форме

■ ***Fig. 2.*** Not symmetrical Matrix $\mathbf{H}_{20}$ in the bicyclic form

половину количества ее элементов $2(n/2)^2$, а в бициклической форме, не принимая во внимание симметрию, потребует только n.

В качестве примера на рис. 2 приведен портрет несимметричной матрицы $\mathbf{H}_{20}$ бициклической формы [16], хотя порядок ее меньше критического $n = 32$. Это подтверждает тот факт, что вращением блоков [15] не всегда можно добиться полной симметрии матрицы, даже если каждый блок сделать симметричным.

Двухблочную конструкцию обобщает четырехблочная, являющаяся комбинацией двух бициклических матриц с блоками $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ в виде массива Вильямсона:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} & \mathbf{D} \\ -\mathbf{B} & \mathbf{A} & -\mathbf{D} & \mathbf{C} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{D} & \mathbf{A} & -\mathbf{B} \\ -\mathbf{D} & -\mathbf{C} & \mathbf{B} & \mathbf{A} \end{pmatrix}.$$

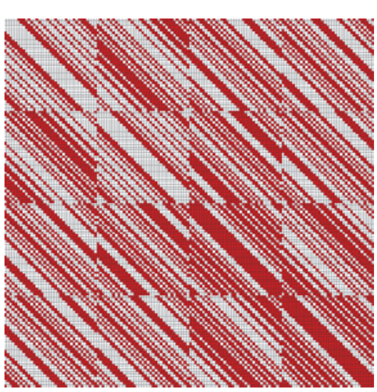
Особенность симметричных четырехблочных конструкций заключается в том, что они могут базироваться как на четырех симметричных, так и несимметричных блоках, дающих в результате симметричную матрицу Адамара. Из работы [17] следует, что не существует, например, симметричных матриц порядка 35 для массива Вильямсона, дающих матрицу $\mathbf{H}_{140}$. Однако такая матрица может быть построена на основе четырех несимметричных циклических блоков. Ее портрет приведен на рис. 3. Для хранения таких симметричных матриц порядка n, если не принимать во внимание цикличность, потребуется $n^2/4$ элементов. Минимальный объем в размере $n^2/8$ элементов потребуется при построении матрицы на основе всех четырех симметричных блоков.

При равенстве блоков **B** и **C** симметричная конструкция матрицы Адамара строится на трех фактических блоках **A**, **B** и **D**. Такие матрицы получили название *матриц Адамара в форме Пропус* (**P**) [18, 19]. Эти матрицы могут быть реализованы в двух конфигурациях $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$ [20], восходящих к перестановкам в массивах Вильямсона и Гетхальса — Зейделя, представленных в виде

$$\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}=\mathbf{C} & \mathbf{C}=\mathbf{B} & \mathbf{D} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} & -\mathbf{A} & -\mathbf{B} \\ \mathbf{B} & -\mathbf{A} & -\mathbf{D} & \mathbf{C} \\ \mathbf{D} & -\mathbf{C} & \mathbf{B} & -\mathbf{A} \end{pmatrix};$$

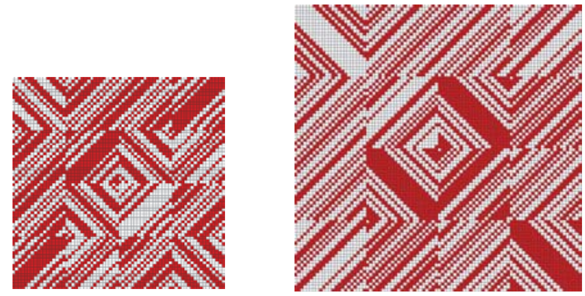
$$\mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{BR} & \mathbf{CR} & \mathbf{DR} \\ \mathbf{CR} & \mathbf{D}^\mathrm{T}\mathbf{R} & -\mathbf{A} & -\mathbf{B}^\mathrm{T}\mathbf{R} \\ \mathbf{BR} & -\mathbf{A} & -\mathbf{D}^\mathrm{T}\mathbf{R} & \mathbf{C}^\mathrm{T}\mathbf{R} \\ \mathbf{DR} & -\mathbf{C}^\mathrm{T}\mathbf{R} & \mathbf{B}^\mathrm{T}\mathbf{R} & -\mathbf{A} \end{pmatrix}.$$

В отличие от массива Вильямсона, обладающего сходной конфигурацией, новый массив с симметричными блоками или одним симметричным блоком **A** в случае $\mathbf{P}_2$ всегда симметричен, что обеспечивается реверсной единичной матрицей **R**.



■ *Рис. 3.* Симметричная матрица $\mathbf{H}_{140}$

■ *Fig. 3.* Symmetrical matrix $\mathbf{H}_{140}$



■ *Рис. 4.* Симметричные матрицы $\mathbf{H}_{68}$ и $\mathbf{H}_{92}$ в форме Пропус

■ *Fig. 4.* Symmetrical matrices $\mathbf{H}_{68}$ and $\mathbf{H}_{92}$ in the Propus form

Для получения матриц Адамара в форме Пропус необходимо хранить только по одной строке каждого из блоков **A**, **B** и **D**, поскольку они цикличны. В этом случае для воспроизведения матрицы Адамара в форме Пропус потребуется только $3n/4$ элементов. При этом используется то обстоятельство, что реверс несимметричного циклического блока относительно центральной осевой линии (флип-инверсия) делает его симметричным (рис. 4).

Помимо циклических и бициклических форм блоков симметричных матриц, существует *негациклическая форма* [21, 22], отличающаяся от циклической лишь операцией инверсии знака размещаемых ниже диагонали элементов.

Расширение базиса симметричных ортогональных матриц

Требования к качеству видеоинформации и ее разрешению постоянно возрастают — это является современной тенденцией, реализуемой как производителями видеоматриц, так и производителями матриц дисплеев. Если еще недавно требовалось обрабатывать кадры форматов PAL, SECAM и NTSC, то сегодня цифровой формат ультравысокой четкости UHD (Ultra High Definition) требует обработки кадров размеров 3840 × 2160 (4K) и 7680 × 4320 (8K). Появившаяся технология выделения на изображении или в кадре видеопоследовательности «окна качества» (Quality Box) и вовсе требует обработки кадров произвольного размера.

Указанные обстоятельства порождают необходимость для обработки изображений иметь широкий базис ортогональных матриц, включая матрицы не только больших размеров, неизвестных до настоящего времени, но и матрицы нечетных порядков [23].

Таким образом, кратко сформулировать требования к базису матриц можно в следующем виде:

— матрицы должны быть ортогональными для обеспечения симметричности процедур преобразования изображений;

— порядки матриц должны соответствовать возможно большему количеству чисел натурального ряда для того, чтобы можно было выбирать соответствующие матрицы (или кратно их использовать) для различных размеров изображений;

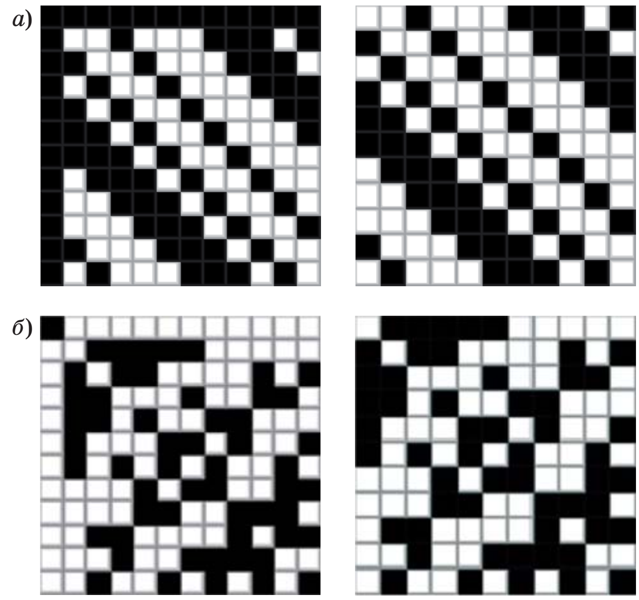
— для каждого порядка должно существовать более одной ортогональной матрицы;

— количество возможных значений элементов (уровней) не должно превышать двух для оптимизации объема памяти для хранения матриц и упрощения вычислительных процедур.

Как отмечалось выше, существование матриц Адамара ограничено порядками $4k$, и это существенно ограничивает возможности их применения для изображений произвольного разрешения. Кроме того, отсутствует универсальный алгоритм их вычисления, а известные методы не позволяют найти матрицы Адамара всех порядков $4k$. Например, классические конструкции Пэли не позволяют найти матрицы Адамара порядков 92, 116, 156, 172, 184 и др.

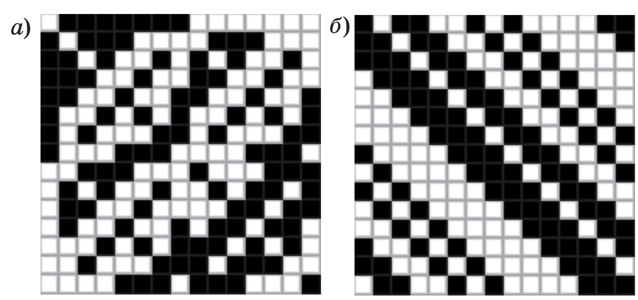
Следует отметить, что в современных вычислительных средствах вычисления с плавающей точкой и в целых числах практически неразличимы по времени. Поэтому отход от требования целочисленности элементов ортогональных матриц, характерного для матриц Адамара, позволяет существенно расширить базис ортогональных матриц. Приведенным выше требованиям в полной мере отвечает базис квазиортогональных матриц, являющийся естественным обобщением матриц ортогональных.

В работе [24] введена классификация квазиортогональных матриц, яркими представителями которых являются двухуровневые матрицы Адамара — Мерсенна ($\mathbf{M}$) нечетных порядков, имеющие, как и матрицы Адамара, два значения элементов $\{1, -b\}$ [25]. В работе [26] сформулирована гипотеза о существовании таких матриц на всех порядках $n = 4k - 1$, соседствующих с порядками матриц Адамара $4k$. Однако в работах [27, 28] показано, что это не простое соседство, а матрицы Мерсенна являются ядром (core) матриц Адамара соответствующей конструкции (рис. 5, *а* и *б*), для получения которых достаточно ядро окаймить слева и сверху, а элементы $-b$ заменить на –1.



■ ***Рис. 5.*** Матрица $\mathbf{H}_{12}$ на основе ядра — циклической матрицы $\mathbf{M}_{11}$ (*а*) и симметричной матрицы $\mathbf{M}_{11}$ (*б*)

■ ***Fig. 5.*** Matrix $\mathbf{H}_{12}$ on the basis of a core — a cyclic Matrix $\mathbf{M}_{11}$ (*а*) and the symmetrical matrix $\mathbf{M}_{11}$ (*б*)



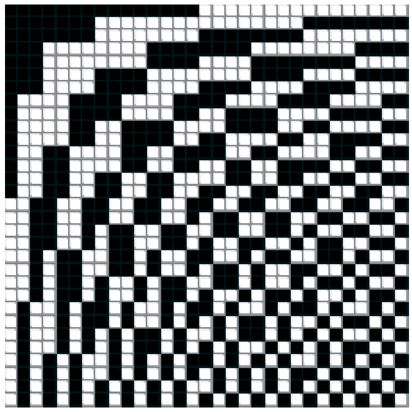
■ ***Рис. 6.*** Портреты матриц $\mathbf{M}_{15}$, найденных методом Сильвестра (*а*) и Пэли (*б*)

■ ***Fig. 6.*** Portraits of matrixes of $\mathbf{M}_{15}$ found Silvester (*а*) and Paley (*б*) methods

Для матриц Мерсенна характерны не только методы поиска, как и для матриц Адамара, но также разнообразие их конструкций. На рис. 6, *а* и *б* показаны конструкции матриц $\mathbf{M}_{15}$, найденные двумя характерными для поиска матриц Адамара методами. Вторая матрица, как и матрица $\mathbf{M}_{11}$ на рис. 4, может быть сделана симметричной применением операции флип-инверсии, и в этом ее отличие от бициклической формы матрицы $\mathbf{H}_{20}$ (см. рис. 1).

Если порядок матрицы — степень простого числа, то матрица Мерсенна состоит из циклических блоков размеров, равных простому числу. В работе [29] приведено структурное исключение, подтверждающее общее правило: когда порядок $n = 4k - 1$ равен произведению пар близких простых чисел, матрица Мерсенна будет циклической.

Особый интерес для отдельных задач обработки изображений представляют симметричные



- *Рис. 7.* Матрица Мерсенна — Уолша
- *Fig. 7.* Mersenne — Walsh matrix

конструкции матриц Адамара — Уолша, получаемые из классических матриц Адамара путем упорядочивания столбцов по частоте (по количеству смены знаков их элементов). Однако упорядоченные матрицы Адамара — Уолша могут быть получены и из матриц Мерсенна — Уолша [7, 30] путем инвертирования знаков элементов и добавления каймы. На рис. 7 для примера приведен портрет матрицы Мерсенна — Уолша порядка 31, полученной упорядочиванием матрицы $\mathbf{M}_{31}$.

Заключение

Базис квазиортогональных матриц, используемых для обработки изображений, значительно шире ортогонального и включает его в себя. Это дает более широкие возможности в выборе наиболее удачной матрицы для обработки конкретных изображений, в том числе изображений нестандартных размеров.

Особенность двухуровневых квазиортогональных матриц состоит в том, что один из уровней иррационален, однако современные вычислительные возможности процессоров позволяют эффективно выполнять вычисления с ними, как и с матрицами Адамара.

Матрицы Мерсенна и построенные с их помощью матрицы Адамара жестко связаны с числовыми последовательностями, для ряда из которых наблюдается сосуществование циклических, бициклических матриц, а также матриц в форме Пропус, что обеспечивает простое и экономное их хранение. Принадлежность порядка матриц Мерсенна к множеству простых чисел регламентирует простоту структуры матрицы.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ при проведении научно-исследовательской работы в рамках проектной части государственного задания в сфере научной деятельности по заданию № 2.2200.2017/4.6.

Литература

1. **Hadamard J.** Résolution d'une Question Relative aux Déterminants // Bulletin des Sciences Mathématiques. 1893. Vol. 17. P. 240–246.
2. **Horadam K. J.** Hadamard Matrices and their Applications. — Princeton, NJ: Princeton University Press, 2007. — 278 p.
3. **Balonin N., Sergeev M.** Construction of Transformation Basis for Video and Image Masking Procedures // Frontiers in Artificial Intelligence and Applications. 2014. Vol. 262. P. 462–467. doi:10.3233/978-1-61499-405-3-462
4. **Balonin N., Sergeev M.** Expansion of the Orthogonal Basis in Video Comhression // Frontiers in Artificial Intelligence and Applications. 2014. Vol. 262. P. 468–474. doi:10.3233/978-1-61499-405-3-468
5. **Востриков А. А., Мишура О. В., Сергеев А. М., Чернышев С. А.** О выборе матриц для процедур маскирования и демаскирования изображений // Фундаментальные исследования. 2015. № 2-24. С. 5335–5339.
6. **Vostrikov A., Sergeev M.** Expansion of the Quasi-orthogonal Basis to Mask Images // Smart Innovation, Systems and Technologies. 2015. Vol. 40. P. 161–168. doi:10.1007/978-3-319-19830-9_15
7. **Балонин Н. А., Балонин Ю. Н., Востриков А. А., Сергеев М. Б.** Вычисление матриц Мерсенна — Уолша // Вестник компьютерных и информационных технологий. 2014. № 11 (125). С. 51–56.
8. **Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А.** Матрицы и вычисления. — М.: Наука, 1984. — 320 с.
9. **Ryser H. J.** Combinatorial Mathematics: The Carus Mathematical Monographs / Published by the Mathematical Association of America. — N. Y.: John Wiley and Sons, 1963. N 14. — 162 p.
10. **Балонин Н. А., Сергеев М. Б.** Вычисление матриц Мерсенна методом Пэли// Изв. вузов. Приборостроение. 2014. Т. 57. № 10. С. 38–41.
11. **Sylvester J. J.** Thoughts on Inverse Orthogonal Matrices, Simultaneous Sign Successions, and Tessellated Pavements in Two or More Colours, with Applications to Newton's Rule, Ornamental Tile-Work, and the Theory of Numbers // Philosophical Magazine. 1867. Vol. 34. P. 461–475.
12. **Williamson J.** Hadamard's Determinant Theorem and the Sum of Four Squares // Duke Math. J. 1944. N 11. P. 65–81.
13. **Балонин Н. А., Балонин Ю. Н., Сергеев М. Б.** Вычисление матриц Мерсенна и Адамара методом Скарпи // Научно-технический вестник информа-

ционных технологий, механики и оптики. 2014. № 3 (91). С. 103–111.
14. La Conjecture De Hadamard (I). http://images.math.cnrs.fr/La-conjecture-de-Hadamard-I.html?lang = fr (дата обращения: 17.08.2017).
15. **Балонин Н. А., Сергеев М. Б.** Расширение гипотезы Райзера на двуциклические структуры и разрешимость матриц Адамара орнаментом в виде бицикла с двойной каймой // Информационно-управляющие системы. 2017. № 1. С. 2–10. doi:10.15217/issn1684-8853.2017.1.2
16. **Balonin N. A., Djokovic D. Z., Mironovskiy L. A., Seberry J., Sergeev M. B.** Hadamard-type Matrices Cretan Matrices, Local Maximum Determinant Matrices. http:// mathscinet.ru (дата обращения: 20.09.2017).
17. **Djokovic D. Z.** Good Matrices of Orders 33, 35 and 127 // JCMCC. 1993. N 14. P. 145–152.
18. **Seberry J. and Balonin N.** The Propus Construction for Symmetric Hadamard Matrices. https://arxiv.org/abs/1512.01732 (дата обращения: 20.09.2017).
19. **Di Matteo O., Djokovic D. Z., Kotsireas I. S.** Symmetric Hadamard Matrices of Order 116 and 172 Exist // Special Matrices. 2015. Vol. 3.1. P. 227–234.
20. **Балонин Н. А., Сергеев М. Б.** Матрицы Пропус 92 и 116 // Информационно-управляющие системы. 2016. № 2. С. 101–103. doi:10.15217/issn1684-8853.2016.2.101
21. **Балонин Н. А., Джокович Д.** Негапериодические пары Голея и матрицы Адамара // Информационно-управляющие системы. 2015. № 5. С. 2–17. doi:10.15217/issn1684-8853.2015.5.2
22. **Балонин Ю. Н., Егорова И. С., Сергеев А. М.** Нега-циклические матрицы и фильтры Мерсенна // Вестник компьютерных и информационных технологий. 2016. № 11(149). С. 20–24.
23. **Балонин Н. А., Сергеев М. Б.** О расширении ортогонального базиса в задачах сжатия видеоизображений // Вестник компьютерных и информационных технологий. 2014. № 2. С. 11–18.
24. **Сергеев А. М.** Обобщенные матрицы Мерсенна и гипотеза Балонина // Автоматика и вычислительная техника. 2014. № 4. С. 35–43.
25. **Балонин Н. А., Сергеев М. Б., Мироновский Л. А.** Вычисление матриц Адамара — Мерсенна // Информационно-управляющие системы. 2012. № 5. С. 92–94.
26. **Балонин Н. А.** О существовании матриц Мерсенна 11-го и 19-го порядков // Информационно-управляющие системы. 2013. № 2. С. 89–90.
27. **Балонин Ю. Н., Востриков А. А., Сергеев А. М., Егорова И. С.** О взаимосвязях квазиортогональных матриц, построенных на известных последовательностях чисел // Тр. СПИИРАН. 2017. № 1(50). С. 209–223. doi:http://dx.doi.org/10.15622/sp.50.9
28. **Сергеев А. М.** О взаимосвязи одного вида квазиортогональных матриц, построенных на порядках последовательностей $4k$ и $4k$–1 // Изв. ЛЭТИ. 2017. № 7. С. 12–17.
29. **Hall M.** A Survey of Difference Sets // Proc. Amer. Math. Soc. 1956. Vol. 7. P. 975–986.
30. **Балонин Ю. Н., Сергеев А. М., Егорова И. С.** Фильтры Мерсенна–Уолша для видеоданных в IP-сетях // Региональная информатика и информационная безопасность: сб. тр./ Санкт-Петербургское общество информатики, вычислительной техники, систем связи и управления. 2016. Вып. 2. С. 367–371.

UDC 004.67
doi:10.15217/issn1684-8853.2017.6.2

Orthogonal Matrices with Symmetrical Structures for Image Processing

Sergeev A. M.[a], PhD, Tech., Senior Lecturer, asklab@mail.ru
Blaunstein N. Sh.[b,c], Dr. Sc., Phys.-Math., Professor, nathan.blaunstein@hotmail.com
[a]Saint-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, 67, B. Morskaia St., 190000, Saint-Petersburg, Russian Federation
[b]Ben-Gurion University of the Negev, POB 653, 1, Ben Gurion St., Beer Sheva, 84105, Israel
[c]Jerusalem College of Technology — Lev Academic Center, 21 Havaad Haleumi, POB. 16031, Jerusalem, 91160, Israel

Introduction: Matrices with orthogonal columns (rows) are widely used in many problems of information processing and transformation. It is extremely important for image processing system developers to be able to easily choose the optimal type of structured two-level orthogonal matrices. **Purpose:** Systematizing the main types of structured symmetric Hadamard matrices, such as cyclic, non-cyclic, bicyclic, four-block and three-block in the form of Propus, which can be used for image processing in compression, filtration and masking issues. **Results:** An extended classification of symmetric Hadamard matrices is proposed. It is revealed that Mersenne matrices and Hadamard matrices constructed with their help are rigidly linked to numerical sequences for some of which there is a co-existence of cyclic and bicyclic matrices, as well as of Propus matrices. It is shown that Mersenne matrices implemented as a «core» lead to Hadamard matrices of new symmetric structures, thus expanding the classification of symmetric orthogonal matrices. «Portraits» of previously unknown symmetric Hadamard matrices are presented. **Practical relevance:** The obtained results provide more opportunities in choosing the most suitable matrix to process particular images, including images of non-standard sizes. For each matrix under discussion, we have determined the number of its fragments sufficient to reproduce the entire matrix. Such effective representations of symmetric Hadamard matrices stored in a computer memory allow you to make image processing more efficient.

Keywords — Orthogonal Matrices, Quasi-Orthogonal Matrices, Bicyclic Matrices, Propus Matrices, Hadamard Matrices, Mersenne Matrices, Image Processing.

References

1. Hadamard J. Résolution d'une Question Relative aux Déterminants. *Bulletin des Sciences Mathématiques*, 1893, vol. 17, pp. 240–246 (In French).
2. Horadam K. J. *Hadamard Matrices and their Applications*. Princeton, NJ, Princeton University Press, 2007. 278 p.
3. Balonin N., Sergeev M. Construction of Transformation Basis for Video and Image Masking Procedures. *Frontiers in Artificial Intelligence and Applications*, 2014, vol. 262, pp. 462–467. doi:10.3233/978-1-61499-405-3-462
4. Balonin N., Sergeev M. Expansion of the Orthogonal Basis in Video Comhression. *Frontiers in Artificial Intelligence and Applications*, 2014, vol. 262, pp. 468–474. doi:10.3233/978-1-61499-405-3-468
5. Vostrikov A. A., Mishura O. V., Sergeev A. M., Chernyshev S. A. The Choice of Matrices for Images Masking and Demasking Procedures. *Fundamental'nye issledovaniia* [Fundamental Research], 2015, no. 2-24, pp. 5335–5339 (In Russian).
6. Vostrikov A., Sergeev M. Expansion of the Quasi-orthogonal Basis to Mask Images. *Smart Innovation, Systems and Technologies*, 2015, vol. 40, pp. 161–168. doi:10.1007/978-3-319-19830-9_15
7. Balonin N. A., Balonin Yu. N., Vostrikov A. A., Sergeev M. B. Computation of Mersenne — Walsh Matrices. *Vestnik komp'iuternykh i informatsionnykh tekhnologii* [Herald of Computer and Information Technologies], 2014, no. 11 (125), pp. 51–56 (In Russian).
8. Voevodin V. V., Kuznetsov Yu. A. *Matritsy i vychisleniia* [Matrices and Calculations]. Moscow, Nauka Publ., 1984. 320 p. (In Russian).
9. Ryser H. J. *Combinatorial Mathematics: The Carus Mathematical Monographs*. Published by the Mathematical Association of America. N. Y., John Wiley and Sons, 1963, no. 14. 162 p.
10. Balonin N. A., Sergeev M. B. Calculation of Mersenne Matrices by Paley Method. *Izvestiia vysshikh uchebnykh zavedenii. Priborostroenie* [Journal of Instrument Engineering], 2014, vol. 57, no. 10, pp. 38–41 (In Russian).
11. Sylvester J. J. Thoughts on Inverse Orthogonal Matrices, Simultaneous Sign Successions, and Tessellated Pavements in Two or More Colours, with Applications to Newton's Rule, Ornamental Tile-Work, and the Theory of Numbers. *Philosophical Magazine*, 1867, vol. 34, pp. 461–475.
12. Williamson J. Hadamard's Determinant Theorem and the Sum of Four Squares. *Duke Math. J.*, 1944, no. 11, pp. 65–81.
13. Balonin N. A., Balonin Y. N., Sergeev M. B. Mersenne and Hadamard Matrices Calculation by Scarpis Method. *Nauchno-tekhnicheskii vestnik informatsionnykh tekhnologii, mekhaniki i optiki* [Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics], 2014, no. 3 (91), pp. 103–111 (In Russian).
14. *La Conjecture De Hadamard (I)*. Available at: http://images.math.cnrs.fr/La-conjecture-de-Hadamard-I.html?lang = fr (accessed 17 August 2017).
15. Balonin N. A., Sergeev M. B. Ryser's Conjecture Expansion for Bicirculant Strictures and Hadamard Matrix Resolvability by Double-Border Bicycle Ornament. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2017, no. 1, pp. 2–10 (In Russian). doi:10.15217/issn1684-8853.2017.1.2
16. Balonin N. A., Djokovic D. Z., Mironovskiy L. A., Seberry J., Sergeev M. B. *Hadamard-type Matrices Cretan Matrices, Local Maximum Determinant Matrices*. Available at: http:// mathscinet.ru (accessed 20 September 2017).
17. Djokovic D. Z. Good Matrices of Orders 33, 35 and 127. *JCMCC*, 1993, no. 14, pp. 145–152.
18. Seberry J. and Balonin N. *The Propus Construction for Symmetric Hadamard Matrices*. Available at: https://arxiv.org/abs/1512.01732 (accessed 20 September 2017).
19. Di Matteo O., Djokovic D. Z., Kotsireas I. S. Symmetric Hadamard Matrices of Order 116 and 172 Exist. *Special Matrices*, 2015, vol. 3.1, pp. 227–234.
20. Balonin N. A., Sergeev M. B. Propus Matrices 92 and 116. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2016, no. 2, pp. 101–103 (In Russian). doi:10.15217/issn1684-8853.2016.2.101
21. Balonin N. A., Djokovic D. Negaperiodic Golay Pairs and Hadamard Matrices. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2015, no. 5, pp. 2–17 (In Russian). doi:10.15217/issn1684-8853.2015.5.2
22. Balonin Yu. N., Egorova I. S., Sergeev A. M. Negacirculant Mersenne Matrices and Filters. *Vestnik komp'iuternykh i informatsionnykh tekhnologii* [Herald of Computer and Information Technologies], 2016, no. 11(149), pp. 20–24 (In Russian).
23. Balonin N. A., Sergeev M. B. Expansion of the Orthogonal basis in Video Compression. *Vestnik komp'iuternykh i informatsionnykh tekhnologii* [Herald of Computer and Information Technologies], 2014, no. 2, pp. 11–18 (In Russian).
24. Sergeev A. M. Generalized Mersenne Matrices and Balonin's Conjecture. *Avtomatika i vychislitel'naia tekhnika* [Automatic Control and Computer Sciences], 2014, no. 4, pp. 35–43 (In Russian).
25. Balonin N. A., Sergeev M. B., Mironovsky L. A. Calculation of Hadamard — Mersenne Matrices. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2012, no. 5, pp. 92–94 (In Russian).
26. Balonin N. A. Existence of Mersenne Matrices of 11th and 19th Orders. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2013, no. 2, pp. 89–90 (In Russian).
27. Balonin Yu. N., Vostrikov A. A., Sergeev A. M., Egorova I. S. On Relationships among Quasi-Orthogonal Matrices Constructed on the Known Sequences of Prime Numbers. *Trudy SPIIRAN* [SPIIRAS Proceedings], 2017, no. 1 (50), pp. 209–223 (In Russian). doi: http://dx.doi.org/10.15622/sp.50.9
28. Sergeev A. M. The Interconnection of one Kind of Quasi-Orthogonal Matrices Built on the Orders of the Sequences $4k$ and $4k$–1. *Izvestiia "LETI"*, 2017, no. 7, pp. 12–17 (In Russian).
29. Hall M. A Survey of Difference Sets. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1956, no. 7, pp. 975–986.
30. Balonin Yu. N., Sergeev A. M., Egorova I. S. Mersenne-Filters for Walsh Video in IP-Networks. *Sbornic trudov "Regional'naia informatika i informatsionnaia bezopasnost'"* [Proc. "Regional Informatics and Information Security"], 2016, iss. 2, pp. 367–371 (In Russian).