УДК 621.39

ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТЬ КОГЕРЕНТНОГО ПРИЕМА СИГНАЛОВ ДВОИЧНОЙ АМПЛИТУДНО-ФАЗОВОЙ МОДУЛЯЦИИ ПРИ НЕИДЕАЛЬНОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ (Часть 1)

Н. В. Савищенко,
доктор техн. наук, профессор
Военная академия связи

Предлагается методика оценки потерь в мощности и помехоустойчивости когерентного приема сигналов при наличии ошибки в определении фазы несущей. Приведены основные соотношения для расчета помехоустойчивости когерентного приема двоичных сигналов амплитудно-фазовой модуляции с произвольным расположением сигнальных точек на плоскости, неравными энергиями и неравновероятной априорной вероятностью передачи сигналов при наличии ошибки сопровождения фазы.

Ключевые слова *— помехоустойчивость, когерентный прием, неидеальная синхронизация, сигналы амплитудно-фазовой модуляции.*

Введение

Традиционно приводимые в научной литературе формулы символьной и (или) битовой вероятностей ошибок получены при идеальной фазовой синхронизации, т. е. когда предполагается, что моменты времени начала и окончания сигналов и их начальные фазы точно известны на приемной стороне. Исключение составляет формула вероятности ошибки [1, 2] для сигнала ФМ-2 (BPSK). Проведенный анализ [1, 2] показывает, что при наличии фазовой ошибки и использовании системы с остаточной несущей возникает неустранимая ошибка, которая не может быть улучшена простым увеличением отношения сигнал/шум.

Математическая модель канала связи

Основные положения

Предположим, что для передачи цифровой информации используется M сигналов конечной энергии: $s_r(t)$, $r=\overline{0, M-1}$, передаваемых на символьном интервале времени T. В соответствии с теоремой Грама—Шмидта сигналы можно представить в виде [1]

$$s_r(t)=\sum_{\nu=1}^{N} s_{r,\nu}\psi_\nu(t),\ r=\overline{0, M-1},$$

где N — размерность пространства сигнального созвездия; $\{\psi_\nu(t)\}$, $\nu=\overline{1, N}$ — базисные функции, удовлетворяющие условию

$$\int_0^T \psi_\nu(t)\psi_\mu(t)\mathrm{d}t=(\psi_\nu,\psi_\mu)=\delta_{\nu\mu}=\begin{cases}1,\ \nu=\mu,\\0,\ \nu\neq\mu.\end{cases}$$

В первом приближении математическую модель канала связи можно записать в виде $y(t) = \mu s_r(t) + n(t)$, где $y(t)$ — принятый сигнал; μ — коэффициент передачи канала; $n(t)$ — белый гауссов шум с односторонней спектральной плотностью шума N_0. Предположим, что при формировании базисных функций в демодуляторе имеется одинаковая фазовая ошибка: $\Delta\varphi=\varphi-\tilde{\varphi}$, где φ — фаза несущей и $\tilde{\varphi}$ — оценка фазы несущей. Следовательно, в демодуляторе базисные функции представляют собой функции

$$\tilde{\psi}_\nu(t)=\psi_\nu(t)\cos\Delta\varphi+\hat{\psi}_\nu(t)\sin\Delta\varphi,\ \nu=\overline{1, N},$$

где $H[\psi_\nu(t)]=\hat{\psi}_\nu(t)$ — преобразование Гильберта от функции $\psi_\nu(t)$ [1, 2]. Это следует из того известного факта, что при фазовом сдвиге всех частотных компонент $\psi_\nu(t)$ на угол $(-\Delta\varphi)$ аналитический сигнал умножается на $\exp(-j\Delta\varphi)$. Таким образом, фазовый сдвиг всех частотных компонент вещественного сигнала может быть определен как

$$\mathrm{Re}\left[e^{-j\Delta\varphi}\dot{\psi}_\nu(t)\right]=$$
$$=\mathrm{Re}\left[(\cos\Delta\varphi-j\sin\Delta\varphi)(\psi_\nu(t)+j\hat{\psi}_\nu(t))\right]=$$
$$=\psi_\nu(t)\cos\Delta\varphi+\hat{\psi}_\nu(t)\sin\Delta\varphi,\ \nu=\overline{1, N},$$

где $\dot{\psi}_\nu(t)=\psi_\nu(t)+j\hat{\psi}_\nu(t)$ — аналитический сигнал.

Следует отметить, что более корректным в этих случаях является применение расширенного преобразования Гильберта на отрезке (0, T), введенное В. И. Коржиком [3]:

$$H_T[s(t)] = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi} \int_{\varepsilon}^{T} \frac{s(t-\tau) - s(t+\tau)}{\operatorname{tg}(\pi\tau/T)} \mathrm{d}\tau,$$

но при этом все основные свойства классического преобразования Гильберта сохраняются, и в дальнейшем предполагается в работе использовать именно это преобразование.

Выберем в качестве наблюдения N проекций наблюдения: $\mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_N)$, где компоненты вектора определяются как проекции на базисные функции $\tilde{\psi}_\nu(t)$:

$$y_\nu = \int_0^T y(t) \tilde{\psi}_\nu(t) \mathrm{d}t, \ \nu = \overline{1, N}.$$

Тогда

$$y_\nu = \int_0^T y(t)(\psi_\nu(t)\cos\Delta\varphi + \hat{\psi}_\nu(t)\sin\Delta\varphi)\mathrm{d}t =$$
$$= \int_0^T \left[\sum_{\mu=1}^{N} s_{r,\mu}\psi_\mu(t) + n(t) \right] \times$$
$$\times (\psi_\nu(t)\cos\Delta\varphi + \hat{\psi}_\nu(t)\sin\Delta\varphi)\mathrm{d}t$$

или

$$y_\nu = s_{r,\nu}\cos\Delta\varphi + \left(\sum_{\mu=1}^{N} s_{r,\mu}\hat{\delta}_{\mu\nu} \right) \sin\Delta\varphi + \hat{n}_\nu,$$
$$\nu = \overline{1, N},$$

где

$$\hat{\delta}_{\mu\nu} = (\psi_\mu, \hat{\psi}_\nu) = \int_0^T \psi_\mu(t)\hat{\psi}_\nu(t)\mathrm{d}t;$$

$$\hat{n}_\nu = \int_0^T n(t)(\psi_\nu(t)\cos\Delta\varphi + \hat{\psi}_\nu(t)\sin\Delta\varphi)\mathrm{d}t.$$

В частности, из свойств преобразования Гильберта следует, что $\hat{\delta}_{\nu\nu} = 0, \ \nu = \overline{1, N}$. Если в системе связи используются ортогональные в усиленном смысле базисные функции, то тогда по определению $\hat{\delta}_{\mu\nu} = 0$ для всех $\nu, \mu = \overline{1, N}$ и второе слагаемое исчезает, т. е. $y_\nu = s_{r,\nu}\cos\Delta\varphi + \hat{n}_\nu, \ \nu = \overline{1, N}$. Отсюда следует, что при использовании ортогональных в усиленном смысле базисных функций происходит уменьшение энергии переданного сигнала в $\cos^2\Delta\varphi$. Этот вывод справедлив и для одномерных сигналов, передаваемых с помощью произвольного несущего сигнала (базисной функции).

В матричном виде соотношения для наблюдения можно переписать в виде $\mathbf{y}^T = \mathbf{\Psi}(\Delta\varphi)\mathbf{s}_r^T + \mathbf{n}^T$, где

$$\mathbf{\Psi}(\Delta\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\Delta\varphi & \hat{\delta}_{21}\sin\Delta\varphi & \ldots & \hat{\delta}_{N1}\sin\Delta\varphi \\ \hat{\delta}_{12}\sin\Delta\varphi & \cos\Delta\varphi & \ldots & \hat{\delta}_{N2}\sin\Delta\varphi \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \hat{\delta}_{1N}\sin\Delta\varphi & \ldots & \ldots & \cos\Delta\varphi \end{pmatrix}$$

и $\mathbf{n} = (\hat{n}_1 \ \ \hat{n}_2 \ \ \ldots \ \ \hat{n}_N)$. Свойства матрицы $\mathbf{\Psi}$ будут рассмотрены в приложении (ч. 2). Очевидно, что $y_\nu, \ \nu = \overline{1, N}$ — гауссова случайная величина, так как ее случайная составляющая $\hat{n}_\nu$ получена линейными преобразованиями от гауссова случайного процесса $n(t)$. Математическое ожидание случайной величины $y_\nu, \ \nu = \overline{1, N}$ равно

$$M[y_\nu] = s_{r,\nu}\cos\Delta\varphi + \left(\sum_{\mu=1}^{N} s_{r,\mu}\hat{\delta}_{\mu\nu} \right) \sin\Delta\varphi,$$

так как $M[\hat{n}_\nu] = 0, \ \nu = \overline{1, N}$. Корреляционный момент случайных величин y_ν и $y_\mu, \ \nu = \overline{1, N}$ определяется по формуле

$$k_{\nu\mu} = M\left[\left(y_\nu - M[y_\nu]\right)\left(y_\mu - M[y_\mu]\right) \right] = M\left[\hat{n}_\nu \hat{n}_\mu \right] =$$
$$= \int_0^T \int_0^T M[n(t)n(\tau)]\left(\psi_\nu(t)\cos\Delta\varphi + \hat{\psi}_\nu(t)\sin\Delta\varphi\right) \times$$
$$\times \left(\psi_\mu(\tau)\cos\Delta\varphi + \hat{\psi}_\mu(\tau)\sin\Delta\varphi\right)\mathrm{d}t\mathrm{d}\tau$$

или, так как $M[n(t)n(\tau)] = \frac{N_0}{2}\delta(t-\tau)$:

$$k_{\nu\mu} = \frac{N_0}{2} \int_0^T (\psi_\nu(t)\cos\Delta\varphi + \hat{\psi}_\nu(t)\sin\Delta\varphi) \times$$
$$\times (\psi_\mu(t)\cos\Delta\varphi + \hat{\psi}_\mu(t)\sin\Delta\varphi)\mathrm{d}t.$$

Используя свойство преобразования Гильберта $(x, y) = (\hat{x}, \hat{y})$, получаем, что

$$k_{\nu\mu} = \frac{N_0}{2}\left(\delta_{\nu\mu} + \frac{1}{2}\sin 2\Delta\varphi \left(\hat{\delta}_{\nu\mu} + \hat{\delta}_{\mu\nu} \right) \right), \ \nu, \mu = \overline{1, N}.$$

Случайные величины $y_\nu, \ \nu = \overline{1, N}$ будут независимы, если $\hat{\delta}_{\nu\mu} + \hat{\delta}_{\mu\nu} = (\psi_\nu, \hat{\psi}_\mu) + (\psi_\mu, \hat{\psi}_\nu) = 0$ для всех $\nu, \mu = \overline{1, N}$. Применяя свойства преобразования Гильберта $(x, y) = (\hat{x}, \hat{y})$ и $H[H[x(t)]] = -x(t)$, получаем, что для любых двух функций $x(t)$, $y(t)$: $(H[x(t)], y(t)) = (H[H[x(t)]], H[y(t)])$ или $(H[x(t)], y(t)) = -(x(t), H[y(t)])$.

Отсюда следует, что тождество $\hat{\delta}_{\nu\mu} + \hat{\delta}_{\mu\nu} = 0$ справедливо для всех $\nu, \mu = \overline{1, N}$, и, следовательно, во всех случаях $k_{\nu\mu} = (N_0/2)\delta_{\nu\mu}, \ \nu, \mu = \overline{1, N}$.

В частности, если базисные функции ортогональны в усиленном смысле, то $\hat{\delta}_{\nu\mu} = \hat{\delta}_{\mu\nu} = 0$ для всех $\nu, \mu = \overline{1, N}$. Таким образом, гауссовы случайные величины y_ν, $\nu = \overline{1, N}$ являются независимыми с математическим ожиданием $M[y_\nu] = s_{r,\nu}\cos\Delta\varphi$ и дисперсией $D[y_\nu] = (N_0/2)$. Это вытекает из того, что для гауссовых случайных величин из некоррелированности следует их независимость, что для произвольных случайных величин в общем случае несправедливо. При этом $\det\Psi(\Delta\varphi) = \cos^N\Delta\varphi$, т. е. использование ортогональных в усиленном смысле базисных функций приводит к неортогональным преобразованиям сигналов при ненулевой фазовой ошибке в пространстве любой размерности.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением только двумерных сигналов, т. е. размерность пространства $N = 2$. Соответствующие этому варианту преобразования могут быть записаны в матричном виде: $\mathbf{y}^T = \boldsymbol{\Psi}(\Delta\varphi)\mathbf{s}_r^T + \mathbf{n}^T$, где в двумерном пространстве

$$\boldsymbol{\Psi}(\Delta\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\Delta\varphi & \hat{\delta}_{21}\sin\Delta\varphi \\ \hat{\delta}_{12}\sin\Delta\varphi & \cos\Delta\varphi \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что это преобразование будет ортогональным, т. е. $\det\Psi(\Delta\varphi) = 1$, если потребовать выполнения условия $\hat{\delta}_{12}\hat{\delta}_{21} = -1$. Учитывая, что справедливо тождество $\hat{\delta}_{12} + \hat{\delta}_{21} = 0$, приходим к условию $\hat{\delta}_{12} = \pm 1$, $\hat{\delta}_{21} = \mp 1$. При выполнении этих соотношений будет происходить только поворот сигнальной точки на угол $\Delta\varphi$ без изменения энергии. Если, например, выполняется условие $\hat{\delta}_{12}\hat{\delta}_{21} = 1$, тогда $\det\Psi(\Delta\varphi) = \cos(2\Delta\varphi)$ и ортогональное преобразование $\det\Psi(\Delta\varphi) = \pm 1$ возможно только при фиксированных значениях $\Delta\varphi = 0, \pm\pi/2, \pm\pi$, что, учитывая случайный характер фазовой ошибки, невозможно. Ортонормированные тригонометрические базисные функции, используемые в современных системах передачи информации:

$$\psi_1(t) = A\cos(2\pi f_c t + \varphi);$$

$$\psi_2(t) = A\sin(2\pi f_c t + \varphi), \; t \in (0, T),$$

где A — амплитуда; f_c — частота и φ — начальная фаза — удовлетворяют условию $\hat{\delta}_{12} = \pm 1$, $\hat{\delta}_{21} = \mp 1$, так как преобразование Гильберта этих функций $\hat{\psi}_1(t) = \psi_2(t)$, $\hat{\psi}_2(t) = -\psi_1(t)$ и, следовательно, $\hat{\delta}_{12} = (\psi_1, \hat{\psi}_2) = -1$, $\hat{\delta}_{21} = (\psi_2, \hat{\psi}_1) = 1$.

Полученное преобразование относится к ортогональным преобразованиям с детерминантом $\det\Psi(\Delta\varphi) = 1$ и определяет поворот координат на угол $\Delta\varphi$ против часовой стрелки. Таким образом, погрешность при оценке фазы несущей соответствует, в геометрическом представлении сигналов, повороту координат сигналов против часовой стрелки на угол $\Delta\varphi = \varphi - \tilde{\varphi}$. С точки зрения теории помехоустойчивого приема это означает соответствующее изменение расстояния от сигнальных точек до границ областей принятия решения.

Анализ полученных соотношений показывает, что не только в $\cos^2(\varphi - \tilde{\varphi})$ уменьшается мощность определяемой сигнальной координаты, как это происходит в одномерном случае, но и присутствует взаимная интерференция между синфазной и квадратурной компонентами.

Приведем второй вариант математической модели канала связи. Принятый сигнал может быть представлен в виде

$$y(t) = \mu(s_r(t)\cos\Delta\varphi + \widehat{s_r}(t)\sin\Delta\varphi) + n(t),$$

т. е. передаваемый сигнал получает случайный фазовый сдвиг в канале связи, а не в демодуляторе при формировании базисных функций. Так как $s_r(t) = \sum_{\nu=1}^{N} s_{r,\nu}\psi_\nu(t)$, то $\widehat{s_r}(t) = \sum_{\nu=1}^{N} s_{r,\nu}\hat{\psi}_\nu(t)$ и

$$y(t) = \mu\sum_{\nu=1}^{N} s_{r,\nu}(\psi_\nu(t)\cos\Delta\varphi + \hat{\psi}_\nu(t)\sin\Delta\varphi) +$$

$$+ n(t) = \mu\sum_{\nu=1}^{N} s_{r,\nu}\tilde{\psi}_\nu(t) + n(t).$$

Действительно, проекции на базисные функции $\psi_\nu(t)$: $y_\nu = \int_0^T y(t)\psi_\nu(t)\mathrm{d}t$, $\nu = \overline{1, N}$ будут в этом случае равны

$$y_\nu = \sum_{\mu=1}^{N} s_{r,\mu}((\psi_\mu, \psi_\nu)\cos\Delta\varphi +$$

$$+ (\hat{\psi}_\mu, \psi_\nu)\sin\Delta\varphi) + n_\nu.$$

После простейших преобразований получаем

$$y_\nu = s_{r,\nu}\cos\Delta\varphi + \sin\Delta\varphi\sum_{\mu=1}^{N} s_{r,\mu}(\hat{\psi}_\mu, \psi_\nu) + n_\nu$$

или

$$y_\nu = s_{r,\nu}\cos\Delta\varphi - \sin\Delta\varphi\sum_{\mu=1}^{N} s_{r,\mu}\hat{\delta}_{\mu\nu} + n_\nu.$$

Это выражение с точностью до знака фазовой ошибки $\Delta\varphi$ совпадает с полученным ранее (вероятностные характеристики отсчетов белого шума совпадают). С учетом того, что величина $\Delta\varphi \in [-\pi, \pi]$ имеет четную плотность распределения вероятностей, $P(\Delta\varphi < 0) = P(\Delta\varphi > 0)$. Следовательно, в этом варианте математической модели канала связи проекции наблюдения получаются такими же.

Вывод частных случаев

Если для передачи цифровой информации используется M сигналов: $s_r(t)$, $r=\overline{0,M-1}$, $t\in[0, T]$, то математическая модель канала связи может быть представлена выражением

$$y(t)=\mu(s_r(t)\cos\Delta\varphi+\widehat{s_r}(t)\sin\Delta\varphi)+n(t),\ t\in[0,T],$$

где $y(t)$ — принятый сигнал; $\mu(t)$ — коэффициент передачи канала; $\Delta\varphi\in[-\pi, \pi]$ — фазовая ошибка и $n(t)$ — белый гауссов шум с односторонней спектральной плотностью шума N_0.

Пусть E_r, $r=\overline{0,M-1}$ — энергия r-го сигнала. Так как все энергии конечны, то среди них есть сигналы, имеющие максимальную энергию, которую будем обозначать E_m: $E_m=\max\limits_{r=0,\,M-1}E_r$. Средняя энергия E_c сигнала определяется как $E_c=\sum\limits_{r=0}^{M-1}p_rE_r$, где p_r — априорная вероятность передачи r-го сигнала. Традиционно средняя энергия определяется при равновероятной передаче сигналов: $E_c=\dfrac{1}{M}\sum\limits_{r=0}^{M-1}E_r$, $p_r=1/M$. Отношение максимальной энергии к средней энергии есть квадрат пик-фактора: $\Pi_c^2=E_m/E_c$. Отношение максимальной энергии и средней энергии к односторонней спектральной плотности шума определяется как $h_m^2=E_m/N_0$ и $h_c^2=E_c/N_0$, при этом $h_m^2=\Pi_c^2h_c^2$. Величины $E_{bm}=\dfrac{E_m}{\log_2 M}$ и $E_{bc}=\dfrac{E_c}{\log_2 M}$ — соответственно максимальное и среднее значения энергии, затраченной для передачи одного бита; $h_{bm}^2=E_{bm}/N_0$, $h_{bc}^2=E_{bc}/N_0$, $h_{bm}^2=\Pi_c^2h_{bc}^2$, $h_c^2=h_{bc}^2\log_2 M$ и $h_m^2=h_{bm}^2\log_2 M$.

В рассматриваемой математической модели канала связи можно выделить несколько частных случаев:

1) если $\mu(t)=1$, $\Delta\varphi=0$, $t\in[0, T]$, то получаем классический канал с аддитивным белым гауссовым шумом;

2) если $\mu(t)=\mu$, $\Delta\varphi=0$, $t\in[0, T]$ и μ — случайная величина, то получаем канал с неселективными по частоте общими замираниями и аддитивным белым гауссовым шумом;

3) если $\mu(t)=1$, $t\in[0, T]$ и $\Delta\varphi\neq 0$, то получаем канал с аддитивным белым гауссовым шумом и ненулевой фазовой ошибкой. Случайная величина $\Delta\varphi$ описывается распределением Тихонова, хотя основные положения статьи могут быть использованы для произвольной плотности распределения фазовой ошибки;

4) если $\mu(t)=\mu$, $\Delta\varphi$, $t\in[0, T]$ — случайные величины, то получаем канал с неселективными по частоте общими замираниями, ненулевой фазовой ошибкой и аддитивным белым гауссовым шумом.

В данной статье рассматриваются последние два варианта канала связи. Основная цель заключена в определении символьной и битовой вероятностей ошибок при оптимальном когерентном приеме сигналов АФМ-2 по правилу максимального правдоподобия в канале с детерминированными параметрами, аддитивным белым гауссовым шумом и наличии фазовой ошибки в контуре фазовой автоподстройки частоты (ФАПЧ).

Плотность распределения вероятности фазовой ошибки

В работе [4] показано, что при оценке фазы при учете аддитивного шума функция плотности вероятностей для фазовой ошибки при нулевой начальной расстройке по частоте (т. е. между собственной частотой автогенератора и частотой синхронизирующего сигнала) описывается плотностью распределения В. И. Тихонова [1, 2, 4]

$$\omega(\Delta\varphi)=\frac{1}{2\pi I_0(\rho)}\exp(\rho\cos\Delta\varphi),\quad -\pi\le\Delta\varphi\le\pi, \tag{1}$$

где $I_0(\rho)$ — функция Бесселя нулевого порядка; $\rho=\dfrac{E_c}{N_0}\dfrac{1}{2B_LT}$ — отношение сигнал/шум, здесь B_L — односторонняя полоса контура ФАПЧ; T — интервал времени символа. При $\rho >> 1$ можно считать, что $\rho=1/\sigma_\varphi^2$, где σ_φ^2 — дисперсия ошибки фазы.

Если использовать разложение

$$\exp(\rho\cos\Delta\varphi)=I_0(\rho)+2\sum_{k=1}^{\infty}I_k(\rho)\cos k\Delta\varphi,$$

где

$$I_k(\rho)=\frac{(\rho/2)^k}{\Gamma(k+1/2)\Gamma(1/2)}\int_0^{\pi}\sin^{2k}\varphi\exp(\rho\cos\varphi)d\varphi$$

— функция Бесселя k-го порядка, то (1) может быть представлена как

$$\omega(\Delta\varphi)=\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{I_k(\rho)}{I_0(\rho)}\cos k\Delta\varphi.$$

Плотность вероятностей представляет собой симметричную функцию, которая при изменении величины ρ от нуля до бесконечности меняется от равномерной плотности распределения до дельтообразной.

Действительно, если $\rho=0$, то $\omega(\Delta\varphi)=1/2\pi$, $-\pi\le\Delta\varphi\le\pi$, при этом дисперсия величины $\Delta\varphi$ равна $\sigma_\varphi^2 = \pi^2/3$, математическое ожидание — нулю. Очевидно, что равномерная плотность распределения вероятности может быть использована в некоторых случаях и при ρ<<1. Если ρ>>1, то плотность распределения переходит в нормальную [4]:

$$\omega(\Delta\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\varphi^2}} \exp\left(-\frac{\Delta\varphi^2}{2\sigma_\varphi^2}\right), \ \sigma_\varphi^2 = 1/\rho.$$

При $\rho \to \infty$ плотность распределения вероятности переходит в дельта-функцию: $\omega(\Delta\varphi) = \delta(\Delta\varphi)$. Этот случай соответствует идеальному когерентному приему с фиксированной нулевой фазовой ошибкой.

При промежуточных значениях ρ дисперсия может быть вычислена по формуле

$$\sigma_\varphi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \frac{I_k(\rho)}{I_0(\rho)}.$$

Для практически важных случаев можно ограничиться условием ρ >> 1 и, следовательно, использовать формулы $\rho = 1/\sigma_\varphi^2$ и $\sigma_\varphi^2 = 1/\rho$. Возникающая при этом погрешность незначительна. Так, при ρ = 10 дБ по точной формуле $\sigma_\varphi^2 = 1{,}056551 \cdot 10^{-1}$ (среднеквадратическое отклонение (СКО) $\sigma_\varphi = 3{,}250462 \cdot 10^{-1}$ рад), в то время как при гауссовой аппроксимации $\sigma_\varphi^2 = 1/\rho = 10^{-1}$ ($\sigma_\varphi = 3{,}162278 \cdot 10^{-1}$ рад) — относительная погрешность дисперсии 0,057; при ρ = 20 дБ по точной формуле $\sigma_\varphi^2 = 1{,}117258 \cdot 10^{-2}$ ($\sigma_\varphi = 1{,}057004 \cdot 10^{-1}$ рад), а по формуле $\sigma_\varphi^2 = 1/\rho = 10^{-2}$ ($\sigma_\varphi = 10^{-1}$ рад) — относительная погрешность дисперсии 0,117. При дальнейшем увеличении отношения сигнал/шум погрешность растет.

В дальнейшем обозначим фазовую ошибку φ, т. е. $\varphi \equiv \Delta\varphi$. Используя свойства плотности распределения вероятностей, можно показать, что при четном $n \in \mathbf{N}$ и произвольном $a \in \mathbf{R}$

$$\int_0^{\pi/n} \sum_{m=1}^{n/2} \left[\omega\left(\varphi + (2m-1)\frac{\pi}{n}\right) + \omega\left(\varphi - (2m-1)\frac{\pi}{n}\right)\right] = \frac{1}{2},$$

$$\int_0^a \omega(\varphi) d\varphi = \int_0^a \omega(\varphi - a) d\varphi.$$

Приведем формулу вероятности ошибки для ФМ-2 [1, 2] и получим новые соотношения для вероятности символьной и битовой вероятностей ошибок когерентного приема сигнальных конструкций АФМ-2 в канале с детерминированными параметрами и белым шумом при учете фазовой ошибки в контуре ФАПЧ. Общая методика вычисления состоит в том, что на первом этапе находится битовая (индекс «*b*») и (или) символьная (индекс «*e*») вероятности ошибок $P_{b/e}\left(h_{bc}^2, \varphi\right)$ при фиксированной фазовой ошибке, а на втором — ее математическое ожидание, т. е.

$$P_{b/e}\left(h_{bc}^2\right) = \int_{-\pi}^{\pi} P_{b/e}\left(h_{bc}^2, \varphi\right) \omega(\varphi) d\varphi, \qquad (2а)$$

где ω(φ) — плотность распределения вероятностей фазовой ошибки (в общем случае произвольная, но в данной статье рассматривается распределение Тихонова). Следовательно:

$$P_{b/e}\left(h_{bc}^2, \rho\right) = \frac{1}{2\pi I_0(\rho)} \int_{-\pi}^{\pi} P_{b/e}\left(h_{bc}^2, \varphi\right) \exp(\rho\cos\varphi) d\varphi, \qquad (2б)$$

где в аргумент вероятности ошибки введен параметр ρ, который существенным образом (это будет показано позднее), наряду с отношением сигнал/шум h_{bc}^2, влияет на величину вероятности ошибки $P_{b/e}\left(h_{bc}^2, \rho\right)$.

Полученные соотношения (2) могут быть использованы также для канала с общими замираниями, ненулевой фазовой ошибкой и аддитивным белым гауссовым шумом [1, 2, 5, 6]:

$$\tilde{P}_{b/e}\left(h_{bc}^2, \rho\right) = \int_0^{\infty} \left(\int_{-\pi}^{\pi} P_{b/e}\left[\alpha\left(h_{bc}^2, \varphi\right)\mu\right] \omega(\varphi) d\varphi\right) \omega(\mu) d\mu, \qquad (3)$$

где знак «~» подчеркивает, что формула вероятности ошибки получена для канала связи с общими замираниями; $\alpha\left(h_{bc}^2, \varphi\right) = \chi(\varphi)\sqrt{\frac{2h_{bc}^2}{m_2}}$, величина χ(φ), $\Delta\varphi \in [-\pi, \pi]$ определяется в зависимости от сигнальной конструкции и фиксированной фазовой ошибки (ее величина влияет на знак χ(φ)); ω(μ) — плотность распределения коэффициента передачи канала связи и m_2 — начальный второй момент.

Плотность распределения коэффициента передачи канала связи

При определении вероятности ошибки в канале с общими замираниями будет рассматриваться закон распределения вероятностей Райса—Накагами случайного коэффициента передачи канала μ [5, 6]:

$$\omega(\mu) = \frac{(\beta\mu)^p}{\gamma^{p-1}} \exp\left(-\frac{\gamma^2}{2\beta} - \frac{\beta}{2}\mu^2\right) I_{p-1}(\gamma\mu), \ \mu \ge 0,$$

где $p > 0$, $\gamma \ge 0$, $\beta > 0$ — параметры распределения, а $I_{p-1}(\gamma\mu)$ — функция Бесселя от мнимого аргумента порядка $(p-1)$ [7, 8].

Распределение Райса—Накагами при соответствующем выборе параметров *p*, γ, β совпадает с распределениями Релея, Райса и Накагами (m-распределение). Так, при $p = 1$, $\gamma = 0$, $\beta = 1/\sigma^2$ получаем распределение Релея; при $p = 1$, $\gamma = \mu_0/\sigma^2$, $\beta = 1/\sigma^2$ — распределение Райса, а при значениях параметров $p = m$, $\gamma = 0$, $\beta = 2m/\overline{\mu^2}$ — распределение Накагами. При выборе значения $\gamma = 0$ следует учитывать, что

$$\lim_{\gamma\to 0}\frac{I_{p-1}(\gamma\mu)}{\gamma^{p-1}}=\frac{1}{2^{p-1}}\frac{1}{\Gamma(p)},$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция [7, 8].

Второй момент плотности распределения Райса—Накагами

$$\overline{\mu}_2 = m_2 = \frac{2p}{\beta}\exp\left(-\frac{\gamma^2}{2\beta}\right){}_1F_1\left(p+1;\ p;\ \frac{\gamma^2}{2\beta}\right),$$

в частности, для распределения Релея $\overline{\mu^2}=2\sigma^2$, Райса — $\overline{\mu^2}=\mu_0^2+2\sigma^2$.

В общем случае формулы для вероятности ошибки АФМ-2, в том числе при ненулевой фазовой ошибке, будут содержать линейную комбинацию функций Гаусса

$$Q(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^{\infty}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\mathrm{d}t,$$

где $Q(-x) = 1 - Q(x)$ [5, 6]. При практических расчетах можно использовать представление этой функции в виде интеграла с конечными интервалами:

$$Q(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\exp\left(-\frac{x^2}{2\cos^2\psi}\right)\mathrm{d}\psi,\ x\geq 0,$$

либо функцию erfc(x), $Q(x)=\frac{1}{2}\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$. В канале с общими замираниями Райса—Накагами [5, 6]

$$\int_0^{\infty}Q(\alpha\mu)\omega(\mu)\mathrm{d}\mu=2\mathscr{H}_p\left(\sqrt{\frac{\gamma^2\alpha^2}{\beta(\alpha^2+\beta)}},\sqrt{\frac{\alpha^2}{\alpha^2+\beta}},+\infty\right),\quad(4а)$$

где $\alpha^2=\frac{2gh_{bc}^2}{m_2}$;

$$\mathscr{H}_p(z,b,\eta)=\frac{(1-b^2)^p}{2\pi}\int_0^{\eta}\frac{1}{1+x^2}\frac{1}{(1+b^2x^2)^p}\times$$
$$\times\exp\left(-\frac{z^2}{2}\frac{1+x^2}{1+b^2x^2}\right)\mathrm{d}x,$$
$$\eta\geq 0,\ \ 0\leq b^2\leq 1,\ \ p\geq 0,$$

здесь $b^2=\frac{\alpha^2}{\alpha^2+\beta}$, $z^2=\frac{\gamma^2}{\beta}\frac{\alpha^2}{\alpha^2+\beta}=\frac{\gamma^2}{\beta}b^2$. В другой форме, более удобной для расчетов на ЭВМ [5, 6]:

$$\mathscr{H}_p(z,b,\eta)=\frac{(1-b^2)^p}{2\pi}\int_0^{\mathrm{arctg}(\eta)}\times$$
$$\times\frac{\cos^{2p}t}{(1-(1-b^2)\sin^2 t)^p}\exp\left(-\frac{z^2}{2}\frac{1}{1-(1-b^2)\sin^2 t}\right)\mathrm{d}t.$$

Наиболее общим законом распределения замираний является *четырехпараметрический закон распределения* вероятностей случайного коэффициента передачи канала μ [5]:

$$\omega(\mu_c,\mu_s)=\frac{1}{2\pi\sigma_c\sigma_s}\exp\times$$
$$\times\left[-\frac{1}{2\sigma_c^2}(\mu_c-m_c)^2-\frac{1}{2\sigma_s^2}(\mu_s-m_s)^2\right],$$
$$\mu=\sqrt{\mu_c^2+\mu_s^2},$$

где m_c и m_s — математические ожидания квадратурных составляющих μ_c и μ_s; $\mu_0=\sqrt{m_c^2+m_s^2}$ — регулярная составляющая коэффициента передачи; σ_c^2 и σ_s^2 — дисперсии квадратурных составляющих μ_c и μ_s. Наряду с параметрами m_c, m_s, σ_c^2, σ_s^2 удобно использовать параметры, имеющие наглядный физический смысл.

1. Отношение дисперсий квадратурных составляющих σ_c^2 и σ_s^2 — величина $q^2=\sigma_c^2/\sigma_s^2$. Коэффициент q^2 характеризует асимметрию канала по дисперсиям. Без ограничения общности рассматриваются значения q^2 из интервала [0, 1], т. е. $0\leq q^2\leq 1$.

2. Фазовый угол $\varphi_0=\mathrm{arctg}\frac{m_s}{m_c}$ или $\mathrm{tg}\varphi_0=\frac{m_s}{m_c}$.

3. Отношение средних мощностей регулярной и флуктуирующей частей сигнала $\gamma^2=\frac{m_c^2+m_s^2}{\sigma_c^2+\sigma_s^2}=\frac{\mu_0^2}{\sigma_c^2+\sigma_s^2}$. Это выражение удобнее представить в виде $\gamma^2=\frac{2q^2}{1+q^2}\frac{\mu_0^2}{2\sigma_c^2}=\frac{2q^2}{1+q^2}\gamma_0^2$, где $\gamma_0^2=\frac{\mu_0^2}{2\sigma_c^2}$ — величина, характеризующая глубину замираний в канале с райсовскими замираниями ($q^2 = 1$). Коэффициент $\frac{2q^2}{1+q^2}\in[0,1]$ характеризует уменьшение γ^2 по сравнению с величиной γ_0^2. При релеевских замираниях $\gamma_0^2=0$, в канале без замираний $\gamma_0^2\to\infty$ (присутствует только регулярная составляющая). Справедливы следующие соотношения:

$$\gamma^2=\frac{m_c^2}{\sigma_c^2}\frac{q^2}{1+q^2}\frac{1}{\cos^2\varphi_0}$$

или

$$\gamma^2 = \frac{m_s^2}{\sigma_s^2}\frac{1}{1+q^2}\frac{1}{\sin^2\varphi_0}.$$

4. Средний квадрат коэффициента передачи (начальный момент второго порядка)

$$m_2 = \mu_0^2 + \sigma_c^2 + \sigma_s^2$$

или

$$m_2 = 2\sigma_c^2\left(1+\frac{\mu_0^2}{2\sigma_c^2}+\frac{1-q^2}{2q^2}\right) = 2\sigma_c^2\left(1+\gamma_0^2+\frac{1-q^2}{2q^2}\right),$$

$q^2 \neq 0$. Если $q^2 = 0$, то $\sigma_c^2 = 0$, а величина σ_s^2 является неопределенной, либо $\sigma_s^2 \to \infty$, а величина σ_c^2 является неопределенной.

В случае четырехпараметрических замираний [5]

$$\int_0^\infty Q(\alpha\mu)\omega(\mu)\mathrm{d}\mu = 2\mathscr{S}(z_c, z_s, b_c, b_s, +\infty), \quad (4б)$$

где

$$\mathscr{S}(z_c, z_s, b_c, b_s, \eta) =$$
$$= \frac{\sqrt{1-b_c^2}\sqrt{1-b_s^2}}{2\pi}\int_0^\eta \frac{1}{1+x^2}\frac{1}{\sqrt{1+b_c^2x^2}}\frac{1}{\sqrt{1+b_s^2x^2}}\times$$
$$\times\exp\left(-\frac{z_c^2}{2}\frac{1+x^2}{1+b_c^2x^2}-\frac{z_s^2}{2}\frac{1+x^2}{1+b_s^2x^2}\right)\mathrm{d}x$$

и

$$z_c^2 = \frac{2gh_{bc}^2m_c^2}{m_2+2gh_{bc}^2\sigma_c^2} = \frac{m_c^2}{\sigma_c^2}\frac{g\tilde{h}_{bc}^2}{1+g\tilde{h}_{bc}^2};$$

$$z_s^2 = \frac{2gh_{bc}^2m_s^2}{m_2+2gh_{bc}^2\sigma_s^2} = \frac{m_s^2}{\sigma_s^2}\frac{g\tilde{h}_{bc}^2}{q^2+g\tilde{h}_{bc}^2};$$

$$b_c^2 = \frac{g\tilde{h}_{bc}^2}{1+g\tilde{h}_{bc}^2}; \quad b_s^2 = \frac{g\tilde{h}_{bc}^2}{q^2+g\tilde{h}_{bc}^2}.$$

Здесь определено, что

$$\tilde{h}_{bc}^2 = \left(1+\gamma_0^2+\frac{1-q^2}{2q^2}\right)^{-1} h_{bc}^2,$$

т. е.

$$h_{bc}^2[\text{дБ}] = \tilde{h}_{bc}^2[\text{дБ}] + 10\lg\left(1+\frac{1+q^2}{2q^2}\gamma^2+\frac{1-q^2}{2q^2}\right)$$

и

$$\frac{m_c^2}{\sigma_c^2} = \cos^2\varphi_0\frac{1+q^2}{q^2}\gamma^2, \quad \frac{m_s^2}{\sigma_s^2} = \sin^2\varphi_0(1+q^2)\gamma^2.$$

Для численных расчетов на ЭВМ удобнее использовать альтернативное определение $\mathscr{S}$-функции:

$$\mathscr{S}(z_c, z_s, b_c, b_s, \eta) = \frac{\sqrt{1-b_c^2}\sqrt{1-b_s^2}}{2\pi}\times$$
$$\times\int_0^{\mathrm{arctg}(\eta)} \frac{\cos^2 t}{\sqrt{1-\left(1-b_c^2\right)\sin^2 t}\sqrt{1-\left(1-b_s^2\right)\sin^2 t}}\exp\times$$
$$\times\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z_c^2}{1-\left(1-b_c^2\right)\sin^2 t}+\frac{z_s^2}{1-\left(1-b_s^2\right)\sin^2 t}\right)\right]\mathrm{d}t.$$

Окончание следует.

Литература

1. **Прокис Дж.** Цифровая связь: Пер. с англ. / Под ред. Д. Д. Кловского. М.: Радио и связь, 2000. 800 с.
2. **Скляр Б.** Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение: Пер. с англ. М.: Вильямс, 2003. 1104 с.
3. **Коржик В. И.** Расширенное преобразование Гильберта и его применение в теории сигналов // Проблемы передачи информации. 1969. Т. 5. Вып. 4. С. 3–18.
4. **Тихонов В. И., Миронов М. А.** Марковские процессы. М.: Сов. радио, 1977. 488 с.
5. **Савищенко Н. В.** Помехоустойчивость модемов с двумерными сигнальными конструкциями по точным формулам вероятности ошибки в канале без замираний и с общими четырехпараметрическими замираниями // Информационно-управляющие системы. 2007. № 4. С. 44–54.
6. **Савищенко Н. В.** Многомерные сигнальные конструкции: их частотная эффективность и помехоустойчивость приема: Монография / Под ред. Д. Л. Бураченко. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2005. 420 с.
7. **Справочник** по специальным функциям / Под ред. А. Абрамовица и И. Стиган. М.: Наука, 1979. 832 с.
8. **Попов Б. А., Теслер Г. С.** Вычисление функций на ЭВМ: Справочник. Киев: Наук. думка, 1984. 600 с.