

УДК 629.735.33

МЕТОД ПОВЫШЕНИЯ КАЧЕСТВА НАВЕДЕНИЯ БОЛЬШОГО РАДИОТЕЛЕСКОПА МИЛЛИМЕТРОВОГО ДИАПАЗОНА С АДАПТИВНОЙ ЗЕРКАЛЬНОЙ СИСТЕМОЙ

В. В. Дубаренко,

доктор техн. наук, профессор

А. Ю. Кучмин,

аспирант

Институт проблем машиноведения Российской академии наук

Рассматривается задача повышения качества наведения электрической оси зеркальной системы крупного полноповоротного радиотелескопа миллиметрового диапазона посредством добавления в контур управления малоинерционного элемента — облучателя, установленного на адаптивную платформу. Предложен обобщенный критерий качества управления зеркальной системой радиотелескопа. Рассмотрена методика синтеза системы управления адаптивной платформой.

The problem of improving the quality of pointing an electric axis of a millimeter wave large radiotelescope dish system by including a receiver installed on an adaptive platform is discussed in this paper. The generalized criterion of the quality of a radiotelescope dish system control system is suggested. A technique of an adaptive platform control system synthesis is discussed.

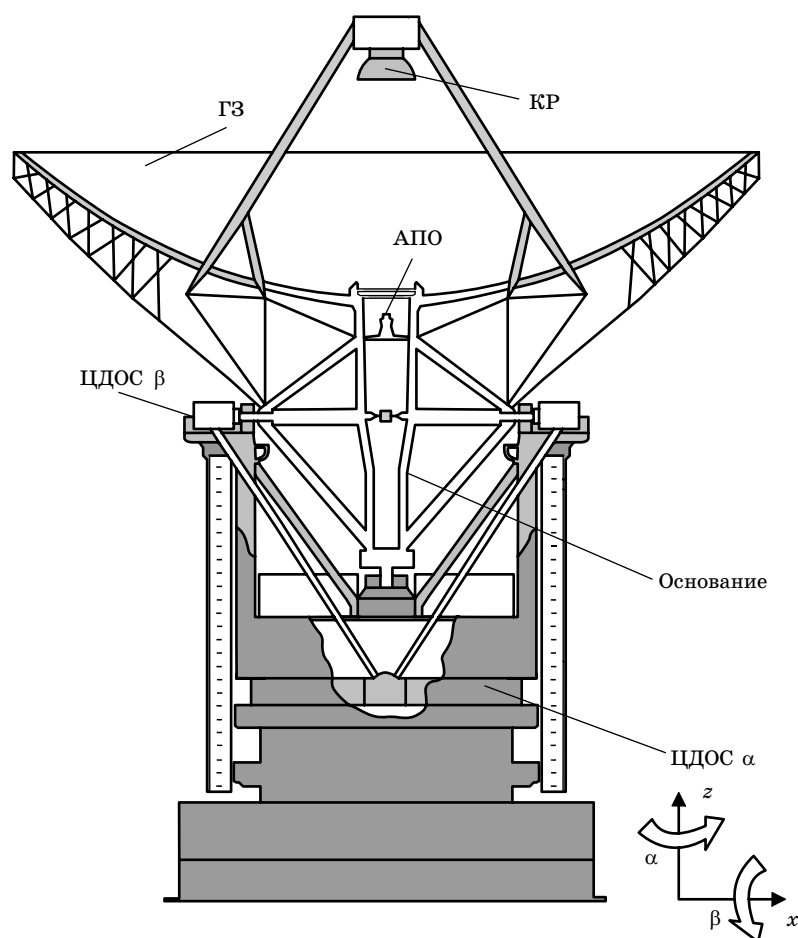
Введение

Развитие современной радиоастрономии в миллиметровом диапазоне радиоволн возможно лишь на основе полноповоротных зеркальных радиотелескопов (РТ), обеспечивающих получение больших коэффициентов усиления и высокой разрешающей способности. В настоящее время в странах Европы и в США идут работы над созданием и модернизацией полноповоротных РТ с диаметром главного зеркала более 50 м для слежения за удаленными космическими объектами, излучающими в миллиметровом диапазоне радиоволн. В нашей стране наиболее перспективным подобным проектом является строительство 70-метрового радиотелескопа РТ-70 с рабочей длиной волны 1–3 мм на плато Суффа в Узбекистане.

Увеличение диаметров зеркал и уменьшение рабочих длин волн (1–10 мм) повышает требования к точности профилей отражающих поверхностей и их качеству. На длине волны 1 мм среднеквадратическое отклонение формы зеркала от теоретического не должно превышать 100 мкм. При наведении подобных РТ на космические источники излучения элементы зеркальной системы (ЗС) деформируются из-за действия гравитационных

сил, неравномерного нагрева и охлаждения, ветровой нагрузки. Поэтому эффективный прием миллиметровых волн малой мощности возможен только на крупных радиотелескопах с адаптивными ЗС, способными скомпенсировать эти деформации. Например, на 100-метровом РТ GBT (США) главное зеркало (ГЗ) выполнено в виде параболоида, составленного из отдельных щитов. Положение щитов ГЗ меняется при помощи электромеханических актуаторов так, чтобы обеспечить минимальное среднеквадратическое отклонение от рассчитанного аппроксимирующего параболоида (АП). Наведение ГЗ осуществляется по углу азимута и углу места при помощи двух электроприводов. Положение контррефлектора (КР) изменяется при помощи пятиступенного привода так, чтобы фокус и фокальная ось ГЗ и фокус и фокальная ось КР совмещались с минимальными ошибками. Пятидесятиметровый РТ GTM (Мексика) помимо адаптивных ГЗ и КР имеет перископическое зеркало, установленное на гидравлическом приводе и направляющее принимаемый сигнал на выбранный приемник.

Радиотелескоп РТ-70 (рис. 1) представляет собой двухзеркальную систему схемы Грегори с фо-



■ **Рис. 1.** Радиотелескоп РТ-70: α — угол азимута; β — угол места; ЦДОС α — цифровой датчик обратной связи азимутальной оси; ЦДОС β — цифровой датчик обратной связи угломестной оси; АПО — адаптивная платформа облучателя

кусным расстоянием 24,2 м. Имеет адаптивное ГЗ — параболоид вращения диаметром 70 м, составленное, как и у GBT, из щитов, установленных на электромеханические актуаторы. Наведение ГЗ осуществляется по углу азимута и углу места при помощи двух электроприводов. КР оснащен пятиступенным приводом, позволяющим ему перемещаться по трем линейным и двум угловым координатам.

Коррекция поверхности ГЗ и перемещение КР — очень медленный процесс, позволяющий эффективно компенсировать весовые деформации и термодформации, но не обеспечивающий коррекцию деформаций, вызванных ветровой нагрузкой. Даже при отсутствии ветровой нагрузки вершина и фокус АП отличаются от начального недеформированного параболоида. Поэтому необходимо перенаправить электромагнитное излучение (ЭМИ) в облучатель, установленный в старом фокусе. Было решено добавить в конструкцию малоинерционный элемент, компенсирующий как статические, так и динамические ошибки наведения. Рассматривались два альтернативных варианта: первый — использовать перископическое зеркало по анало-

гии с GTM; второй — использовать подвижный облучатель. В ходе исследований было установлено [1], что перенаправление ЭМИ в стационарный облучатель посредством перископического зеркала вызывает большие потери мощности принимаемого сигнала. Более предпочтительным является использование подвижного облучателя, так как в этом случае потерь намного меньше.

Исследования механических свойств пространственной металлоконструкции (ПМК) [2] и электродинамических свойств ЗС РТ-70 [1] позволяют сформулировать требования к приводу облучателя (таблица). Облучатель должен перемещаться по трем линейным (x , y и z) и двум угловым (β и θ)

■ **Требования к перемещениям облучателя при слежении**

Частота колебаний 2,5 Гц					
мм			угл. мин		
x	y	z	β	θ	α
47	47	10	6,7	6,7	—

координатам, где β — поворот относительно оси x , а θ — поворот относительно оси y . Облучатель должен отслеживать изменение направления ЭМИ, вызванное ошибками наведения ГЗ и КР, и положение вторичного фокуса при различных профилях отражающей поверхности ГЗ.

Обобщенный критерий качества наведения ЗС РТ

Для РТ-70 введены ошибки наведения ЗС на космический источник радиоизлучения (КИР):

- 1) угловое рассогласование между фокальной осью ГЗ, проходящей через вершину и фокус АП ГЗ, и линией визирования КИР $\Phi_{\text{КИР}}^{5\text{ф.о}}$;
- 2) угловое рассогласование между фокальной осью КР и фокальной осью ГЗ $\Phi_{7\text{ф.о}}^{5\text{ф.о}}$;
- 3) линейное рассогласование фокусов АП ГЗ и аппроксимирующего эллипсоида КР r_{7f}^{5f} ;
- 4) линейное рассогласование между фазовым центром (ФЦ) вблизи вторичного фокуса и фокусом приемника $r_{\text{пф}}^{7\text{ФЦ}}$;
- 5) угловое рассогласование между системой координат (СК) ФЦ вблизи вторичного фокуса и СК фокуса приемника $\Phi_{\text{пф}}^{7\text{ФЦ}}$.

Обычно наведение РТ рассматривалось как выставление поверхностей ЗС в заданные положения, рассчитываемые исходя из данных о траектории КИР. При этом каждый привод считался независимым и замыкался по своему датчику. В результате в системе наведения РТ отсутствовала главная обратная связь. Такой подход был приемлем при приеме сигналов с большими длинами волны (метровыми, дециметровыми). Для миллиметрового диапазона необходимо введение главной обратной связи.

При наличии мощного источника излучения возможно использовать его сигнал для определения ошибок наведения. Известны методы автосопровождения по сигналу, такие как коническое сканирование, метод равносигнальной зоны и т. д. Отличительной особенностью РТ является предельно малая мощность принимаемых сигналов. Длительное время экспозиции (от нескольких часов до нескольких недель) и длительное время обработки сигналов (обычно после серии наблюдений делается предположение о наличии или отсутствии КИР) не позволяют применить ни один из известных методов автосопровождения при наблюдении за КИР. Поэтому была предложена электродинамическая модель (ЭДМ) ЗС для имитирования процесса автосопровождения во время наблюдений. В качестве обобщенного критерия качества предлагается использовать значение мощности принимаемого сигнала как функцию от координат КИР и перечисленных выше ошибок наведения:

$$J = \Phi \left(\alpha_{\text{КИР}}, \beta_{\text{КИР}}, \Phi_{\text{КИР}}^{5\text{ф.о}}, \Phi_{7\text{ф.о}}^{5\text{ф.о}}, r_{7f}^{5f}, r_{\text{пф}}^{7\text{ФЦ}}, \Phi_{\text{пф}}^{7\text{ФЦ}} \right),$$

где $\alpha_{\text{КИР}}$ — угол азимута КИР; $\beta_{\text{КИР}}$ — угол места КИР. Тогда цель управления может быть сформу-

лирована как максимизация J при ограничениях на перемещение элементов ЗС: $\Delta q^{\min} < \Delta q < \Delta q^{\max}$, $\Delta \dot{q}^{\min} < \Delta \dot{q} < \Delta \dot{q}^{\max}$, где Δq — отклонения центров инерции элементов ЗС от юстировочных положений; Δq^{\min} — минимальные предельные значения для Δq ; Δq^{\max} — максимальные предельные значения для Δq ; $\Delta \dot{q}$ — скорости отклонения центров инерции элементов ЗС от юстировочных положений; $\Delta \dot{q}^{\min}$ — минимальные предельные значения для $\Delta \dot{q}$; $\Delta \dot{q}^{\max}$ — максимальные предельные значения для $\Delta \dot{q}$. Максимизирование J означает, что система управления не только выставляет отражающие поверхности ЗС, но и оптимизирует их положение для наилучшего приема сигнала. Функционал J находится как аппроксимация зависимостей мощности сигнала от ошибок наведения (или от перемещений элементов ЗС) рядом. Коэффициенты разложения определяются при моделировании влияния положения и профилей элементов ЗС на распределение поля в ЗС РТ и верифицируются при автосопровождении мощных источников излучения. Функционал J имеет максимальное значение, равное единице, в том случае, когда все ошибки наведения равны нулю, что соответствует идеальному случаю. На практике J всегда меньше единицы и различным комбинациям ошибок могут соответствовать одинаковые значения J .

Уравнения движения адаптивной платформы облучателя

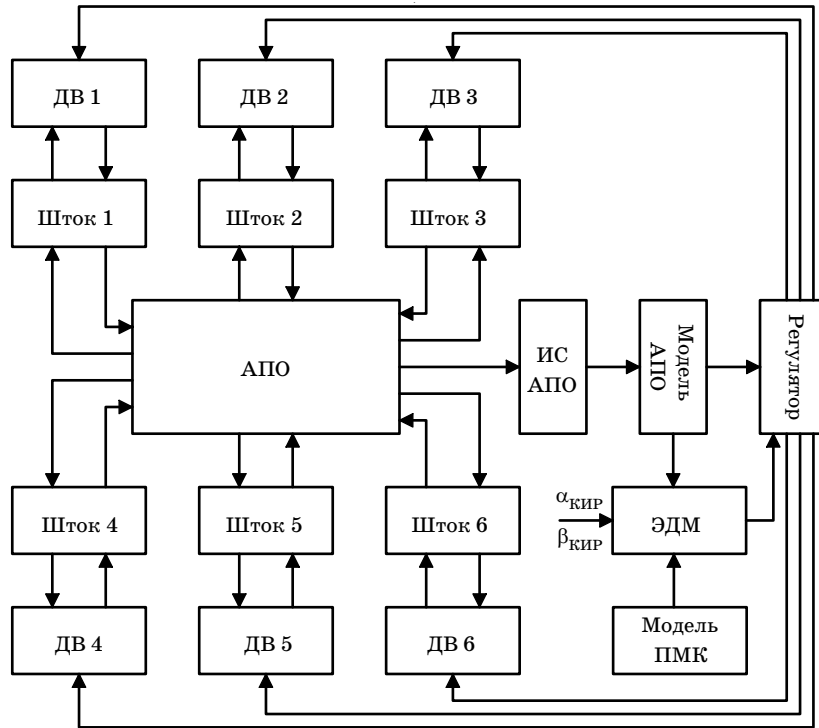
Облучатель установлен на подвижную платформу, перемещаемую шестью толкателями (рис. 2). Каждый толкатель состоит из штанги, электродвигателя и шарикоподшипникового винтового домкрата, позволяющего изменять длину толкателя посредством выдвижения штанги. Каждый толкатель соединен с платформой и жестким элементом основания двумя двухстепенными шарнирами, позволяющими толкателям свободно вращаться по двум углам.

Примем следующую расчетную схему: платформу с расположенным на ней облучателем будем считать абсолютно твердым телом; толкатели имеют массу намного меньшую, чем платформа и облучатель, поэтому будем считать их безмассовыми, а также упруго деформируемыми.

Для РТ определена базовая система координат $E_0 = (\mathbf{o}_0, [e^0])$, где индекс 0 служит для обозначения СК; \mathbf{o}_0 — вектор начала СК; $[e^0]$ — три базисных вектора единичной длины (базис), направления которых совпадают с направлением осей СК. Введем подвижные декартовы системы координат: $E_{\text{п}} = (\mathbf{o}_{\text{п}}, [e^{\text{п}}])$, помещенную в центре инерции АПО и связанную с ней; $E_{\text{ос}} = (\mathbf{o}_{\text{ос}}, [e^{\text{ос}}])$, помещенную в центре инерции основания РТ и связанную с ней; $E_{\text{пс}} = (\mathbf{o}_{\text{пс}}, [e^{\text{пс}}])$, определяющую начальное положение АПО.

Уравнения движения АПО имеют вид:

$$\dot{V}_{\text{п}} = \Theta_{\text{п}}^{-1} [F_{\text{п}} + G_{\text{п}} - \Phi_{\text{п}} \Theta_{\text{п}} V_{\text{п}}],$$



■ Рис. 2. Адаптивная платформа облучателя: ДВ — двигатель; ИС АПО — измерительная система положения АПО

$$\begin{aligned} \dot{q}_n &= \mathbf{M}_n^{-1} [V_n - \mathbf{L}_n^T \mathbf{M}_{oc} \dot{q}_{oc}], \\ G_n &= [c_n^T c_{oc}^T m_n g_0; 0; 0; 0], \\ g_0 &= [0, 0, -9, 8]^T, \quad q_n = [r_n^{nc, pc}; \varphi_n], \\ e_{ши}^n &= c_n^T \frac{r_{nc}^{oc, oc} + r_n^{nc, pc} + c_n r_{ни}^{n, n} - r_{ши}^{oc, oc}}{r_{nc}^{oc, oc} + r_n^{nc, pc} + c_n r_{ни}^{n, n} - r_{ши}^{oc, oc}}, \\ \dot{q}_n &= [\dot{r}_n^{nc, pc}; \dot{\varphi}_n], \\ F_{ни} &= \begin{bmatrix} -C_{ши} e_{ши}^n \Delta l_{ci} - D_{ши} e_{ши}^n \Delta \dot{l}_{ci} \\ -\langle r_{ни}^{n, n} \rangle C_{ши} e_{ши}^n \Delta l_{ci} - \langle r_{ни}^{n, n} \rangle D_{ши} e_{ши}^n \Delta \dot{l}_{ci} \end{bmatrix}, \\ R_{двi} &= \frac{C_{ши} \Delta l_{ci} + D_{ши} \Delta \dot{l}_{ci}}{i_{редi}}, \\ \Delta l_{ci} &= \left| r_{nc}^{oc, oc} + r_n^{nc, pc} + c_n r_{ни}^{n, n} - r_{ши}^{oc, oc} \right| - \frac{\alpha_{двi}}{i_{редi}} - l_{ши}, \\ \Delta \dot{l}_{ci} &= e_{ши}^{n, T} \dot{r}_{ни}^{n, n} + e_{ши}^{n, T} c_n \langle r_{ни}^{n, n} \rangle^T \epsilon_n \dot{\varphi}_n - \frac{\Omega_{двi}}{i_{редi}}, \end{aligned}$$

где V_n — проекции линейных и угловых скоростей движения АПО в E_n относительно E_0 ; Θ_n — матрица инерции АПО как твердого тела [1]; F_n — проекции сил упругого взаимодействия в E_n , действующих на АПО; G_n — проекции силы тяжести в E_n ;

Φ_n — матрица, образованная из элементов V_n [1]; q_n и \dot{q}_n — обобщенные координаты и обобщенные скорости АПО; \mathbf{M}_n — матрица, определяющая переход от обобщенных скоростей к V_n [1]; \mathbf{L}_n — матрица преобразования СК от E_0 к E_n [1]; \dot{q}_{oc} — линейные и угловые скорости перемещения E_{oc} относительно E_0 ; \mathbf{M}_{oc} — матрица, определяющая переход от \dot{q}_{oc} к их проекциям в E_n ; c_n — матрица вращения, определяющая угловое положение E_n относительно E_{nc} ; c_{oc} — матрица вращения, определяющая угловое положение E_{oc} относительно E_0 ; $r_n^{nc, pc}$ — проекции вектора перемещения центра инерции АПО относительно начального положения в E_{nc} ; φ_n — три угла простейших вращений, определяющие угловое положение E_n относительно E_{nc} ; $e_{ши}^n$ — проекции в E_n вектора, задающего линию действия силы упругого взаимодействия i -го штока; $r_{nc}^{oc, oc}$ — линейные координаты E_{nc} в E_{oc} ; $r_{ни}^{n, n}$ — координаты точки крепления i -го штока на АПО в E_n ; $r_{ши}^{oc, oc}$ — координаты точки крепления i -го штока на основании в E_{oc} ; $\langle r_{ни}^{n, n} \rangle$ — кососимметрическая матрица, образованная из элементов $r_{ни}^{n, n}$; $C_{ши}$ и $D_{ши}$ — коэффициенты жесткости и демпфирования i -го штока; Δl_{ci} и $\Delta \dot{l}_{ci}$ — упругая деформация и скорость упругой деформации i -го штока; $i_{редi}$ — передаточное число редуктора; $R_{двi}$ — реакция на двигатель; $l_{ши}$ — начальная длина i -го штока; $\alpha_{двi}$ — угол поворота ротора двигателя; ϵ_n — матрица Эйлера; $\Omega_{двi}$ — угловая скорость двигателя.

Алгоритм управления адаптивной платформой облучателя

С помощью ЭДМ ЗС рассчитывается область пространства вблизи облучателя с максимальной интенсивностью ЭМИ. Выходом ЭДМ является система координат, образованная вектором Пойтинга в этой точке и векторами электрической и магнитной напряженности поля, положение которой задается тремя углами и тремя линейными координатами. Цель управления: перевести АПО из начального положения в желаемое, выданное ЭДМ. Для этого рассчитываются желаемые удлинения штоков актуаторов и подаются на отработку приводов. Кооперативное управление штоками представляет сложную задачу, решаемую только методами оптимального управления.

Основной проблемой при слежении АПО за ФЦ является предельно малый временной интервал, в течение которого необходимо определить управляющее воздействие. Хорошо разработаны методы управления, основанные на прямом методе Ляпунова, например, метод скоростного градиента и его модификации, подробно изложенные в работах А. Л. Фрадкова [3]. Для того чтобы обеспечить устойчивое сопровождение КИР, необходимо, чтобы траектория АПО в фазовом пространстве не выходила за линейные ограничения, рассчитываемые из параметров ЗС РТ. Метод скоростного градиента не учитывает ограничения, поэтому предложена его модификация.

Динамика АПО с учетом динамики электродвигателей как динамического объекта (ДО) описывается уравнениями $\mathbf{A}\ddot{e} + \mathbf{B}\dot{e} + \mathbf{C}e = \mathbf{D}u$, $e = y - y_g$, где e — векторная ошибка наведения по всем обобщенным координатам ДО; y — обобщенные координаты ДО; y_g — желаемые значения обобщенных координат ДО; u — управление; \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{D} — матрицы параметров ДО. Введены ограничения на фазовые координаты: y^{\max} , y^{\min} — максимальные и минимальные значения обобщенных координат; v^{\max} , v^{\min} — максимальные и минимальные значения обобщенных скоростей; U^{\max} — максимальные по модулю значения управляющих воздействий; e^{\max} — максимально допустимые по модулю значения ошибок управления. Решается задача обеспечения максимального быстродействия при линейных ограничениях. Модифицированная функция Ляпунова имеет вид

$$V(e, e_v, t) = e^T \Delta_e e + \delta_E E(e, e_v) + \sum_{i=1}^s \left[\exp(\delta_i^y \bar{y}^{\max}) + \exp(\delta_i^y \bar{y}^{\min}) + \exp(\delta_j^v \bar{v}^{\min}) + \exp(\delta_j^v \bar{v}^{\max}) \right] > 0,$$

где $e_v = \dot{e}$ — скорость изменения ошибки управления; Δ_e — диагональная матрица положительных весовых коэффициентов при ошибках наведения;

δ_E — весовой коэффициент при полной энергии механической системы; $E(e, \dot{e}) = 0,5\dot{e}^T \mathbf{A}\dot{e} + 0,5e^T \mathbf{C}e$ — полная энергия системы; \bar{y}^{\max} — отклонение текущего положения ДО от максимальных значений: $\bar{y}^{\max} = y_g - y^{\max} + e$; $\bar{y}^{\min} = y^{\min} - y_g - e$ — отклонение текущего положения ДО от минимальных значений y^{\min} ; $v_g = \dot{y}_g$; $\bar{v}^{\min} = v^{\min} - v_g - e_v$; $\bar{v}^{\max} = v_g - v^{\max} + e_v$; δ_i^y , δ_j^v — положительные весовые коэффициенты.

В дискретном виде функция Ляпунова имеет вид

$$V[k] = e[k]^T \Delta_e e[k] + \delta_E E[k] + \sum_{i=1}^s \left[\exp(\delta_i^y \bar{y}^{\max}[k]) + \exp(\delta_i^y \bar{y}^{\min}[k]) + \exp(\delta_j^v \bar{v}^{\min}[k]) + \exp(\delta_j^v \bar{v}^{\max}[k]) \right] > 0,$$

где k — номер такта. Исходя из прямого метода Ляпунова, для того чтобы система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы первая конечная разность $\Delta V[k] \leq 0$, а чтобы система имела максимальное быстродействие, необходимо, чтобы $\Delta V[k]$ имела минимальное значение.

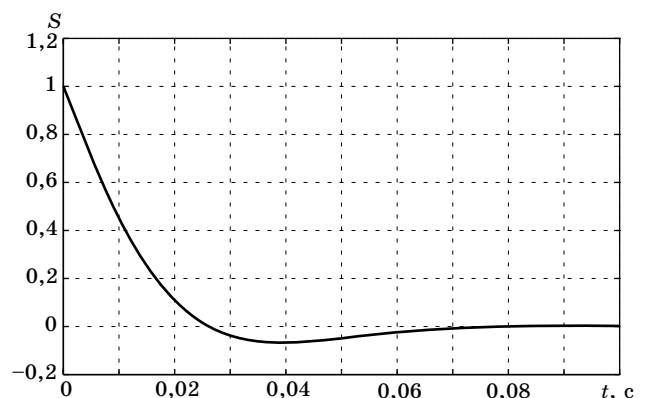
Уравнения ДО в дискретном виде в нормальной форме Коши имеют вид

$$\begin{bmatrix} e[k+1] \\ e_v[k+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e[k] \\ e_v[k] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 \\ \mathbf{H}_2 \end{bmatrix} u[k],$$

где Λ , \mathbf{H} — матрицы параметров дискретного ДО.

Управление, обеспечивающее минимум $DV[k]$, находится из условия $\nabla_{u[k]}(\Delta V[k]) = 0$:

$$u[k] = -\text{diag}(U^{\max}) \text{sign} \left(\left[\mathbf{H}_1^T \Delta_e \mathbf{H}_1 + 0,5\delta_E \mathbf{H}_1^T \mathbf{C} \mathbf{H}_1 + 0,5\delta_E \mathbf{H}_2^T \mathbf{A} \mathbf{H}_2 + \mathbf{H}_1 \Delta_e \mathbf{H}_1^T + 0,5\delta_E \mathbf{H}_1 \mathbf{C} \mathbf{H}_1^T + 0,5\delta_E \mathbf{H}_2 \mathbf{A} \mathbf{H}_2^T \right]^{-1} \times \left(\left[2\mathbf{H}_1^T \Delta_e \Lambda_{11} + \delta_E \mathbf{H}_1^T \mathbf{C} \Lambda_{11} + \delta_E \mathbf{H}_2^T \mathbf{A} \Lambda_{21} \right] e[k] + \right. \right.$$



■ Рис. 3. Нормированная ошибка наведения $S = e^T \Delta_e e$

$$+ \left[2\mathbf{H}_1^T \Delta_e \Lambda_{12} + \delta_E \mathbf{H}_1^T \Delta_e \Lambda_{12} + \delta_E \mathbf{H}_2^T \mathbf{A} \Lambda_{22} \right] e_v[k] + \\ + \mathbf{H}_1^T \delta^y \left[\exp(\delta^y \bar{y}^{\max}[k]) - \exp(\delta^y \bar{y}^{\min}[k]) \right] + \\ + \mathbf{H}_2^T \delta^v \left[\exp(\delta^v \bar{v}^{\max}[k]) - \exp(\delta^v \bar{v}^{\min}[k]) \right] \Bigg]$$

Коэффициенты Δ_e определяются как отношение диапазона обобщенной координаты к соответствующей максимально допустимой ошибке управления; δ_E – по качеству переходного процесса, например с использованием алгоритма СГВ, предложенного Биеле и Пауэллом [4]; δ_i^y и δ_j^v – из погрешности соблюдения ограничений.

На рис. 3 показана ошибка наведения АПО в режиме позиционирования из юстировочного положения в положение, соответствующее максимальным отклонениям из таблицы.

Заключение

1. Введение в контур управления РТ малоинерциального элемента ПЗ или АПО позволяет компенсировать ошибки наведения ГЗ и КР и снизить требования к точности их наведения.

Литература

1. Артеменко Ю. Н., Городецкий А. Е., Дубаренко В. В., Кучмин А. Ю. Проблемы визуализации космических источников радиоизлучения миллиметрового диапазона: Тез. докл. V Междунар. конф. по теории и технике антенн / Национальный Технический Университет Украины «Киевский Политехнический Институт». Киев, 2005.
2. Дубаренко В. В., Коновалов А. С., Кучмин А. Ю. Математические модели механических систем как

2. Перенаправление ЭМИ в стационарный облучатель посредством перископического зеркала вызывает большие потери мощности принимаемого сигнала. Более предпочтительным является использование подвижного облучателя, так как в этом случае потерь намного меньше.

3. Предложено использование электродинамической модели ЗС для имитирования процесса автосопровождения во время наблюдений. В качестве обобщенного критерия качества предлагается использовать значение мощности принимаемого сигнала как функцию от координат КИР и перчисленных выше ошибок наведения. Тогда цель управления может быть сформулирована как максимизация J при ограничениях на перемещение элементов ЗС.

4. Разработана математическая модель АПО.

5. Разработан алгоритм управления АПО с помощью прямого метода Ляпунова, позволяющий учитывать линейные ограничения на перемещения этих элементов путем добавления в классическую функцию Ляпунова штрафных функций, от расстояний до ограничений.

объектов управления: Учеб. пособие / ГУАП. СПб., 2007. 188 с.

3. Андриевский Б. Р., Фрадков А. Л. Избранные главы теории автоматического управления. СПб.: Наука, 1999.
4. Зангвилл У. Нелинейное программирование. Единый подход. М.: Сов. радио, 1973.