

УДК 621.391

ПРИМЕНЕНИЕ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПРИ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКЕ СИГНАЛОВ В СПУТНИКОВЫХ РАДИОКАНАЛАХ

А. В. Харченко,

канд. техн. наук, доцент

Военно-космическая академия им. А. Ф. Можайского

Рассматривается решение задачи различения широкополосных сигналов, принимаемых на фоне гауссовых коррелированных помех, с использованием алгоритмов цифровой обработки сигналов, основанных на применении ортогональных преобразований. Основное внимание уделено оценке влияния коррелированности отсчетов помехи на вероятность ошибки различения двух сигналов. Приводятся примеры снижения вероятности ошибки при применении основных ортогональных преобразований, обладающих декоррелирующими свойствами и имеющими быстрые алгоритмы вычисления.

The article deals with the problem of detecting wide-band signals received on the background of correlated Gauss noise. We use algorithms of digital processing based on orthogonal transformations. The influence of the noise correlation on the error probability of distinguishing different signals is studied. Examples when this probability is decreased after an application of orthogonal transformations with decorrelating properties are given.

В настоящее время применение в радиоэлектронных системах (РЭС) спутниковой связи методов цифровой обработки сигналов (ЦОС) приобретает большое практическое значение. Переход к методам ЦОС, практически заменяющим классические аналоговые методы, обусловлен неоспоримыми достоинствами цифровых устройств обработки сигналов по сравнению с аналоговыми. К этим достоинствам, прежде всего, относятся: миниатюризация функциональных узлов РЭС; высокая точность обработки сигналов; возможность реализации ряда операций и алгоритмов, принципиально нереализуемых с помощью аналоговых элементов.

Современные алгоритмы ЦОС можно разделить на алгоритмы цифровой фильтрации, реализующие обработку сигналов во временной области, и алгоритмы, основанные на применении ортогональных преобразований [1].

Алгоритмы, основанные на применении ортогональных преобразований, в настоящее время являются наиболее перспективными для решения новых задач, возникающих в связи с ужесточением требований, предъявляемых к таким параметрам спутниковых систем, как помехоустойчивость, точность и быстродействие. Известные довольно давно алгоритмы на основе ортогональных преобразований, до недавнего времени не находи-

ли практического применения в РЭС космических комплексов в силу значительных аппаратных затрат для их реализации. Благодаря техническому прогрессу в области разработки и создания элементной базы ЦОС, а именно высокопроизводительных цифровых сигнальных процессоров и программируемых логических интегральных схем большой емкости, многие известные сложные вычислительные алгоритмы (в том числе алгоритмы оптимальных и адаптивных методов приема сигналов) могут быть реализованы в практических устройствах РЭС.

Принцип применения ортогональных преобразований при ЦОС в спутниковых радиоканалах рассмотрим на примере одной из классических задач, решаемой при приеме сигналов задачи, – различения сигналов [2, 3].

На выходе линейной части приемного устройства присутствует аддитивная смесь

$$r(t) = s_m(t) + f(t), \quad (1)$$

где $s_m(t) \in \{s_i(t)\} = \{s_1(t), s_2(t)\}$ – один из двух сигналов $s_i(t)$, $i = 1, 2$, заданных на интервале $0 \leq t \leq T_s$; $f(t)$ – мешающее воздействие.

Задача приемного устройства – определить, какой из сигналов прототипов $s_i(t)$ больше всего «похож» на принятый сигнал $r(t)$.

В устройстве ЦОС принятая смесь (1) подвергается аналого-цифровому преобразованию, в результате чего формируется цифровая последовательность

$$r(n) = s_m(n) + f(n), \quad (2)$$

где $n = 1, \dots, N$ – номер отсчета.

Будем считать, что частота дискретизации определяется по теореме Котельникова, т. е. в соответствии с равенством

$$f_T = 2f_{\max},$$

где f_{\max} – максимально значимая частота в спектре $s_i(t)$.

Полученные в результате аналого-цифрового преобразования последовательности представим векторами в действительном векторном пространстве:

$$\mathbf{r}^T = [r(1) \ r(2) \ \dots \ r(N)];$$

$$\mathbf{s}_m^T = [s_m(1) \ s_m(2) \ \dots \ s_m(N)];$$

$$\mathbf{f}^T = [f(1) \ f(2) \ \dots \ f(N)].$$

Входное воздействие (2) при векторном представлении переписывается в виде

$$\mathbf{r} = \mathbf{s}_m + \mathbf{f}. \quad (4)$$

Согласно общепринятому подходу [2–4], оптимальный по критерию максимального правдоподобия приемник принимает решение о наличии того или иного сигнала в соответствии с правилом

$$\begin{matrix} s_1(t) \\ \|\mathbf{r} - \mathbf{s}_1\| < \\ > \\ s_2(t) \end{matrix} \|\mathbf{r} - \mathbf{s}_2\|, \quad (5)$$

где $\|\mathbf{r} - \mathbf{s}_i\|$ – норма (модуль, длина) вектора разности векторов \mathbf{r} и \mathbf{s}_i , $i = 1, 2$:

$$\|\mathbf{r} - \mathbf{s}_i\| = \sqrt{\sum_{n=1}^N (r(n) - s_i(n))^2}.$$

Правило (5) означает, что если $\|\mathbf{r} - \mathbf{s}_1\| < \|\mathbf{r} - \mathbf{s}_2\|$, то принимается решение о том, что передавался сигнал $s_1(t)$, если $\|\mathbf{r} - \mathbf{s}_1\| > \|\mathbf{r} - \mathbf{s}_2\|$ – то сигнал $s_2(t)$.

Для определенности будем считать, что передавался сигнал $s_1(t)$. В этом случае условие возникновения ошибки определяется неравенством

$$\|\mathbf{r} - \mathbf{s}_1\| > \|\mathbf{r} - \mathbf{s}_2\|, \quad (6)$$

которое после несложных преобразований приводится к виду

$$\Delta \mathbf{s}_2^T \Delta \mathbf{s}_2 < 2\Delta \mathbf{s}_2^T \mathbf{f}, \quad (7)$$

где $\Delta \mathbf{s}_2 = \mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1$.

Далее, для удобства последующего количественного анализа рассматриваемых процессов,

будем считать элементы вектора \mathbf{f} случайными гауссовыми (нормальными) величинами с нулевыми математическими ожиданиями $f(n) = v_1\{f(n)\} = 0$, $n = 1, \dots, N$, совместная плотность распределения которых определяется по формуле

$$w_N(\mathbf{f}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N \det \mathbf{K}_f}} e^{-\frac{1}{2} \mathbf{f}^T \mathbf{K}_f^{-1} \mathbf{f}},$$

где \mathbf{K}_f – корреляционная матрица мешающего воздействия, элементы которой $\rho_{fik} = v_1\{|f(i) - \bar{f}(i)| \times |f(k) - \bar{f}(k)|\}$, симметричные относительно главной диагонали, равны между собой: $\rho_{fik} = \rho_{fki}$; $v_1\{\dots\}$ – символ математического ожидания.

В этом случае правая часть неравенства (7) представляет собой линейную комбинацию нормально распределенных случайных величин $f(n)$ и, следовательно, также имеет нормальное распределение.

Обозначим правую часть неравенства (7) $\beta = 2\Delta \mathbf{s}_2^T \mathbf{f}$. Левая часть неравенства (7) представляет собой энергию E_Δ вектора $\Delta \mathbf{s}_2$:

$$E_\Delta = \Delta \mathbf{s}_2^T \Delta \mathbf{s}_2 = \sum_{n=1}^N (s_2(n) - s_1(n))^2. \quad (8)$$

Дисперсия случайной величины β определяется формулой

$$\mu_2[\beta] = \mu_2[2\Delta \mathbf{s}_2^T \mathbf{f}] = 4\Delta \mathbf{s}_2^T \mathbf{K}_f \Delta \mathbf{s}_2. \quad (9)$$

Зная математическое ожидание и дисперсию нормально распределенной случайной величины β , можно записать выражение для ее плотности вероятности

$$w(\beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu_2[\beta]}} e^{-\frac{\beta^2}{2\mu_2[\beta]}}. \quad (10)$$

С учетом введенных обозначений неравенство (7) преобразуется к виду

$$E_\Delta < \beta. \quad (11)$$

Следовательно, вероятность ошибки P_0 различения двух сигналов – это вероятность того, что случайная величина β превысит E_Δ . С учетом выражений (8) – (10) для вероятности ошибки P_0 можно записать

$$P_0 = \int_{E_\Delta}^{\infty} w(\beta) d\beta = Q\left(\frac{E_\Delta}{\sqrt{\mu_2[\beta]}}\right) = Q\left(\frac{\Delta \mathbf{s}_2^T \Delta \mathbf{s}_2}{\sqrt{4\Delta \mathbf{s}_2^T \mathbf{K}_f \Delta \mathbf{s}_2}}\right), \quad (12)$$

где $Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$ – гауссов интеграл ошибок.

Анализ выражения (12) показывает, что величина вероятности ошибки в значительной мере определяется корреляционной матрицей \mathbf{K}_f мешающего воздействия.

Будем считать, что мешающее воздействие представляет собой аддитивную смесь

$$f(t) = f_n(t) + f_J(t),$$

где $f_n(t)$ – белый гауссов шум с двусторонней спектральной плотностью мощности $G_{f_n}(f) = \frac{N_0}{2}$ для всех частот от $-\infty$ до $+\infty$; $f_J(t)$ – гауссова помеха с заданной мощностью P_J , двусторонней спектральной плотностью мощности $G_{f_J}(f) = \frac{J_1}{2}$ для всех частот в полосе от $-\frac{\nu f_T}{2}$ до $+\frac{\nu f_T}{2}$; $\nu \in [0, 1]$ – коэффициент, равный отношению ширины полосы частот, занимаемой помехой $f_J(t)$, к ширине полосы частот, занимаемой сигналом.

В этом случае вектор мешающего воздействия \mathbf{f} представляет собой сумму случайных векторов

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_n + \mathbf{f}_J,$$

компоненты которых $f_n(i)$ и $f_J(k)$ между собой некоррелированы:

$$\nu_1 \{f_n(i)f_J(k)\} = 0, \quad i, k = 1, \dots, N,$$

имеют нулевые средние значения и гауссово распределение.

Поэтому корреляционная матрица вектора \mathbf{f} определяется равенством

$$\mathbf{K}_f = \mathbf{K}_{f_n} + \mathbf{K}_{f_J},$$

где \mathbf{K}_{f_n} и \mathbf{K}_{f_J} – корреляционные матрицы векторов \mathbf{f}_n и \mathbf{f}_J соответственно.

С учетом введенных выше свойств случайных процессов $f_n(t)$ и $f_J(t)$ очевидно, что корреляционные матрицы \mathbf{K}_{f_n} и \mathbf{K}_{f_J} будут иметь вид

$$\mathbf{K}_{f_n} = \frac{N_0}{2} \mathbf{I};$$

$$\mathbf{K}_{f_J} = \frac{J_1 \nu}{2} \begin{bmatrix} 1 & a & \dots & b \\ a & 1 & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad (13)$$

где \mathbf{I} – единичная матрица; $a = \frac{\sin(\pi \nu)}{\pi \nu}$;

$$b = \frac{\sin(\pi(N-2)\nu)}{\pi(N-2)\nu}.$$

В этом случае выражение (12) для вероятности ошибки P_0 различения двух сигналов можно привести к виду

$$P_0 = Q\left(\sqrt{\frac{E_\Delta}{2(N_0 + J_0 \eta)}}\right), \quad (14)$$

где $J_0 = J_1 \nu$ – спектральная плотность средней мощности помехи, нормированная к занимаемой ею полосе частот, в дальнейшем будем полагать $J_0 =$

$$= \text{const}; \quad \eta = \frac{\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N r_{nm} (s_2(n) - s_1(n))(s_2(m) - s_1(m))}{\sum_{n=1}^N (s_2(n) - s_1(n))^2}$$

– обобщенный коэффициент корреляции, зависящий от ν и взаимной корреляции различаемых сигналов;

$r_{nm} = \frac{\sin(\pi \nu |n - m|)}{\pi \nu |n - m|}$ – коэффициенты корреляции компонент вектора \mathbf{f}_J (13).

При отсутствии помехи ($J_0 = 0$) формула (14) преобразуется к хорошо известной формуле [2–4], характеризующей помехоустойчивость когерентного приема сигналов:

$$P_0 = Q\left(\sqrt{E_\Delta / (2N_0)}\right),$$

которая для ортогональных сигналов равной энергии приводится к виду

$$P_0 = Q\left(\sqrt{E_s / N_0}\right), \quad (15)$$

где $E_s = \sum_{n=1}^N s_i^2(n)$ – энергия сигнала $s_i(n)$.

При наличии помехи с постоянной конечной мощностью: $P_J = \text{const}$, выражение (14) для ортогональных сигналов равной энергии удобно записать следующим образом:

$$P_0 = Q\left(\sqrt{\frac{E_s / N_0}{1 + \eta (E_s / N_0) (P_J / P_s) B^{-1}}}\right), \quad (16)$$

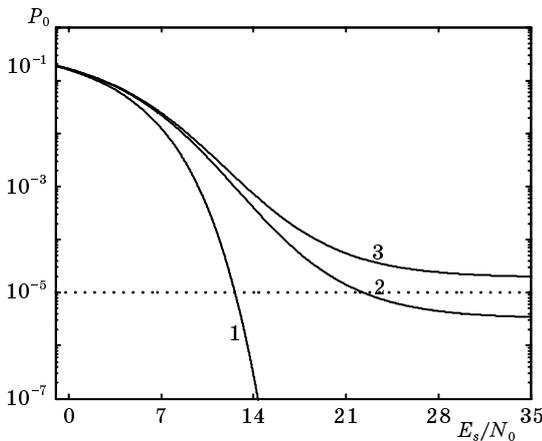
где $P_J = J_0 f_T$ – мощность помехи; $P_s = E_s T_s$ – мощность сигнала; B – коэффициент расширения спектра сигнала или, по-другому, база сигнала [4].

Очевидно, что при наличии такой помехи говорить о приемлемой для космических радиолоиной вероятности ошибки, например 10^{-5} , можно только при использовании широкополосных сигналов. По мере увеличения E_s / N_0 при заданном отношении мощностей P_J / P_s всегда будет существовать неснижаемая вероятность возникновения ошибки, вызванной наличием помех [4]:

$$\lim_{E_s / N_0 \rightarrow \infty} P_0 = Q\left(\sqrt{\frac{B}{\eta (P_J / P_s)}}\right). \quad (17)$$

Единственная возможность снизить вероятность ошибки состоит в увеличении базы сигнала B .

Кроме того, из формулы (17) очевидно, что наличие корреляции компонент вектора \mathbf{f}_J (13), т. е. когда множитель $\nu < 1$ и, следовательно, $\mu > 1$, может привести к значительному повышению вероятности ошибки.



■ Рис. 1. Зависимость вероятности ошибки P_0 различения двух сигналов от отношения сигнал/шум E_s/N_0 при фиксированных значениях отношения P_J/P_s

На графиках (рис. 1) кривая 1 соответствует случаю, когда помеха отсутствует и вероятность ошибки P_0 определяется по формуле (15). Кривая 2 соответствует случаю приема сигнала с базой $B = 511$, наличию некоррелированной помехи ($\nu = 1$) и отношению $P_J/P_s = 14$ дБ. Кривая 3 при тех же B и P_J/P_s соответствует случаю, когда помеха коррелированная ($\nu = 0,5$). Как видно из графиков, наличие коррелированной помехи приводит к повышению вероятности ошибки P_0 различения двух сигналов.

В устройстве ЦОС принятый вектор (4) без каких-либо потерь [2, 5], кроме повышения вычислительных затрат, может быть подвергнут ортогональному преобразованию

$$\mathbf{z} = \mathbf{\Psi}\mathbf{r} = \mathbf{a}_i + \xi, \quad (18)$$

где $\mathbf{a}_i = \mathbf{\Psi}\mathbf{s}_i$; $\xi = \mathbf{\Psi}\mathbf{f}$;

$$\mathbf{\Psi} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Psi}_1^T \\ \mathbf{\Psi}_2^T \\ \dots \\ \mathbf{\Psi}_N^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_1(1) & \psi_1(2) & \dots & \psi_1(N) \\ \psi_2(1) & \psi_2(2) & \dots & \psi_2(N) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \psi_N(1) & \psi_N(2) & \dots & \psi_N(N) \end{bmatrix}$$

– матрица ортогонального преобразования;

$\mathbf{\Psi}_j^T = [\psi_j(1) \psi_j(2) \dots \psi_j(N)]$, $j = 1, \dots, N$ – базисные векторы преобразования, которые для удобства будем считать вещественными и ортонормированными:

$$\sum_{n=1}^N \psi_j(n)\psi_k(n) = \mathbf{\Psi}_j^T \mathbf{\Psi}_k = \delta_{jk}, \quad j, k = 1, \dots, N,$$

т. е. матрица преобразования $\mathbf{\Psi}$ является симметрической ($\mathbf{\Psi}^T = \mathbf{\Psi}$) и ортогональной ($\mathbf{\Psi}^T = \mathbf{\Psi}^{-1}$); δ_{jk} – символ Кронекера.

Отметим, что ограничение на то, что векторы $\mathbf{\Psi}_j$ оставлены из вещественных чисел, не является

принципиальным, и все последующие рассуждения без потери общности могут быть распространены на комплексные числа.

Вернемся к условию возникновения ошибки различения сигналов (11), где дисперсия β определялась формулой (9). При выполнении ортогонального преобразования (18) равенство (9) можно переписать в виде

$$\mu_2[\beta] = 4\Delta\mathbf{a}_2^T \mathbf{\Psi}^T \mathbf{K}_f \mathbf{\Psi} \Delta\mathbf{a}_2, \quad (19)$$

где $\Delta\mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1 = \mathbf{\Psi}\Delta\mathbf{s}_2$.

Заметим, что правая часть неравенства (11) не зависит от ортогонального преобразования $\mathbf{\Psi}$: $E_\Delta = \Delta\mathbf{s}_2^T \Delta\mathbf{s}_2 = \Delta\mathbf{a}_2^T \mathbf{\Psi}^T \mathbf{\Psi} \Delta\mathbf{a}_2 = \Delta\mathbf{a}_2^T \Delta\mathbf{a}_2$, поскольку $\mathbf{\Psi}$ – симметрическая матрица, для которой справедливо $\mathbf{\Psi}^T \mathbf{\Psi} = \mathbf{I}$. При этом, как мы выяснили ранее, повышение вероятности ошибки P_0 различения двух сигналов вызвано наличием недиагональных элементов матрицы \mathbf{K}_f , точнее, недиагональных элементов составляющей ее матрицы \mathbf{K}_{fj} (13).

Следовательно, если использовать преобразование $\mathbf{\Psi}$, которое приводит матрицу $\mathbf{\Psi}^T \mathbf{K}_f \mathbf{\Psi}$ из соотношения (19) к диагональному виду, то негативное влияние коррелированности помех на вероятность ошибки P_0 можно компенсировать, т. е. приблизиться к кривой 3 к кривой 2 (см. рис. 1).

Известно [5], что матрица $\mathbf{\Psi}^T \mathbf{K}_f \mathbf{\Psi}$ будет диагональной, если матрица $\mathbf{\Psi}$ образована из векторов ϕ_i , являющихся собственными векторами матрицы \mathbf{K}_f , т. е. векторов, удовлетворяющих уравнению

$$\mathbf{K}_f \phi_i - \lambda_i \phi_i = 0,$$

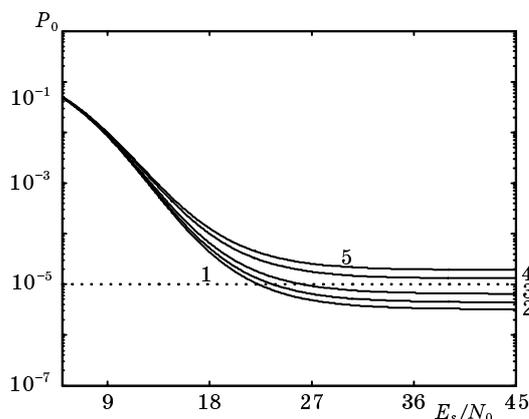
где ϕ_i – собственные векторы; λ_i – собственные значения матрицы \mathbf{K}_f .

Указанное выше ортогональное преобразование $\mathbf{\Psi} = [\phi_1 \phi_2 \dots \phi_N]$, базисные функции которого являются собственными векторами корреляционной матрицы \mathbf{K}_f , называется дискретным преобразованием Карунена – Лозва [5, 6].

Однако отсутствие быстрых алгоритмов вычисления и зависимость параметров оптимального преобразования Карунена – Лозва от структуры матрицы \mathbf{K}_f существенно ограничивают практические возможности его применения и вынуждают использовать другие ортогональные преобразования [6].

В настоящее время известно довольно значительное количество дискретных ортогональных преобразований, имеющих процедуры их быстрого вычисления. К этим преобразованиям, например, относятся: дискретное преобразование Фурье, дискретное косинусное преобразование, дискретное преобразование Уолша.

Построены графики (рис. 2) при следующих условиях: приеме сигнала с базой $B = 511$; наличии коррелированной помехи $\nu = 0,5$; фиксированном значении отношения $P_J/P_s = 14$ дБ. Кривая 5 рис. 2 соответствует кривой 3 рис. 1, т. е. случаю,



■ **Рис. 2.** Зависимости вероятности ошибки P_0 различения двух сигналов от отношения сигнал/шум E_s/N_0 для различных ортогональных преобразований (18) наблюдаемого вектора (4)

когда ортогональное преобразование над вектором (4) не выполняется. Кривая 1 получена с применением дискретного преобразования Карунена–Лоэва, кривая 2 – дискретного косинусного преобразования, кривая 3 – дискретного преобразования Фурье, кривая 4 – дискретного преобразования Уолша.

Выводы, которые следуют из анализа графиков (см. рис. 2), подтверждают известные результаты оценки декоррелирующих свойств ортогональных

преобразований [5, 6]. Из рассмотренных ортогональных преобразований, имеющих быстрые алгоритмы вычисления, наиболее близкие к дискретному преобразованию Карунена–Лоэва характеристики декорреляции в рассмотренных условиях дает применение к вектору (4) дискретного косинусного преобразования.

Литература

1. Куприянов М. С., Матюшкин Б. Д. Цифровая обработка сигналов: процессоры, алгоритмы, средства проектирования. СПб.: Политехника, 1998. 592 с.
2. Скляр Б. Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение: Пер. с англ. 2-е изд., испр. М.: Издательский дом «Вильямс», 2003. 1104 с.
3. Финк Л. М. Теория передачи дискретных сообщений. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Сов. радио, 1970. 728 с.
4. Помехозащищенность радиосистем со сложными сигналами / Г. И. Тузов, В. А. Сивов, В. И. Прытков и др.; Под ред. Г. И. Тузова. М.: Связь, 1985. 264 с.
5. Ахмед Н., Рао К. Р. Ортогональные преобразования при обработке цифровых сигналов: Пер. с англ. М.: Радио и связь, 1980. 248 с.
6. Умняшкин С. В., Кочетков М. Е. Анализ эффективности использования дискретных ортогональных преобразований для цифрового кодирования коррелированных данных // Изв. вузов. Сер. Электроника. 1998. № 6. С. 78–84.