

УДК 681.518

СПЛАЙН-ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ВЫСОТ РЕЛЬЕФА МЕСТНОСТИ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ РАДИОВОЛН С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ВЕКТОРНЫХ ГЕОДАННЫХ

Д. Н. Самотонин,

канд. техн. наук, доцент

Военный университет противовоздушной обороны (филиал, г. Санкт-Петербург)

С. И. Биденко,

доктор техн. наук

Главное управление навигации и океанографии Министерства обороны РФ

Статья посвящена обоснованию способа интерполяции высот рельефа для построения профилей местности с использованием векторных геоданных. Предложенный способ базируется на применении эрмитова сплайна и обеспечивает устранение некорректных осцилляций функции интерполяции рельефа, влияющих на погрешности вычислений при математическом моделировании процесса распространения радиоволн. Данный способ сплайн-интерполяции может быть использован при разработке специального программного обеспечения автоматизированных систем управления средствами радиолокации, навигации, связи и т. д.

This article proves the interpolational method for constructing terrestrial relief profiles with the help of vector geospatial data. The proposed method is based on hermitian spline and allows to eliminate incorrect relief interpolational oscillations which have miscalculation effects on mathematical simulation of radio-waves propagation. This spline-interpolational method may be used for a special software development for automated control systems of radiolocation and navigation means, communication facilities and so on.

Введение

Быстрое развитие геоинформационных технологий и накопленный опыт широкого их использования при решении различных прикладных задач создали предпосылки для повышения уровня автоматизации управления радиотехническими средствами и системами (РТС). В частности, разработка рациональных решений по управлению РТС может быть основана на результатах оценивания эффективности их применения при выполнении поставленных перед ними задач, которое базируется на прогнозировании зон видимости (ЗВ) с учетом влияния геометрических и радиофизических свойств местности (подстилающей поверхности) [1]. При этом данные о свойствах подстилающей поверхности могут быть получены из цифровых карт местности (ЦКМ).

В наибольшей степени потребность в применении картографических и геоинформационных методов возникает при проектировании (планировании размещения на местности) РТС в новых районах их применения. В этом случае прогнози-

рование ЗВ РТС основано на моделировании процесса распространения радиоволн. Адекватность такого моделирования во многом зависит от достоверности информации об экранирующих препятствиях и монотонно связана с точностью представления (определения) высот рельефа на профиле местности, вдоль которого распространяются радиоволны [2].

В существующих неавтоматизированных методиках проведения топографической обработки позиции РТС профили местности снимаются по дискретно заданному множеству азимутов. В случаях отсутствия возможности проведения рекогносцировки местности в районе планируемой позиции данные подходы основываются на использовании традиционных бумажных карт. При этом на первом этапе точки на карте, между которыми необходимо построить профиль, соединяют прямой линией. Характерные точки пересечения построенной линии с картографическими объектами, определяющими высоты рельефа, переносят на специальную профильную бумагу. На втором этапе полученные характерные точки рельефа

соединяют плавной кривой. Такой способ позволяет определять высоты рельефа на анализируемом профиле, но при этом отличается высокой трудоемкостью, имеет неоднозначную трактовку и малоприменим для автоматизации последующих расчетов.

В условиях применения ЦКМ автоматизация построения профиля местности стала возможной благодаря использованию методов геоинформационного картографирования и моделирования. В настоящее время в силу своей дешевизны наибольшее распространение получил картометрический подход к созданию ЦКМ. При таком подходе ЦКМ составляются на основе сканирования бумажного картматериала и векторизации картографических объектов. Далее ЦКМ формируются в виде компьютерных информационных единиц – файлов, данные которых соответствуют по содержанию и точности исходным листам карт. В результате файлы векторных ЦКМ содержат географические объекты различных типов локализации (например, для объектов рельефа: точечные – отметки высот рельефа, линейные – горизонталы, площадные – водоемы с известным урезом высоты и др.).

Очевидно, что использование векторных географических данных о рельефе местности позволяет без большого труда автоматизировать первый этап неавтоматизированных методик построения профиля местности, заключающийся в формировании массива характерных точек с известной высотой рельефа. Для реализации второго этапа методик (построения плавной кривой) необходимо использовать специальную функцию гладкого восполнения (интерполяции) рельефа на локальных участках между характерными точками профиля с известными высотами (узлами интерполяции). Для корректного гладкого восполнения высот рельефа рассмотрим требования к его интерполяции.

Требования к интерполяции высот рельефа

Требования к гладкому восполнению высот рельефа на локальной участке профиля местности между узлами интерполяции могут обуславливаться следующими соображениями. В условиях рассматриваемой интерполяционной задачи высоты рельефа на локальных участках не могут быть определены однозначно. Тем не менее степень данной неопределенности может быть снижена за счет введения пороговых ограничений на выбросы высот рельефа на локальных участках профиля. Данные ограничения однозначно определяют дискретность высот изолиний (шагом горизонталей), присутствующих в ЦКМ в виде картографических объектов. Кроме этого, обобщенные результаты статистического анализа в геологии показывают, что форма земной поверхности в целом обладает геометрическим свойством плавности [3]. При этом по положению четырех смежных горизонталей всегда можно судить о степени выпуклости или вогнутости плавной кривой на среднем локальном участке произвольного профиля местности. Тогда, если считать погрешность представления картографических объектов в карте незначительной, целесообразно

выделить следующие требования к функции интерполяции высот рельефа на профиле местности.

1. Значения функции в узлах интерполяции должны определяться в соответствии с данными о высотах рельефа, задаваемых картографическими объектами ЦКМ, которые пересекает линия профиля местности.

2. Отклонение значений (вариация) функции на локальных участках между узлами интерполяции не должно превышать порогов, определяемых дискретностью представления высот горизонталей в ЦКМ.

3. При определении высот рельефа на локальных участках между узлами интерполяции должны учитываться основные геометрические свойства формы рельефа – плавность и выпуклость (вогнутость).

Постановка задачи синтеза процедуры интерполяции высот рельефа

В соответствии с вышесказанным, интерполяция рельефа на профиле местности производится на основе множества исходных данных об известных высотах в узлах интерполяции, которое принято называть точечным базисом:

$$H_{[a,b]}(x) = \{x_k, h_k\}_{k=0}^K, \quad (1)$$

где $a = x_0 < x_1 < \dots < x_k < \dots < x_K = b$.

Такая интерполяция может быть основана на использовании гладкой функции одного аргумента $\tilde{h}(x)$ в пространстве R^2 , синтезированной с учетом выявленных требований.

Первое требование сводится к сохранению высот рельефа в узлах базиса и обеспечивается выполнением условия

$$h_k = \tilde{h}(x_k), \quad k = \overline{0, K}. \quad (2)$$

Второе требование по ограничению вариации функции $\tilde{h}(x)$ для k -го интервала интерполирования может быть обеспечено следующим образом:

$$\forall x \in]x_k, x_{k+1}[: \tilde{h}_-(k) < \tilde{h}(x) < \tilde{h}_+(k), \quad k = \overline{0, K-1}, \quad (3)$$

где $\tilde{h}_-(k)$, $\tilde{h}_+(k)$ – функции, вычисляющие значения нижнего и верхнего порога, ограничивающие вариацию $\tilde{h}(x)$ на k -м интервале.

Третье требование может быть формализовано с использованием понятийного аппарата теории гомотопии клеточных пространств. Моделируемый объект в R^2 называют гладким (лекарным), если его можно представить в виде клеточного комплекса, состоящего из нуль- и одномерных клеток, такого, что любая гомотопия, соединяющая точки, принадлежащие двум смежным одномерным клеткам, является диффеоморфизмом второго порядка [4]. Таким образом, функция $\tilde{h}(x)$ должна быть дважды непрерывно дифференцируема, т. е.

$$\tilde{h}(x) \in C^2[a, b], \quad (4)$$

где $C^2[a, b]$ – пространство функций, определенных на промежутке $[a, b]$ и непрерывных вместе со своими производными до второго порядка включительно.

Условие (4) не является достаточным, так как обеспечивает только плавность моделируемого объекта, но не позволяет учитывать выпуклость или вогнутость функции на интервалах интерполирования, т. е. количественно контролировать осциллируемость второй производной $\tilde{h}(x)$. Известно, что выпуклость или вогнутость локальных участков между узлами интерполяции будет автоматически учтена, если синтез функции $\tilde{h}(x)$ организовать на основе минимизации функционала [5]:

$$F(\tilde{h}(x)) = \int_a^b \left(\frac{d^2 \tilde{h}(x)}{dx^2} \right)^2 dx \rightarrow \min. \quad (5)$$

Можно показать, что задача синтеза оптимальной функции интерполяции $\tilde{h}(x)$ в постановке (2) – (5) является экстремальной задачей вариационного исчисления с ограничениями, относится к некорректно поставленным (по Адамару) и точного решения не имеет [6]. В связи с этим для контроля осциллируемости функции $\tilde{h}(x)$ сформулируем данную постановку задачи в аспекте синтеза процедуры интерполяции с некоторыми допущениями.

Как отмечалось ранее, для рассматриваемой задачи гладкого восполнения в R^2 по значениям высот рельефа в четырех смежных узлах базиса (1) можно судить о степени выпуклости или вогнутости плавной кривой на среднем интервале интерполирования. Для этого необходимо обеспечить непрерывность функции интерполяции высот рельефа $\tilde{h}(x)$ вместе с ее первой производной, т. е.

$$\tilde{h}(x) \in C^1[a, b]. \quad (6)$$

Кроме этого, если выполнить условие непрерывности второй производной на k -м интервале

$$\forall x \in [x_k, x_{k+1}] : \tilde{h}(x) \in C^2[x_k, x_{k+1}], \quad k = \overline{0, K-1}, \quad (7)$$

то можно контролировать ее осциллируемость путем введения ограничений на количество экстремумов и точек перегиба функции интерполяции для каждого интервала интерполирования.

Допустим, что известно множество значений аргумента

$$E_k = \left\{ \tilde{x}_k \mid \tilde{x}_k \in]x_k, x_{k+1}[; \left(\frac{d}{dx} [\tilde{h}(x)] \Big|_{x=\tilde{x}_k} = 0 \right) \vee \left(\frac{d^2}{dx^2} [\tilde{h}(x)] \Big|_{x=\tilde{x}_k} = 0 \right) \right\}, \quad (8)$$

в которых функция интерполяции $\tilde{h}(x)$ может потенциально иметь локальный экстремум или точку перегиба внутри k -го интервала. Обозначим мощность данного множества $|E_k|$. Тогда критерий оптимальности синтеза $\tilde{h}(x)$ определяется формулой

$$\sum_{k=0}^{K-1} |E_k| \rightarrow \min. \quad (9)$$

Вследствие данных обстоятельств, условие, обеспечивающее выполнение требования по ограничению вариации функции $\tilde{h}(x)$ на k -м интервале, принимает вид

$$\forall \tilde{x}_k \in E_k : \tilde{h}_-(k) < \tilde{h}(\tilde{x}_k) < \tilde{h}_+(k), \quad k = \overline{0, K-1}. \quad (10)$$

Функция, вычисляющая значение нижнего порога на k -м интервале интерполирования в зависимости от шага горизонталей (Δ_h), имеет вид

$$\tilde{h}_-(k) = \begin{cases} h_k - \Delta_h, & \text{если } (h_k = h_{k+1}) \wedge (h_k \bmod \Delta_h = 0); \\ h_k - (h_k \bmod \Delta_h), & \text{если } (h_k = h_{k+1}) \wedge (h_k \bmod \Delta_h \neq 0); \\ h_k, & \text{если } (h_k < h_{k+1}) \wedge (h_k \bmod \Delta_h = 0); \\ h_k - (h_k \bmod \Delta_h), & \text{если } (h_k < h_{k+1}) \wedge (h_k \bmod \Delta_h \neq 0); \\ h_{k+1}, & \text{если } (h_k > h_{k+1}) \wedge (h_{k+1} \bmod \Delta_h = 0); \\ h_{k+1} - (h_{k+1} \bmod \Delta_h), & \text{если } (h_k > h_{k+1}) \wedge (h_{k+1} \bmod \Delta_h \neq 0), \end{cases} \quad (11)$$

где \bmod – двухместная операция вычисления остатка от целочисленного деления операндов.

Соответственно, функция, вычисляющая значение верхнего порога, имеет вид

$$\tilde{h}_+(k) = \begin{cases} h_k + \Delta_h, & \text{если } (h_k = h_{k+1}) \wedge (h_k \bmod \Delta_h = 0); \\ h_k + \Delta_h - (h_k \bmod \Delta_h), & \text{если } (h_k = h_{k+1}) \wedge (h_k \bmod \Delta_h \neq 0); \\ h_k, & \text{если } (h_k > h_{k+1}) \wedge (h_k \bmod \Delta_h = 0); \\ h_k + \Delta_h - (h_k \bmod \Delta_h), & \text{если } (h_k > h_{k+1}) \wedge (h_k \bmod \Delta_h \neq 0); \\ h_{k+1}, & \text{если } (h_k < h_{k+1}) \wedge (h_{k+1} \bmod \Delta_h = 0); \\ h_{k+1} + \Delta_h - (h_{k+1} \bmod \Delta_h), & \text{если } (h_k < h_{k+1}) \wedge (h_{k+1} \bmod \Delta_h \neq 0). \end{cases} \quad (12)$$

Анализ способов реализации геометрического моделирования локальных объектов показывает, что решение задачи синтеза (2), (6), (7), (9), (10) может быть основано на использовании специальных объектно-ориентированных функций, алгебраических и тригонометрических полиномов и различных типов сплайнов.

Сущность объектно-ориентированного подхода заключается в одновременном формировании набора функций исходя из формы объекта. Использование данного подхода для геометрического моделирования профиля местности не представляется возможным, так как формы рельефа чрезвычайно многообразны и слабо поддаются априорной классификации.

Алгебраические и тригонометрические полиномы относятся к объектно-независимым функциям. Несмотря на ряд известных достоинств та-

ких функций, практическая реализуемость подхода на их основе затруднена по ряду причин, наиболее существенной из которых является зависимость степени и поведения полинома от количества узлов интерполяции. Кроме этого, график полинома может значительно уклоняться от графика интерполируемой функции в некоторых точках, что неизбежно приводит к увеличению количества нарушений условия (10).

Данным недостатком лишены сплайн-функции. Сущность моделирования сплайнами заключается в представлении модели объекта не одним выражением, а несколькими кусочными функциями определенного класса. Чтобы не нарушить гладкость объекта в стыках, на параметры сплайна накладываются специальные условия, требующие непрерывности производных до нужного порядка. Но данные условия могут привести к некорректным осцилляциям функции интерполяции – выбросам высот профиля за пороговый интервал (10). В связи с этим в основу реализации геометрического моделирования профиля местности предлагается положить процедуру, выполняемую в два этапа. На первом этапе необходимо провести гладкое восполнение неизвестных высот рельефа на профиле местности с помощью базовой сплайн-функции, т. е. построить клеточный комплекс, состоящий из чередующихся нуль- и одномерных клеток, в котором допускается наличие некорректных осцилляций (из-за свойств интерполирующих сплайн-функций некорректные осцилляции могут возникать только в одномерных клетках). Данные осцилляции необходимо последовательно (в порядке возрастания k) устранить на втором этапе, т. е. построить клеточный комплекс, состоящий из чередующихся нуль- и одномерных клеток без некорректных осцилляций.

Базовая сплайн-функция интерполяции высот рельефа

Наиболее популярным инструментом разработчиков интерактивных систем гладкого геометрического моделирования является метод сплайн-интерполяции, так как он обладает простой вычислительной оценкой в метриках функциональных пространств. Существует множество подходов к сплайн-интерполяции, при которых в качестве кусочных функций используются алгебраические или тригонометрические полиномы, экспоненциальные функции, рациональные функции и др. Анализ таких подходов показывает, что наименьшей вычислительной сложностью обладает метод алгебраических кусочно-полиномиальных сплайн-функций. Поэтому в интересах обеспечения высокой оперативности процесса гладкого восполнения высот рельефа целесообразно определить сплайн-функцию на основе алгебраических полиномов.

Под интерполирующей алгебраической сплайн-функцией $S_{p,q}(x)$ дефекта q понимается кусочно-полиномиальная функция, определенная на промежутке $[a, b]$, для которой существует разбиение этого промежутка на K интервалов, согласно (1), такое, что $S_{p,q}(x) \in C^{p-q}[a, b]$ и внутри каждого k -го элемента разбиения $[x_k, x_{k+1}]$ функция пред-

ставляет собой алгебраический полином некоторой степени p (интерполянт) вида

$$S_{p,q}^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^p \alpha_j^{(k)} (x - x_k)^j, \quad k = \overline{0, K-1}. \quad (13)$$

Из этого определения следует, что степень гладкости сплайна зависит от его степени и дефекта, поэтому для выбора базовой функции интерполяции высот рельефа необходимо проанализировать влияние данных параметров сплайна на последующий процесс устранения некорректных осцилляций.

Условия непрерывности производных p -го порядка для сплайнов могут привести к некорректным осцилляциям его интерполянтов – выбросам высот рельефа за допустимый пороговый интервал (10). Необходимо отметить, что количество экстремумов интерполянта (13) и их амплитуда пропорциональны степени полинома (эффект Рунге–Муррей) [4]. Поэтому для интерполяции рельефа нецелесообразно использовать сплайны высоких степеней, а для выполнения условий (6) и (7) достаточно использовать кубические интерполянты.

Исследование кубических сплайнов дефекта 1 [7, 8], получивших название сплайнов Шенберга (или сплайнов Фюргенсона для параметрической интерполяции) и обладающих экстремальным свойством (5), показывает, что обеспечить высокую оперативность геометрического моделирования рельефа по точечному базису (1) с большим количеством узлов интерполяции K не представляется возможным, так как вычисление коэффициентов сплайна основано на решении системы линейных уравнений с количеством неизвестных, равным $4K$. Кроме этого, изменение геометрической формы профиля на интервале (например, путем введения дополнительного узла интерполяции) в целях устранения некорректной осцилляции неизбежно приводит к пересчету всех коэффициентов сплайна Шенберга. В связи с этим гарантировать сходимость процесса устранения некорректных осцилляций нельзя, так как вновь построенный профиль местности может содержать новые некорректные осцилляции на других интервалах интерполирования. Данный недостаток отсутствует при локальном вычислении коэффициентов сплайн-функции, так как устранение некорректных осцилляций сплайн-интерполяции может быть достигнуто способом последовательного (в порядке возрастания k) переопределения коэффициентов интерполянтов. Данный способ гарантирует, что устранение некорректных осцилляций на текущем интервале интерполирования не приведет к возникновению новых осцилляций на других интервалах.

Известно, что свойством локальности вычисления коэффициентов обладают некоторые виды параметрических сплайнов (например, базисные сплайны) и непараметрические сплайны Эрмита. Предпочтение непараметрической интерполяции может быть обусловлено меньшим количеством особых точек, в которых может произойти нарушение требований по вариации функции интерполяции. В частности, классификация особых точек [4], присутствующих в параметрических сплайновых кривых, позволяет выделить точки излома и возврата, которые не могут существовать при не-

параметрической интерполяции по определению. Поэтому в качестве базовой функции интерполяции высот рельефа целесообразно выбрать сплайн Эрмита. Зависимость степени p сплайна Эрмита дефекта q от требуемой гладкости C^g ($g = p - q$) имеет вид $p = 2g + 1$ [9]. Вследствие этого, для интерполяции высот рельефа наиболее приемлем кубический сплайн Эрмита дефекта 2.

Таким образом, под базовой сплайн-функцией для интерполяции высот рельефа $\tilde{h}(x)$ будем понимать кубический интерполяционный сплайн Эрмита, т. е. кусочно-полиномиальную функцию $S_{3,2}(x)$, определенную на промежутке $[a, b]$, для которой в соответствии с заданным точечным базисом (1) известны значения ее первой производной в узлах интерполяции ($\tilde{H}' = \{\tilde{h}'_k\}_{k=0}^K$) и выполнены следующие условия:

$$\forall x \in [x_k, x_{k+1}] : s_{3,2}^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^3 \alpha_j^{(k)}(x - x_k)^j \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall k \in [0, K - 1]: \tilde{h}(x) \in C^2[x_k, x_{k+1}]; \quad (14)$$

$$\forall k \in [0, K] : \tilde{h}(x) \Big|_{x=x_k} = h_k; \quad (15)$$

$$\forall k \in [0, K] : \frac{d}{dx} [\tilde{h}(x_k)] = \tilde{h}'_k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall k \in [1, K - 1] : \frac{d}{dx} [s_{3,2}^{(k-1)}(x)] \Big|_{x=x_k} =$$

$$= \frac{d}{dx} [s_{3,2}^{(k)}(x)] \Big|_{x=x_k}. \quad (16)$$

Из условий (14) – (16) следует, что $\tilde{h}(x) = S_{3,2}(x) \in C^1[a, b]$. Можно показать, что система уравнений для вычисления коэффициентов сплайна на k -м интервале интерполирования имеет вид

$$\begin{cases} \alpha_0^{(k)} = h_k; \\ \alpha_1^{(k)} = \tilde{h}'_k; \\ \alpha_2^{(k)} = \frac{1}{x_{k+1} - x_k} \times \left[3 \cdot \frac{h_{k+1} - h_k}{x_{k+1} - x_k} - 2\tilde{h}'_k - \tilde{h}'_{k+1} \right]; \\ \alpha_3^{(k)} = \frac{1}{(x_{k+1} - x_k)^2} \times \left[-2 \cdot \frac{h_{k+1} - h_k}{x_{k+1} - x_k} + \tilde{h}'_k + \tilde{h}'_{k+1} \right]. \end{cases} \quad (17)$$

На основе формул аппроксимации значения первой производной сеточной функции $h(x)$ по взвешенным левой и правой разделенным разностям

$$\frac{d}{dx} [h(x)] \Big|_{x=x_k} \approx \begin{cases} \frac{h_1 - h_0}{x_1 - x_0}, & \text{если } k=0; \\ \frac{x_{k+1} - x_k}{x_{k+1} - x_{k-1}} \cdot \frac{h_k - h_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} + \\ + \frac{x_k - x_{k-1}}{x_{k+1} - x_{k-1}} \cdot \frac{h_{k+1} - h_k}{x_{k+1} - x_k}, & \text{если } 0 < k < K; \\ \frac{h_K - h_{K-1}}{x_K - x_{K-1}}, & \text{если } k = K \end{cases} \quad (18)$$

можно оценить производную базисной функции интерполяции высот рельефа в узле интерполяции, т. е. определить множество

$$\tilde{H}'_0 = \left\{ \tilde{h}'_k \mid \tilde{h}'_k = \frac{d}{dx} [h(x)] \Big|_{x=x_k} \right\}_{k=0}^K. \quad (19)$$

Тогда, с учетом условий (18), практическое вычисление коэффициентов сплайна Эрмита по формуле (17) производится по двум узлам исходного точечного базиса на границах промежутка $[a, b]$ и по четырем узлам базиса внутри этого интервала.

Таким образом, определена базовая функция интерполяции высот рельефа на профиле местности, основанная на применении кубического сплайна Эрмита. В соответствии с системой уравнений (17) и условиями (18), данный сплайн является единственным и вычисление его коэффициентов можно производить локально. При этом синтезированная модель линии профиля местности в виде клеточного комплекса удовлетворяет требованиям (2), (6) и (7), но одномерные клетки могут иметь некорректные осцилляции. Поэтому для обеспечения выполнения требований (9), (10) необходимо устранить некорректные осцилляции, которые присутствуют в данной модели.

Устранение осцилляций сплайн-интерполяции высот рельефа

Применение кубического сплайна Эрмита в качестве базовой функции интерполяции высот рельефа позволяет значительно упростить критерий оптимальности синтеза модели линии профиля местности (9). Это связано с тем, что график кубического интерполянта может иметь ровно одну точку перегиба. Кроме этого, у данной функции либо нет экстремумов, либо их два (один максимум и один минимум). Вследствие свойств кубического сплайна Эрмита для кубического интерполянта, не имеющего экстремумов, точка перегиба не является некорректной осцилляцией, а, напротив, обеспечивает необходимое условие гладкого сопряжения с кусочными полиномами на смежных интервалах интерполирования (т. е. диффеоморфизм гомотопий одномерных клеток). Поэтому для критерия (9) можно использовать вместо множества (8) множество значений аргумента, в которых функция интерполяции $\tilde{h}(x)$ может потенциально иметь локальный экстремум на k -м интервале:

$$E_k = \left\{ \tilde{x}_k^{(m)} \mid \tilde{x}_k^{(m)} \in]x_k, x_{k+1}[; \frac{d}{dx} [\tilde{h}(x)] \Big|_{x=\tilde{x}_k^{(m)}} = 0 \right\}. \quad (20)$$

Исходя из этого можно сделать вывод о том, что необходимым условием наличия некорректной осцилляции для одномерной клетки является существование двух или одного экстремумов кусочного полинома на соответствующем интервале интерполирования. Данное утверждение позволяет выделить два класса некорректных осцилляций.

1. Многоэкстремальные осцилляции, вследствие которых между узлами интерполяции сплайн-функция имеет более одного экстремума, что приводит к порождению некорректных точек перегиба и, следовательно, нарушению критерия оптимальности (9).

2. Пороговые осцилляции – «выбросы» значений сплайн-функции между узлами интерполяции за пороговый интервал, определенный условием (10).

Для обнаружения некорректных осцилляций на k -м интервале необходимо проверить попадание экстремумов интерполянта $s_{3,2}^{(k)}(x) \Big|_{x \in [x_k, x_{k+1}]}$ в промежуток $]x_k, x_{k+1}[$. Известно, что интерполянт $s_{3,2}^{(k)}(x)$ может иметь максимум в точке $V_{\max}^{(k)} = (\bar{x}_{\max}^{(k)}, s_{3,2}^{(k)}(\bar{x}_{\max}^{(k)}))$ и

минимум в точке $V_{\min}^{(k)} = (\bar{x}_{\min}^{(k)}, s_{3,2}^{(k)}(\bar{x}_{\min}^{(k)}))$ при условии отрицательного дискриминанта полинома, т. е. $D^{(k)} = 3\alpha_3^{(k)}\alpha_1^{(k)} - (\alpha_2^{(k)})^2 < 0$. При этом положение данных точек может быть определено по формулам:

$$\begin{aligned} \bar{x}_{\max}^{(k)} &= \left(-\alpha_2^{(k)} - \sqrt{D^{(k)}} \right) / \left(3\alpha_3^{(k)} \right) + x_k; \\ \bar{x}_{\min}^{(k)} &= \left(-\alpha_2^{(k)} + \sqrt{D^{(k)}} \right) / \left(3\alpha_3^{(k)} \right) + x_k. \end{aligned} \quad (21)$$

Для частного случая, когда $\alpha_3^{(k)} = 0$, кубический интерполянт вырождается в квадратичный и может иметь только один экстремум, положение которого определяется по формулам

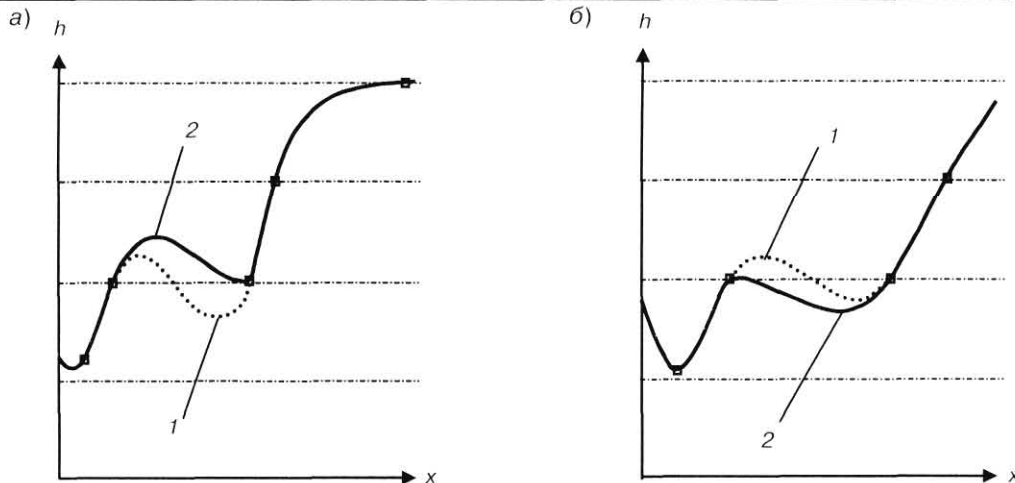
$$\begin{aligned} \bar{x}_{\max}^{(k)} &= -\alpha_1^{(k)} / \left(2\alpha_2^{(k)} \right) + x_k, \text{ если } \alpha_2^{(k)} < 0; \\ \bar{x}_{\min}^{(k)} &= -\alpha_1^{(k)} / \left(2\alpha_2^{(k)} \right) + x_k, \text{ если } \alpha_2^{(k)} > 0. \end{aligned} \quad (22)$$

В случае, если $\alpha_2^{(k)} = \alpha_3^{(k)} = 0$, имеет место линейная интерполяция и, следовательно, устранение осцилляций не требуется.

Базовая функция интерполяции высот рельефа $\tilde{h}(x) = S_{3,2}(x)$ имеет многоэкстремальную осцилляцию на k -м интервале, если у интерполянта $s_{3,2}^{(k)}(x) \Big|_{x \in [x_k, x_{k+1}]}$ существует два экстремума ($D^{(k)} < 0$) и оба экстремума попадают в промежуток $]x_k, x_{k+1}[$, т. е. выполнено условие

$$E_k = \left\{ \bar{x}_{\max}^{(k)}, \bar{x}_{\min}^{(k)} \right\} \Rightarrow |E_k| = 2. \quad (23)$$

Интерполянт $s_{3,2}^{(k)}(x) \Big|_{x \in [x_k, x_{k+1}]}$ с многоэкстремальной осцилляцией можно модифицировать в $\tilde{s}_{3,2}^{(k)}(x) \Big|_{x \in [x_k, x_{k+1}]}$ или $\bar{\tilde{s}}_{3,2}^{(k)}(x) \Big|_{x \in [x_k, x_{k+1}]}$, имеющие только один экстремум (максимум или минимум) на промежутке $]x_k, x_{k+1}[$, путем обращения в ноль значения первой производной базовой функции интерполяции $\tilde{h}(x)$ в k -м (левом) или $(k+1)$ -м (правом) узлах текущего интервала ($\tilde{h}'_k = 0$ или $\tilde{h}'_{k+1} = 0$) и последующем пересчете коэффициентов $\alpha_1^{(k)}, \alpha_2^{(k)}, \alpha_3^{(k)}$ по формулам (17). Если при выбранной стратегии модифицировано значение $\tilde{h}'_k = 0$, то для гладкой склейки с левым смежным интервалом интерполирования необходимо также переопределить коэффициенты $\alpha_2^{(k-1)}$ и $\alpha_3^{(k-1)}$. Так как построенный профиль местности будет использован при прогнозировании ЗВ РТС, то стратегия выбора узла интервала, в котором необходимо модифицировать значение производной, может быть основана на получении выпуклой кривой в предположении максимальной высоты экранирующего препятствия, присутствующего на текущем промежутке профиля (стратегия «наибольшего ущерба»). На рис. 1 показаны две стратегии устранения многоэкстремальной осцилляции.



■ Рис. 1. Устранение многоэкстремальных осцилляций: а – стратегия «наибольшего ущерба»; б – стратегия «наименьшего ущерба»; 1 – до устранения; 2 – после устранения; - - - - уровни горизонталей; □ – узлы интерполяции

Так как устранение многоэкстремальных осцилляций производится последовательно в порядке возрастания k , для обоснования его корректности можно показать, что модификация базовой функции интерполяции на k -м интервале ($\tilde{h}'_k = 0$ или $\tilde{h}'_{k+1} = 0$) не может породить многоэкстремальную осцилляцию в $(k-1)$ -м интервале. Таким образом, предложен корректный способ устранения многоэкстремальных осцилляций на основе модификации множества значений производных (19).

Полученное модифицированное множество значений производных в узлах обозначим

$$\tilde{H}'_1 = \{\tilde{h}'_{k,1}\}_{k=0}^K \quad (24)$$

В итоге, учитывая множество (24), при геометрическом моделировании на основе базовой функции $\tilde{h}(x)$ интерполяции можно построить клеточный комплекс без многоэкстремальных осцилляций.

Далее рассмотрим способы обнаружения и устранения пороговых осцилляций, считая, что многоэкстремальные осцилляции отсутствуют. Базовая функция интерполяции высот рельефа $\tilde{h}(x) = S_{3,2}(x)$ имеет пороговую осцилляцию на k -м интервале,

если у интерполянта $S_{3,2}^{(k)}(x) \Big|_{x \in [x_k, x_{k+1}]}$ существует два экстремума, один из них попадает в промежуток $]x_k, x_{k+1}[$, т. е. $|E_k| = 1$, и нарушено ограничение (10). Пороговые осцилляции могут быть двух типов в зависимости от способа их устранения. Как и в случае модификации интерполянтов с двумя экстремумами, пороговые осцилляции первого типа можно устранить (преобразовать к устранимым пороговым осцилляциям второго типа) путем обращения в ноль значения производной $\tilde{h}(x)$ в левом или правом узлах текущего интервала. Геометрическая интерпретация пороговой осцилляции первого типа показывает наличие одного пересечения кривой профиля с несуществующей горизонталью внутри интервала интерполирования. Поэтому можно выделить

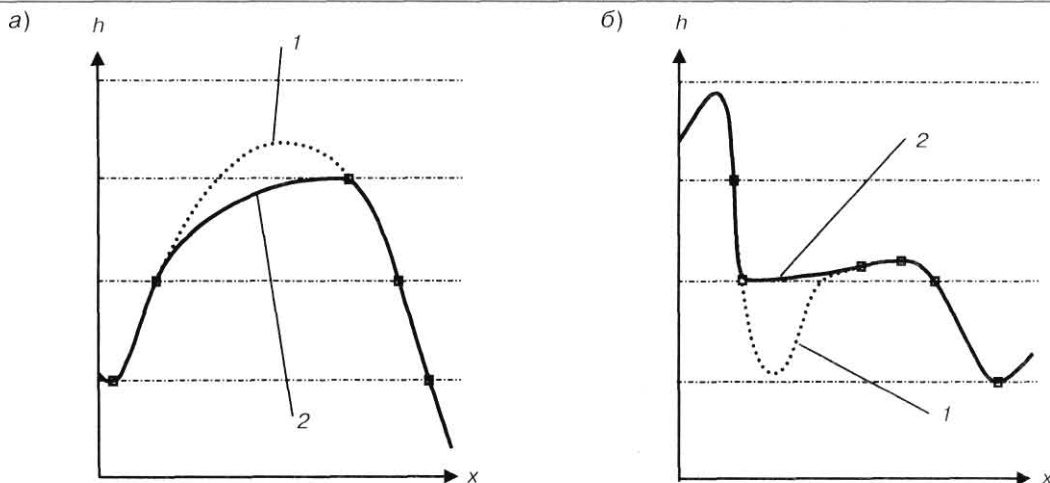
следующее условие идентификации пороговой осцилляции первого типа на k -м интервале интерполирования:

$$(h_k = \tilde{h}_-(k)) \vee (h_{k+1} = \tilde{h}_-(k)) \vee (h_k = \tilde{h}_+(k)) \vee (h_{k+1} = \tilde{h}_+(k)). \quad (25)$$

Узел интерполяции, в котором обращение в ноль значения производной базовой функции интерполяции $\tilde{h}(x)$ приводит к устранению пороговой осцилляции первого типа на интервале $[x_k, x_{k+1}]$, будем называть критическим узлом k -го интервала. Очевидно, что для k -го интервала значение $\tilde{h}(x)$ в критическом узле всегда совпадает с значением верхнего или нижнего порога, соответственно, $\tilde{h}_+(k)$ или $\tilde{h}_-(k)$, а производная $\tilde{h}(x)$ не равна нулю. Поэтому его положение можно определить следующей функцией:

$$\zeta(k) = \begin{cases} k, & \text{если } (h_k = \tilde{h}_-(k)) \wedge (\tilde{h}(x_{\min}^{(k)}) < \tilde{h}_-(k)); \\ k+1, & \text{если } (h_{k+1} = \tilde{h}_-(k)) \wedge (\tilde{h}(x_{\min}^{(k)}) < \tilde{h}_-(k)); \\ k, & \text{если } (h_k = \tilde{h}_+(k)) \wedge (\tilde{h}(x_{\max}^{(k)}) > \tilde{h}_+(k)); \\ k+1, & \text{если } (h_{k+1} = \tilde{h}_+(k)) \wedge (\tilde{h}(x_{\max}^{(k)}) > \tilde{h}_+(k)). \end{cases} \quad (26)$$

Используя функцию (26), устранение пороговой осцилляции первого типа на k -м интервале можно свести к модификации множества \tilde{H}'_1 , т. е. необходимо выполнить $\tilde{h}'_{\zeta(k),1} = 0$ и произвести вычисление коэффициентов $\alpha_1^{(k)}$, $\alpha_2^{(k)}$, $\alpha_3^{(k)}$ у интерполянта $S_{3,2}^{(k)}(x) \Big|_{x \in [x_k, x_{k+1}]}$. Кроме этого, если $\zeta(k) = k$, то для гладкой склейки с левым смежным интервалом интерполирования необходимо также переопределить коэффициенты $\alpha_2^{(k-1)}$ и $\alpha_3^{(k-1)}$ для $S_{3,2}^{(k-1)}(x) \Big|_{x \in [x_{k-1}, x_k]}$. На рис. 2 показаны примеры устранения пороговых осцилляций первого типа.



■ Рис. 2. Устранение пороговых осцилляций первого типа: а – с правым критическим узлом; б – с левым критическим узлом: 1 – до устранения; 2 – после устранения; — — — — уровни горизонталей; □ – узлы интерполяции

Как и при обосновании корректности устранения многоэкстремальных осцилляций, можно показать, что последовательная (в порядке возрастания k) модификация базовой функции интерполяции на k -м интервале вида $\tilde{h}_{k,1} = 0$ не может породить пороговую осцилляцию первого типа в $(k-1)$ -м интервале. Таким образом, предложен корректный способ устранения осцилляций первого типа на основе модификации множества значений производных (24).

Полученное модифицированное множество значений производных в узлах обозначим

$$\tilde{H}'_2 = \{ \tilde{h}'_{k,2} \}_{k=0}^K. \quad (27)$$

В итоге, учитывая множество (27), при геометрическом моделировании на основе базовой функции $\tilde{h}(x)$ интерполяции можно построить клеточный комплекс без многоэкстремальных и пороговых осцилляций первого типа.

Обнаружение оставшихся пороговых осцилляций (пороговых осцилляций второго типа) необходимо также организовать в соответствии с общим определением базовой сплайн-функции (14) – (16). Геометрическая интерпретация пороговой осцилляции второго типа указывает на наличие двух пересечений кривой профиля с несуществующими горизонталями внутри интервала интерполирования.

Осцилляции второго типа обладают общим геометрическим свойством, для пояснения которого определим специальное множество особых

точек $V^{(k)} = \{V_r^{(k)}\}_{r=0}^3$ для k -го интервала: $V_0^{(k)}$ – левый узел интерполяции; $V_1^{(k)}$ – точка пересечения касательной к графику $\tilde{h}(x)$ в левом узле интерполяции и линии пороговой горизонтали; $V_2^{(k)}$ – точка пересечения касательной к графику $\tilde{h}(x)$ в правом узле интерполяции и линии пороговой горизонтали; $V_3^{(k)}$ – правый узел интерполяции. Для частных случаев, если $\tilde{h}'_{k,2} = 0$ или $\tilde{h}'_{k+1,2} = 0$, сле-

дует считать, что $V_1^{(k)} = V_2^{(k)}$ или $V_2^{(k)} = V_1^{(k)}$. Общее свойство пороговых осцилляций второго типа заключается в том, что отрезки, соединяющие особые точки, входящие в множество $V^{(k)}$, образуют выпуклую ломаную линию. Данная ломаная может служить оболочкой для построения элементарной кубической кривой Безье, гладко сопряженной с интерполянтами на смежных интервалах и устраняющей пороговую осцилляцию второго типа. При этом ранее рассмотренные недостатки параметрической интерполяции несущественны, так как в данном случае не может возникнуть ни точек излома, ни точек возврата.

Рассмотрим устранение пороговой осцилляции второго типа для случая, когда происходит нарушение верхнего порога, т. е. $\tilde{h}(x_{\max}^{(k)}) > h_+(k)$. В этом случае в множество $V^{(k)}$ входят следующие особые точки:

$$\begin{aligned} V_0^{(k)} &= (x_k, h_k); & V_1^{(k)} &= \left(\frac{h_+(k) - h_k}{\tilde{h}'_{k,2}} + x_k, h_+(k) \right); \\ V_2^{(k)} &= \left(\frac{h_+(k) - h_{k+1}}{\tilde{h}'_{k+1,2}} + x_{k+1}, h_+(k) \right); \\ V_3^{(k)} &= (x_{k+1}, h_{k+1}). \end{aligned} \quad (28)$$

Тогда элементарная кубическая кривая Безье описывается параметрическим уравнением [5]:

$$B^{(k)}(t) = [(1-t)V_0^{(k)} + 3tV_1^{(k)}](1-t) + 3t^2V_2^{(k)}(1-t) + t^2V_3^{(k)},$$

где

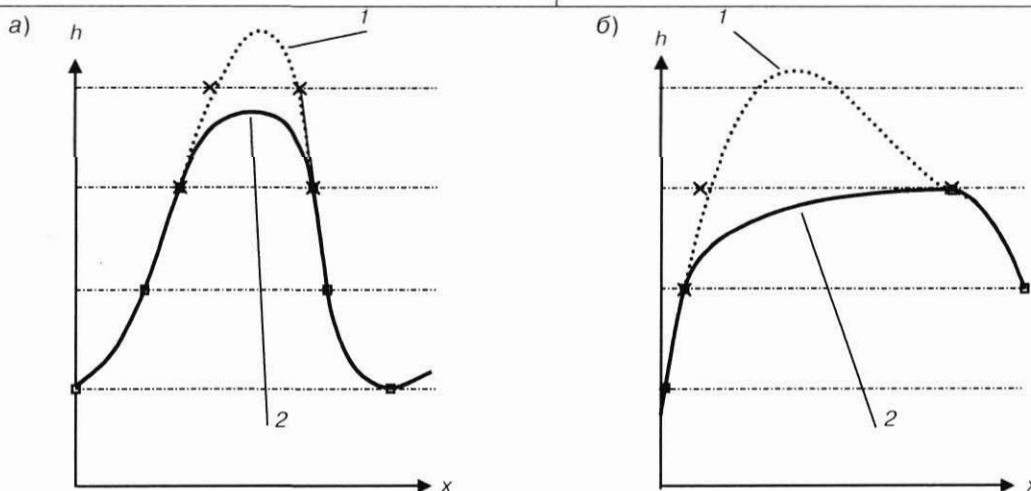
$$0 \leq t \leq 1. \quad (29)$$

Заменив параметр t на $x \in [x_k, x_{k+1}]$, получаем:

$$\tilde{B}^{(k)}(x) = B^{(k)}(t(x)), \quad (30)$$

где $t = t(x)$ – функция, обратная $x = x(t)$.

На рис. 3 показаны примеры устранения пороговых осцилляций второго типа.



■ Рис. 3. Устранение пороговых осцилляций второго типа: а – общий случай ($V_1^{(k)} \neq V_2^{(k)}$); б – частный случай ($V_1^{(k)} = V_2^{(k)}$):
1 – до устранения; 2 – после устранения;
----- – уровни горизонталей; □ – узлы интерполяции; х – особые точки

Применяя интерполянты (30) на промежутках, содержащих пороговые осцилляции второго типа, можно построить модель профиля местности в виде клеточного комплекса без некорректных осцилляций. Корректность способа устранения пороговых осцилляций второго типа обусловлена неизменностью множества значений производных базовой функции интерполяции (27).

Заключение

В статье поставлена и решена задача корректного геометрического моделирования профиля местности, использующая новый способ гладкого восполнения высот рельефа по векторным гео-данным с учетом выявленных требований к интерполяции. В основу разработанного способа положена двухэтапная процедура, обеспечивающая на первом этапе синтез базовой функции сплайн-интерполяции, характеризующейся локальностью вычисления коэффициентов алгебраических полиномов, что позволяет на втором этапе управлять ее вариацией и устранять некорректные осцилляции в соответствии с ограничениями, определяемыми дискретностью представления горизонталей в исходных ЦКМ.

Предложенный в статье способ сплайн-интерполяции высот рельефа доведен до программной реализации и апробирован в ходе выполнения ряда научно-исследовательских и опытно-конструкторских работ для решения задач прогнозирования ЗВ РТС с учетом влияния местности по векторной цифровой картографической информации в случаях отсутствия более точных данных о подстилающей поверхности, полученных в результа-

те рекогносцировки или методами дистанционного зондирования Земли.

Литература

1. **Зикратов И. А., Самотонин Д. Н.** Геоинформационный анализ радиолокационных отражений. – СПб.: Политехника, 2004. – 144 с.
2. **Самотонин Д. Н.** Проблема геоинформационного обеспечения автоматизированных радиолокационных систем // Вопросы радиоэлектроники. Серия СОИУ, 2002. – вып. №1. – С. 54-55.
3. **Дэвис Дж. С.** Статистический анализ данных в геологии: Пер. с англ. В 2 кн. / Под ред. Д. А. Радионова. – Кн. 1. – М.: Недра, 1990. – 319 с.
4. **Семенов О. И., Васильев В. П.** Основы автоматизации проектирования поверхностей с использованием базисных сплайнов. – Минск: Наука и техника, 1987. – 167 с.
5. **Шикин Е. В., Плис А. И.** Кривые и поверхности на экране компьютера. Руководство по сплайнам для пользователей. – М.: Диалог-МИФИ, 1995. – 240 с.
6. **Морозов В. А., Гребенников А. И.** Методы решения некорректно поставленных задач: алгоритмический аспект. – М.: Изд-во МГУ, 1992. – 320 с.
7. **Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н.** Сплайны в вычислительной математике. – М.: Наука, 1976. – 284 с.
8. **Носач В. В.** Решение задач аппроксимации с помощью персональных компьютеров. – М.: МИКАП, 1994. – 382 с.
9. **Фокс А., Пратт М.** Вычислительная геометрия. Применение в проектировании и на производстве: Пер. с англ. / Под ред. К. И. Бабенко – М.: Мир, 1982. – 304 с.

В. Ф. Михайлов, Т. Н. Нарытник, И. В. Брагин, В. Н. Мошкин.

Микроволновые технологии в телекоммуникационных системах: Учеб. пособие / СПбГУАП. СПб., 2003. – 337 с.: ил. ISBN 5-8088-0092-7

Приводятся и обсуждаются сведения о распространении радиоволн микроволнового диапазона, а также типы и характеристики линий передач этого диапазона. Рассматриваются методы формирования сигналов телевидения и звукового вещания, микроволновые телерадиоинформационные сети. Обсуждаются системы Интернет-доступа, включая доступ по телефонной сети к кабельному телевидению, спутниковым каналам и телерадиоинформационным сетям. Анализируется оборудование микроволновых телерадиоинформационных распределительных сетей и интегрированные информационные сети на их основе.

Пособие предназначено для студентов радиотехнических специальностей.

