УДК 62-50:531.8

МЕТОД ОБЪЕДИНЕННОГО ПРИНЦИПА МАКСИМУМА В ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

А. А. Костоглотов,
доктор техн. наук, доцент
Ростовский военный институт ракетных войск им. Главного маршала артиллерии М. И. Неделина
А. И. Костоглотов,
доктор техн. наук, профессор
Ростовский государственный университет путей сообщения
А. В. Чеботарев,
старший офицер-инженер
Пограничный научно-исследовательский центр ФСБ России

Предлагается новый подход к решению задачи синтеза оптимального управления. Показано, что применение игольчатой вариации Л. С. Понтрягина к инвариантным признакам действительного движения системы позволяет получить условие минимума параметрического функционала в форме принципа максимума.

Ключевые слова *— оптимальное управление, объединенный принцип максимума, асинхронно-игольчатое варьирование.*

Введение

В настоящее время трудно представить направления в науке и технике без использования достаточно развитой теории оптимального управления. Однако применение на практике классических методов вариационного исчисления, динамического программирования и принципа максимума вызывает ряд затруднений, связанных с необходимостью решать двухточечную краевую задачу и применять мощные вычислительные средства [1–5]. Кроме того, полученные на их основе алгоритмы представляют собой лишь программы оптимального управления, а для решения задач синтеза требуются дополнительные, сложные построения [6, 7].

Возможен и другой подход, основанный на использовании экстремальных свойств истинных траекторий [8, 9]. При этом условия оптимальности могут быть получены из условия минимума расширенного функционала, объединяющего интеграл действия и интегральный функционал меры качества. Процедура приводит к требованию максимума для функции обобщенной мощности $\Phi(u, q, \dot{q})$, которая является трансформацией гамильтониана Л. С. Понтрягина. В результате получается прямое решение задачи синтеза оптимальных управлений, а не решение задачи оптимального программного управления. В этом заключается отличительная особенность результата, получившего название объединенный принцип максимума [1]. Он является дальнейшим развитием идеи Л. С. Понтрягина о принципе максимума и его приложении к практическим задачам.

Постановка задачи синтеза оптимального управления

Примем принцип Гамильтона — Остроградского в качестве исходного положения динамики материальной системы, интеграл действия которой имеет вид

$$R = \int_0^{t_1} (T + A)\mathrm{d}t, \tag{1}$$

где T — кинетическая энергия системы; A — работа внешних обобщенных сил.

При движении системы из начального состояния $t = t_0$, $q(t_0) = [q_{01}, ..., q_{0n}]$, $\dot{q}(t_0) = [\dot{q}_{01}, \ldots, \dot{q}_{0n}]$ в конечное $t = t_1$, $q(t_1) = [q_{11}, ..., q_{1n}]$, $\dot{q}(t_1) = [\dot{q}_{11}, \ldots, \dot{q}_{1n}]$

под действием внешних сил $Q = [Q_1, ..., Q_s]$ и управлений $u = [u_1, ..., u_m]$ принцип Гамильтона — Остроградского записывается [3] в виде

$$\delta' R = \int_{t_0}^{t_1} (\delta T + \delta' A) \mathrm{d}t = 0, \quad (2)$$

где $\delta' A$ — элементарная работа обобщенных сил:

$$\delta' A = \sum_{s=1}^{n} Q_s \delta q_s, \quad (3)$$

здесь $Q = [Q_1(q, \dot{q}, u), \dots, Q_s(q, \dot{q}, u)]$ — непрерывный по совокупности переменных вектор обобщенных внешних сил; $u = [u_1, ..., u_m]$ — вектор управления:

$$u(t) \in \bar{G}_u. \quad (4)$$

Из принципа Гамильтона — Остроградского (2) вытекают уравнения Лагранжа второго рода

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial T}{\partial q_s} = Q_s,$$
$$s = \overline{1, n};\ t = t_0,\ q_s(t_0) = q_{0s};$$
$$t = t_1,\ q_s(t_1) = q_{1s}. \quad (5)$$

Пусть задана непрерывная вместе с частными производными во всей области определения определенно-положительная функция $F(q, \dot{q}, u, t)$. Тогда имеет место следующая формулировка задачи синтеза оптимального управления: определить вектор управления $u = u(q, \dot{q})$, $u(t) \in \bar{G}_u$ как функцию обобщенных координат и обобщенных скоростей $(q, \dot{q}) \in R^{2n}$ и соответствующую ему траекторию $q(t) \in R^n$ перевода фазовой точки из начального состояния в конечное такие, что обеспечивается минимум целевого функционала

$$J_1 = \int_{t_0}^{t_1} F(q, \dot{q}, u, t) \mathrm{d}t \to \min \quad (6)$$

при условии (5) и ограничениях на управления (4).

Необходимые и достаточные условия оптимальности управления

Поиск минимума целевого функционала (6) проведем методом неопределенных множителей Лагранжа. Рассмотрим задачу поиска минимума расширенного функционала

$$J = \lambda R + J_1 = \int_{t_0}^{t_1} [\lambda(T + A) + F] \mathrm{d}t \to \min, \quad (7)$$

где λ — неопределенный множитель Лагранжа, $\lambda \in R^1$.

Пусть $u(t) \in \bar{G}_u$ — произвольное допустимое управление. Если u доставляет минимум функционалу (7), то первая и вторая вариации этого функционала должны быть неотрицательными ($\delta J \geq 0$, $\delta^2 J \geq 0$) для любых допустимых вариаций управления.

Введем в рассмотрение скалярную функцию

$$\Phi(q, \dot{q}, u, \lambda) = \sum_{s=1}^{n} [\lambda Q_s(q, \dot{q}, u) + V_s(q, \dot{q})] \dot{q}_s, \quad (8)$$

где $V_s = \dfrac{\delta' F}{\delta q_s}$ — фиктивная обобщенная сила, зависящая от способа задания функционала (6).

Функция $\Phi(q, \dot{q}, u, \lambda)$ непрерывна по совокупности переменных и определена на области

$$(q, \dot{q}, u, \lambda) \in R^{2n} \bar{G}_u R^1. \quad (9)$$

Предположим, что функция Φ имеет максимум

$$\Phi(q, \dot{q}, u, \lambda) = \max_{u(q, \dot{q}) \in \bar{G}_u} \Phi(q, \dot{q}, u(q, \dot{q}), \lambda), \quad (10)$$

где $q(t), \dot{q}(t)$ принимают значения в области R^{2n}, а $u(q, \dot{q})$ — в области $\bar{G}_u$.

Положим

$$Q(q, \dot{q}) = \lambda^{-1} \{\mu_s(q, \dot{q}) \dot{q}_s - V_s\}, \ \ s = \overline{1, n}, \quad (11)$$

где $\mu_s(q, \dot{q})$ — знакоотрицательная функция, $\mu_s < 0$, что устанавливается подстановкой (11) в (8):

$$\max_{u(q, \dot{q}) \in \bar{G}_u} \Phi(q, \dot{q}, u, \lambda) = \mu_s \dot{q}_s^{\ 2} \leq 0. \quad (12)$$

Теорема о необходимых и достаточных условиях оптимальности: для того чтобы управление $u(q, \dot{q}) \in \bar{G}_u$ и соответствующая ему траектория $(q, \dot{q})$ доставляли минимум расширенному функционалу (7) при ограничениях (4), необходимо и достаточно выполнение условия максимума для функции Φ переменных $(q, \dot{q}) \in R^{2n}$, $u(q, \dot{q}) \in \bar{G}_u$:

$$\Phi(q, \dot{q}, u, \lambda) = \max_{u(q, \dot{q}) \in \bar{G}_u} \{(\lambda Q + V) \dot{q}\}, \quad (13)$$

при этом множитель Лагранжа постоянен:

$$\lambda = \lambda_0 = \mathrm{const}, \quad (14)$$

а на концах траектории $t = t_0$, $t = t_1$ выполняются условия трансверсальности

$$\lambda(A - T) + F = 0. \quad (15)$$

Доказательство теоремы и способ нахождения функции $\mu(q, \dot{q})$ приведены в прил. 1, 2.

Поскольку при получении условий оптимальности (13) использовалась вторая вариация функционала, то эти условия являются необходимыми и достаточными. А так как управление оказалось явно зависящим от обобщенных координат, то доказанная теорема позволяет решить задачу синтеза.

Исследование режимов в однопараметрической задаче оптимального управления

Рассмотрим отличительные особенности оптимальных управлений с нефиксированным временем и интегральным функционалом, зависящим от параметра. Алгоритм определения параметров кривой переключения для управлений с учащающимися переключениями получен в работе [8] для случаев, когда управления выбираются из классов кусочно-непрерывных функций.

Поставим задачу синтеза оптимального управления объектом:

$$\ddot{q} = u(q, \dot{q});\ \ 0 \le t \le t_1;\ \ T = \frac{1}{2}\dot{q}^2,\ \ \delta A = \int_{q_0}^{q_1} u\,\mathrm{d}q;$$

$$q(0) = q_0;\ \ \dot{q}(0) = \dot{q}_0;\ \ q(t_1) = 0;\ \ \dot{q}(t_1) = 0;$$
$$u_0 \le u \le u_1, \tag{16}$$

где t_1 — нефиксированный момент окончания процесса; u — скалярный управляющий параметр. Целевой функционал зависит от управления:

$$J_1 = \int_0^{t_1} (1 + ku)q^2 \mathrm{d}t = \int_0^{t_1} (1 + ku)F(q)\mathrm{d}t,\ \ k \ge 0. \tag{17}$$

Допустимым управлением считаются кусочно-непрерывные функции $u \in \left[-\frac{1}{k}, u_{\max}\right] < -k^{-1}$. При условии $u < -k^{-1}$ не существует минимума функционала.

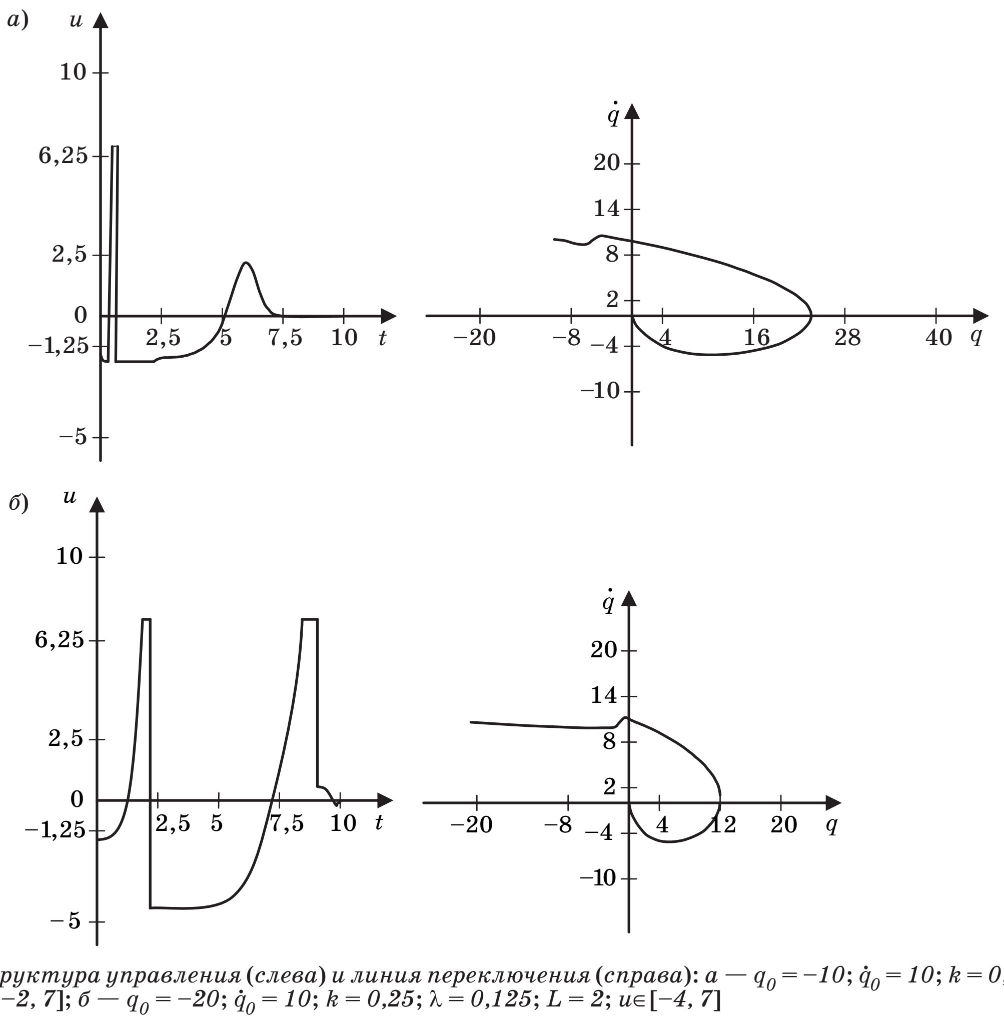
Решение задачи методом объединенного принципа максимума (ОПМ) запишем в виде

$$u(q, \dot{q}) = w(a) = w\left(\frac{\mu\dot{q} - \dot{q}}{\lambda + kq}\right), \tag{18}$$

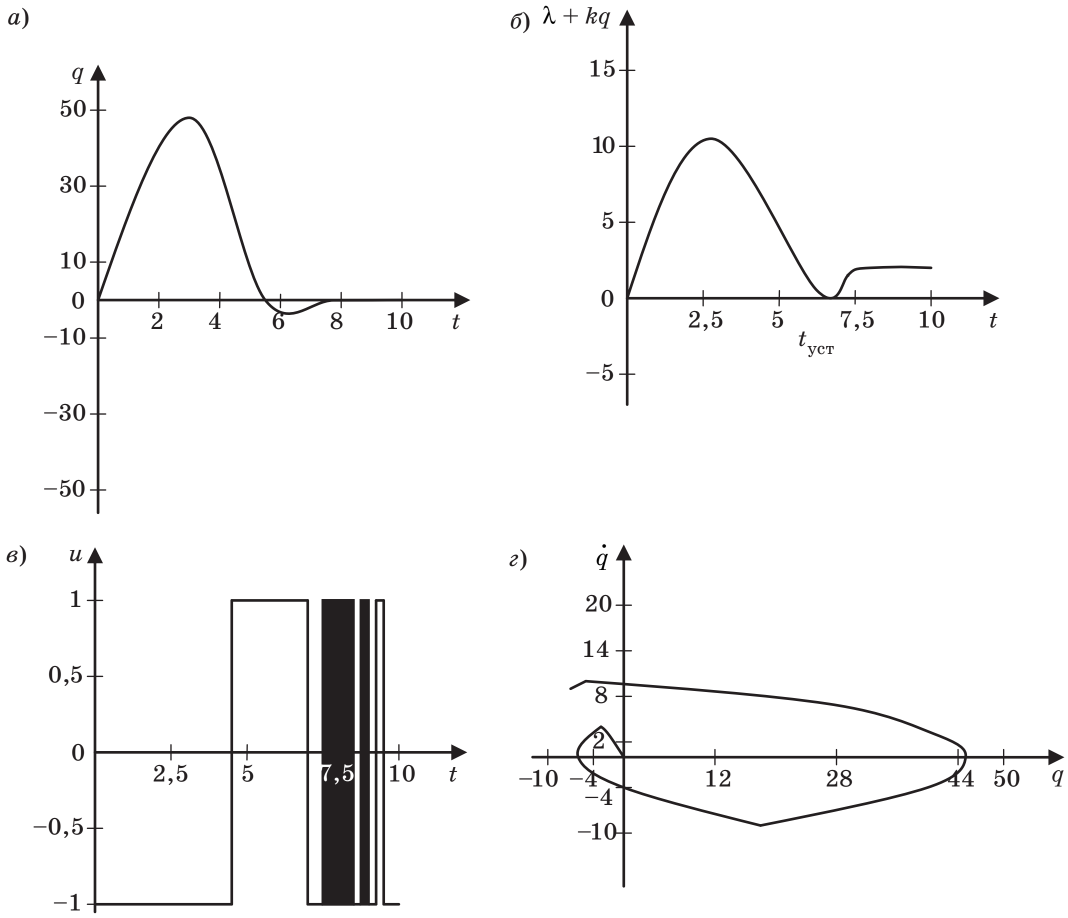
где $w(a) = a$, если $-k^{-1} \le a \le u_1$; $w(a) = -k^{-1}$, если $a < -k^{-1}$; $w(a) = u_1$, если $a > u_1$.

Для построения знакоотрицательной функции $\mu(q, \dot{q})$ приведем уравнение (16) к закону изменения кинетической энергии T и воспользуемся условиями трансверсальности (15):

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = u\dot{q} = \frac{\mu\dot{q}^2}{\lambda + kq} - \frac{1}{\lambda + kq}\frac{\mathrm{d}F(q)}{\mathrm{d}t}. \tag{19}$$



■ **Рис. 1.** *Структура управления (слева) и линия переключения (справа): а — $q_0 = -10$; $\dot{q}_0 = 10$; $k = 0,5$; $\lambda = 2$; $L = 2$; $u \in [-2, 7]$; б — $q_0 = -20$; $\dot{q}_0 = 10$; $k = 0,25$; $\lambda = 0,125$; $L = 2$; $u \in [-4, 7]$*



■ ***Рис. 2.*** *Решение задачи Фуллера: а — переходной процесс; б — поведение условия устойчивости (21); в — структура управления с учащающимися переключениями; г — линия переключения*

Из условий трансверсальности имеем $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \lambda \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}$ и, применив правило Уиттекера [10], получаем выражение

$$\mu(q, \dot{q}) = -\left|2\lambda + kq\right| \frac{|\dot{q}|}{L|q|},$$

а искомое управление в классе кусочно-непрерывных функций имеет вид

$$u(q, \dot{q}) = w\left[\left(-\frac{|\dot{q}|\dot{q}|2\lambda + kq|}{L|q|} - q\right)\frac{1}{(\lambda + kq)}\right]. \quad (20)$$

Из (19) также вытекает, что процесс управления будет устойчивым при условии

$$\lambda + kq > 0. \quad (21)$$

Результаты численного моделирования для различных случаев управления показаны на рис. 1, *а*, *б*.

Если управление выбирается из класса кусочно-постоянных функций $u \in [-1, 1]$, то проблема сводится к обобщению решения Фуллера для управлений с учащающимися переключениями и с участками разрежения (рис. 2, *а—г*), причем в точке $t = t_{уст}$ (см. рис. 2, *б*) система находится на границе устойчивости.

Заключение

Полученный на основе объединения принципов Гамильтона — Остроградского и принципа максимума Л. С. Понтрягина метод ОПМ отличается универсальностью, простотой, обладает высокой точностью и быстродействием [8, 9]. Математическое моделирование подтверждает универсальность и простоту предлагаемого метода.

Приложение 1

Доказательство теоремы. Для доказательства теоремы исследуем результат игольчатого варьирования траектории [1–3]. Выберем произвольное допустимое управление $u(t) \in \overline{G}_u$ и рассмотрим вариацию расширенного функционала (7) с учетом выражения для асинхронной вариации [1, 2], получим

$$\Delta J = \Delta\int_{t_0}^{t_1}[\lambda(T+A)+F]\mathrm{d}t = [\lambda(T+A)+F]\times$$
$$\times\Delta t\Big|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1}[\lambda(\delta T+\delta' A)+\delta' F]\mathrm{d}t. \quad (22)$$

Определим синхронную вариацию кинетической энергии $T(q,\dot{q})$ через вариации обобщенных координат и обобщенных скоростей. Для элементарной действительной работы примем выражение (3), а для элементарной работы фиктивных сил — выражение

$$\delta' F = \sum_{s=1}^{n} V_s \delta q_s, \quad (23)$$

тогда асинхронная вариация функционала

$$\Delta J = [\lambda(T+A)+F]\Delta t\Big|_{t_1}^{t_0} +$$
$$+\sum_{s=1}^{n}\int_{t_0}^{t_1}\left[\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\delta\dot{q}_s + \frac{\partial T}{\partial q_s}\delta q_s + Q_s\delta q_s\right) + V_s\delta q_s\right]\mathrm{d}t. \quad (24)$$

Производя интегрирование по частям, преобразуем (28) к виду

$$\Delta J = [\lambda(T+A)+F]\Delta t\Big|_{t_0}^{t_1} + \sum_{s=1}^{n}\lambda\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\delta q_s\Bigg|_{t_0}^{t_1} +$$
$$+\sum_{s=1}^{n}\int_{t_0}^{t_1}\left[-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\right) + \lambda\left(\frac{\partial T}{\partial q_s} + Q_s\right) + V_s\right]\delta q_s \mathrm{d}t. \quad (25)$$

В краевых условиях (25) синхронную вариацию заменим асинхронной. Тогда второе слагаемое краевого условия примет вид

$$\sum_{s=1}^{n}\lambda\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\delta q_s\Bigg|_{t_0}^{t_1} = \sum_{s=1}^{n}\lambda\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\Delta q_s\Bigg|_{t_0}^{t_1} -$$
$$-\sum_{s=1}^{n}\lambda\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s\Delta t = -2\lambda T\Delta t\Big|_{t_0}^{t_1}. \quad (26)$$

Результат (26) получен в силу того, что должно быть выполнено необходимое условие прохождения траекторий (действительных и виртуальных) через одни и те же точки q_{0s}, q_{1s} фазового пространства, а второе слагаемое приводится к удвоенной кинетической энергии в соответствии с теоремой Эйлера об однородных функциях [10].

Теперь подставим (26) в (25) и после очевидных преобразований получим

$$\Delta J = [\lambda(A-T)+F]\Delta t\Big|_{t_0}^{t_1} + \sum_{s=1}^{n}\int_{t_0}^{t_1}\left[-\dot{\lambda}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\delta q_s -\right.$$
$$\left.-\lambda\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial T}{\partial q_s} - Q_s\right)\delta q_s + V_s\delta q_s\right]\mathrm{d}t. \quad (27)$$

Соотношения на концах траектории являются условиями трансверсальности

$$\lambda(A-T)+F = 0 \text{ при } t=t_0,\ t=t_1. \quad (28)$$

Асинхронная вариация для функционала примет вид

$$\Delta J = \sum_{s=1}^{n}\int_{t_0}^{t_1}\left[-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\right) + \lambda\left(\frac{\partial T}{\partial q_s} + Q_s\right) + V\right]\delta q_s \mathrm{d}t. \quad (29)$$

Выберем теперь из допустимой области другое управление $u_\varepsilon(t)\in\bar{G}_u$, но полученное из произвольного $u(t)$ игольчатым варьированием. Асинхронная вариация функционала для этого управления будет иметь вид, аналогичный (28):

$$\Delta J = \sum_{s=1}^{n}\int_{t_0}^{t_1}\left[-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\lambda\frac{\partial T_\varepsilon}{\partial \dot{q}_s}\right) + \lambda\left(\frac{\partial T_\varepsilon}{\partial q_s} + Q_{\varepsilon s}\right) + V_{\varepsilon s}\right]\delta q_{\varepsilon s}\mathrm{d}t. \quad (30)$$

В силу произвольности синхронных вариаций примем условие их стыковки

$$\delta q_s(t) = \delta q_{\varepsilon s}(t) \text{ при } t=\tau, \quad (31)$$

а обобщенные силы будем считать зависящими и от обобщенных координат, и от управлений:

$$Q_s = Q_s(q,\dot{q},u);$$
$$Q_{\varepsilon s} = Q_{\varepsilon s}(q_\varepsilon,\dot{q}_\varepsilon,u_\varepsilon). \quad (32)$$

Распорядимся выбором неопределенного множителя Лагранжа так:

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} = 0,\ \lambda = \lambda_0 = \mathrm{const} \quad (33)$$

и сравним значения асинхронных вариаций для траекторий $q(t)$ и $q_\varepsilon(t)$, полученных для управлений $u(t)$, $u_\varepsilon(t)$ соответственно. Получаем

$$\delta^2 J = \Delta J_\varepsilon - \Delta J = \sum_{s=1}^{n}\int_{t_0}^{t_1}\left\{\lambda\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial(T_\varepsilon - T)}{\partial \dot{q}_s} -\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{\partial(T_\varepsilon - T)}{\partial q_s} - (Q_{\varepsilon s} - Q_s)\right] + (V_{\varepsilon s} - V_s)\right\}\delta q_s \mathrm{d}t. \quad (34)$$

Разность обобщенных сил вычислим так:

$$Q_{\varepsilon s} - Q_s = Q_s(u_\varepsilon, q_s, \dot{q}_s) - Q_s(u, q_s, \dot{q}_s) +$$
$$+\frac{\partial Q_s(u,q_s,\dot{q}_s)}{\partial q_s}(q_{s\varepsilon} - q_s) + \frac{\partial Q_s(u,q_s,\dot{q}_s)}{\partial \dot{q}_s}(\dot{q}_{s\varepsilon} - \dot{q}_s). \quad (35)$$

Выражение под знаком интеграла будет представлено двумя частями уравнения

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial(T_\varepsilon - T)}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial(T_\varepsilon - T)}{\partial q_s} - \frac{\partial Q_s(u,q_s,\dot{q}_s)}{\partial q_s}\times$$
$$\times(q_{s\varepsilon} - q_s) + \frac{\partial Q_s(u,q_s,\dot{q}_s)}{\partial \dot{q}_s}(\dot{q}_{s\varepsilon} - \dot{q}_s) = 0. \quad (36)$$

Это уравнение Лагранжа второго рода в вариациях. Вторая часть вариации функционала будет неотрицательной и примет вид

$$\delta^2 J = -\sum_{s=1}^{n}\int_{t_0}^{t_1}\{\lambda(Q_{\varepsilon s}-Q_s)+(V_{\varepsilon s}-V_s)\}\delta q_s \mathrm{d}t \ge 0. \quad (37)$$

Разобьем отрезок $[t_0, t_1]$ на три подынтервала. На интервале $t\in[t_0, \tau)$ произвольное и варьируемое управления совпадают: $u_\varepsilon(t) = u(t)$. Поэтому вторая вариация функционала равна нулю. На интервале $t\in[\tau, \tau+\delta t]$ $u_\varepsilon(t) \ne u(t)$, причем $u_\varepsilon(t)$ получается из $u(t)$ игольчатым варьированием. На интервале $t\in[\tau+\delta t, t_1]$ $u_\varepsilon(t) = u(t)$. Вторая вариация функционала в целом теперь может быть определена формулой

$$\delta^2 J = \sum_{s=1}^{n}\int_{\tau}^{\tau+\delta t}[(\lambda Q_{\varepsilon s}+V_{\varepsilon s})-(\lambda Q_s+V_s)]\delta q_s \mathrm{d}t +$$

$$+\sum_{s=1}^{n}\int_{\tau+\delta t}^{t_1}(V_{\varepsilon s}-V_s)\delta q_s \mathrm{d}t. \quad (38)$$

Положим теперь, что произвольное управление $u(t)$ является оптимальным и выберем на интервале $t\in[\tau, \tau+\delta t]$ синхронную вариацию так, чтобы асинхронная равнялась нулю, а на интервале $t\in[\tau+\delta t, t_1]$ асинхронная вариация являлась решением уравнения (36) при начальных условиях

$$t=\tau+\delta t,\ \delta q(\tau+\delta t)=(\dot q_\varepsilon-\dot q)\delta t,$$
$$\delta\dot q(\tau+\delta t)=(\ddot q_\varepsilon-\ddot q)\delta t, \quad (39)$$

и рассмотрим предельный переход $\delta t\to 0$, $q_\varepsilon \to q$, $\dot q_\varepsilon\to\dot q$, $\ddot q_\varepsilon\to\ddot q$. Тогда

$$\lim_{\delta t\to 0}\delta^2 J = -\sum_{s=1}^{n}[(\lambda Q_{\varepsilon s}+V_{\varepsilon s})-(\lambda Q_s+V_s)]\dot q_s\delta t^2 +$$

$$+\sum_{s=1}^{n}\int_{\tau}^{t_1}(V_{\varepsilon s}-V_s)\delta q_s \mathrm{d}t \ge 0. \quad (40)$$

Из этого выражения следует, что вариация функционала $\delta^2 J$ разрывная функция: при $0 \le t\le\tau$ $\delta^2 J=0$, а при $t>\tau$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta^2 J)=\sum_{s=1}^{n}(V_{\varepsilon s}-V_s)\delta q_s \quad (41)$$

с начальными условиями $t=\tau$:

$$\delta^2 J = -\sum_{s=1}^{n}[(\lambda Q_{\varepsilon s}+V_{\varepsilon s})-(\lambda Q_s+V_s)]\dot q_s\delta t^2 \ge 0. \quad (42)$$

В дифференциальном уравнении (41) вариации $\delta q_s(t)$ являются решением уравнения (36). При $t\to\tau$, $\delta t\to 0$ $\lim\limits_{t\to\infty}\delta q_s(\tau)=[\delta\dot q_{\varepsilon s}(\tau)-\dot q_s(\tau)]\,\delta t\ge 0.$

Поэтому при $t>\tau$

$$\lim_{t\to\tau}\delta^2 J(t)=\delta^2 J(\tau)=\mathrm{const}\ge 0. \quad (43)$$

Условие минимума расширенного функционала запишется в виде

$$\lim_{\delta t\to 0}\delta^2 J/\delta t^2 =$$
$$=-\sum_{s=1}^{n}[(\lambda Q(u_{\varepsilon s}(t))+V_{\varepsilon s})-$$
$$-(\lambda Q(u_s(t))+V_s)]\dot q_s\ge 0. \quad (44)$$

Из этой формулы следует необходимое и достаточное условие оптимальности управления

$$\Phi(u_s, q_s, \dot q_s, \lambda)=\max_{u_s\in\bar G_u}[\lambda Q(u_s(t))+V_s]\dot q_s. \quad (45)$$

Поскольку для любой точки $\tau\le t\le t_1$ управления $u(t)$ оптимальным образом переводят фазовую точку из положения $(q(\tau),\dot q(\tau))$ в конечную $(q(t_1),\dot q(t_1))$, то имеет место соотношение $u(\tau)=u(q(\tau),\dot q(\tau))$ [7].

Таким образом, формулировка объединенного принципа максимума получает вид

$$\Phi(u(q,\dot q), q_s, \dot q_s, \lambda)=$$
$$=\max_{u_s(q,q)\in\bar G_u}\sum_{s=1}^{n}[\lambda_s Q(u_s(q,\dot q))+V_s]\,\dot q_s. \quad (46)$$

Выражение для оптимального управления имеет вид

$$Q(u_s, q, \dot q)=\lambda^{-1}\{\mu_s(q,\dot q)\dot q_s - V_s\}. \quad (47)$$

Теорема доказана.

Приложение 2

Способ построения знакоотрицательной функции. Подставим оптимальное управление (47) в уравнение Лагранжа в форме (8), получим

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot q_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}=Q(u_s). \quad (48)$$

Выделим часть оптимальной траектории, выпущенной при $t=t'$ из точки стыка на линии переключения и заканчивающейся при $t=t''$ в точке стыка на линии переключения. В точках стыка выполняются условия трансверсальности (15). Определим из этих условий функцию

$$V_s=\frac{\partial}{\partial q_s}\lambda(T-A) \quad (49)$$

и учтем, что на истинной траектории $Q_s=\dfrac{\partial A}{\partial q_s}$, $\dfrac{\partial T}{\partial \dot q_s}=p_s$ — обобщенный импульс. Тогда вместо (48) будем иметь

$$\lambda\frac{\mathrm{d}p_s}{\mathrm{d}t}-\lambda Q_s=\mu_s\dot{q}_s,\ \ s=\overline{1,n}. \qquad (50)$$

В точке стыка должен выполняться закон изменения импульса для неуправляемой системы. Тогда следует положить

$$\mu_s\dot{q}_s=-\lambda\frac{\mathrm{d}p_s}{\mathrm{d}t}. \qquad (51)$$

Заменяя по способу Уиттекера [10] производную по времени производной по обобщенной координате, получим выражение

$$\mu_s(q,\dot{q})=-\lambda\left|\frac{\mathrm{d}p_s}{\mathrm{d}q_s}\right|,\ s=\overline{1,n}, \qquad (52)$$

которое по физическому содержанию является модулем углового коэффициента касательной к фазовой траектории с коэффициентом деформации λ.

При расчетах можно перейти к конечным разностям

$$\mu_s=-\lambda\frac{|p_s|}{L_s|q_s|},\ s=\overline{1,n}, \qquad (53)$$

где L_s — коэффициент, зависящий от формы линии переключения.

Литература

1. **Костоглотов А. А., Костоглотов А. И., Лазаренко С. В.** Объединенный принцип максимума в задачах оценки параметров движения маневрирующего летательного аппарата // Радиотехника и электроника. 2009. Т. 54. № 4. С. 450–457.
2. **Костоглотов А. А.** Метод идентификации параметров голономных систем на основе аппарата асинхронного варьирования // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2003. № 2. С. 86–92.
3. **Лурье А. И.** Аналитическая механика. — М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1961. — 824 с.
4. **Справочник** по теории автоматического управления / Под ред. А. А. Красовского. — М.: Наука, 1987. — 712 с.
5. **Понтрягин Л. С.** и др. Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Наука, 1983. — 392 с.
6. **Беллман Р.** Динамическое программирование. — М.: ИЛ; Наука, 1960. — 400 с.
7. **Наумов Г. В.** Построения кривой переключения для задач оптимального управления с учащающимися переключениями // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2003. № 3. С. 46–51.
8. **Костоглотов А. А., Костоглотов А. И., Лазаренко С. В.** Объединенный принцип максимума в задаче синтеза оптимального управления нелинейными системами // АВТ. 2007. № 5. С. 52–61.
9. **Костоглотов А. А., Костоглотов А. И., Лазаренко С. В.** Синтез оптимальных по быстродействию систем на основе объединенного принципа максимума // Информационно-измерительные и управляющие системы. 2007. № 12. С. 34–40.
10. **Маркеев А. П.** Теоретическая механика. — М.: Наука, 1990. — 416 с.