

УДК 621.391

СИНТЕЗ ФУНКЦИЙ СПЛАЙН-ПОНТРЯГИНА — ВИЛЕНКИНА — КРЕСТЕНСОНА

С. Н. Агиевич,канд. техн. наук, старший научный сотрудник
ООО «Специальный технологический центр»**А. А. Пономарев,**

адъюнкт

С. С. Тихонов,начальник учебного командного пункта
Военная академия связи им. С. М. Буденного

Предлагаются теоретические результаты синтеза сигналов в базисе функций сплайн-Понтрягина — Виленкина — Крестенсона. Излагаются основы современной теории сплайн-гармонического анализа. Обосновывается их практическое применение в системах инфокоммуникационного взаимодействия для обеспечения структурной скрытности сигналов.

Ключевые слова — сплайн-гармонический анализ, синтез сигналов, функции сплайн-Понтрягина — Виленкина — Крестенсона, инфокоммуникационное взаимодействие.

Развитие теории построения сплайнов привело к появлению математического аппарата, названного сплайн-гармоническим анализом (СГА) [1–5]. Методы СГА являются связующим звеном между непрерывным анализом и его аналогом в дискретном представлении. В основе каждого из них лежат соответственно непрерывные и дискретные экспоненциальные функции (ДЭФ).

Поскольку базис ДЭФ является частным случаем базиса Виленкина — Крестенсона функций (ВКФ) [2], то можно, используя их, перейти к новому виду представления сигналов. Между тем дополнительное рассмотрение базисов ВКФ показало, что если использовать в качестве параметра модуль с разными значениями, то можно выйти на семейство еще большего разнообразия базисов, тем самым увеличив структурную скрытность сигналов, построенных на основе таких базисов, по отношению к ДЭФ за счет увеличения возможных комбинаций.

Учитывая, что декомпозицией чисел с различным модулем занимался Понтрягин [6], эти функции будем называть Понтрягина — Виленкина — Крестенсона функциями (ПВКФ). Возможные комбинации нового класса функций по отношению к ВКФ, например для исходных значений длин базисных функций, равных 100,

увеличатся более чем в 30 раз, причем с удлинением базиса указанный рост принимает экспоненциальный характер. Сущность такого перехода поясняется следующим: среди целых чисел длин базиса существуют такие, которые подлежат факторизации, тем самым расширяя возможности комбинаций представления функций.

Обобщение методов СГА на функции ПВКФ открыло дополнительные возможности для обработки сигналов. Поскольку базисные сплайн-Понтрягина — Виленкина — Крестенсона функции (СПВКФ) получены из ПВКФ и сплайнов, следовательно, они обладают их свойствами. К таковым следует отнести непрерывную природу (сплайны) и наличие большого количества базисов. Указанные свойства открывают возможность разработки новых средств инфокоммуникационного взаимодействия с повышенной структурной скрытностью.

Основу теоретических положений СГА с использованием СПВКФ составляют следующие свойства последних.

Пусть имеется пространство гладких функций — периодических сплайнов дефекта 1 [1]. Любой сигнал $S^p(t)$ из этого пространства может быть построен из В-сплайнов $M^p(t)$ порядка p и заданной степени гладкости $p - 1$:

$$S^p(t) = \frac{1}{N} \sum_k q_k M^p(t - t_k), \quad (1)$$

где q_k — некоторые коэффициенты; N — количество отсчетов сигнала. При этом $M^1(t)$ — однопериодический единичный импульс единичной энергии.

Введем пространство $PVC G_n^p$ периодических сплайнов (здесь PVC — признак ПВКФ, p — порядок сплайна дефекта 1, n — номер базисной функции) и распишем видоизмененное выражение:

$$\begin{aligned} PVC S^p(t) &= \frac{1}{N} \sum_k q_k M^p\left(t \ominus_{\mu_l} t_k\right) = \\ &= \frac{1}{N} \sum_k M^p\left(t \ominus_{\mu_l} t_k\right) \sum_n \overline{PVC}(n, k) PVC F_n(q) = \\ &= \sum_n PVC F_n(q) \frac{1}{N} \sum_k \overline{PVC}(n, k) M^p(t \ominus_{\mu_l} t_k) = \\ &= \sum_n PVC \xi_n PVC m_n^p(t) = \sum_n PVC c_n PVC U_n^p(t), \quad (2) \end{aligned}$$

где \ominus — сдвиг по модулю μ_l ; $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_l$ — моду-

ли представления чисел (μ_1 — старший, μ_l — младший разряды); l — количество разрядов представления числа; $t_k = (p/2 + k)/N$; $\overline{PVC}(n, k)$ — комплексное сопряжение $PVC(n, k)$;

$$PVC(n, k) = \exp\left(j2\pi \sum_{i=1}^l \frac{n_i k_i}{\mu_i}\right);$$

$$PVC F_n(q) = \frac{1}{N} \sum_k PVC(n, k) q_k;$$

$$PVC \xi_n = PVC F_n(z) / PVC u_n^p;$$

$$PVC u_n^p = PVC F_n(M^p) = 1/N \sum_k \overline{PVC}(n, k) M^p(t_k);$$

$$PVC m_n^p(t) = \frac{1}{N} \sum_k \overline{PVC}(n, k) M^p\left(t \ominus_{\mu_l} t_k\right);$$

$$PVC c_n = PVC F_n(z); \quad PVC U_n^p(t) = \frac{PVC m_n^p(t)}{PVC u_n^p}.$$

Из (2) видно что появились новые функции $PVC m_n^p(t)$ и $PVC U_n^p(t)$. Рассмотрим свойства $PVC m_n^p(t)$.

Свойство 1.

$$PVC m_n^p\left(t \oplus_l / N\right) = \overline{PVC}(n, l) PVC m_n^p(t).$$

Доказательство:

$$PVC m_n^p\left(t \oplus_l / N\right) = \frac{1}{N} \sum_k \overline{PVC}(n, l) M^p\left(t \ominus_{\mu_l} \frac{k \oplus l}{N}\right) =$$

$$\begin{aligned} &= \overline{PVC}(n, l) \frac{1}{N} \sum_k \overline{PVC}(n, k) M^p\left(t \ominus_{\mu_l} \frac{k}{N}\right) = \\ &= \overline{PVC}(n, l) PVC m_n^p(t). \end{aligned}$$

Свойство 2.

$PVC m_n^p(t)$ — N -периодические по отношению к N .

Доказательство:

При $l = N$ (из свойства 1)

$$\begin{aligned} PVC m_n^p\left(t \oplus N / N\right) &= \overline{PVC}(n, N) PVC m_n^p(t) = \\ &= \overline{PVC}(n, 0) PVC m_n^p(t) = PVC m_n^p(t). \end{aligned}$$

Свойство 3.

Справедливы выражения:

$$\int_0^1 \overline{PVC m_n^p(t)} PVC m_r^b(t) dt = \delta_r^i PVC u_n^{p+b}; \quad (3a)$$

$$\frac{1}{N} \sum_k \overline{PVC m_n^p(t_k)} m_r^b(t_k) = \delta_r^i PVC u_n^p u_r^b. \quad (3б)$$

Доказательство (3a):

$$\begin{aligned} \int_0^1 \overline{PVC m_n^p(t)} PVC m_r^b(t) dt &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} PVC c_n \left(\overline{PVC m_n^p} \right) \times \\ &\times PVC c_n(m_r^b) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \int_0^1 PVC(n, t) \overline{PVC m_n^p(t)} dt \right\} \times \\ &\times \left\{ \int_0^1 PVC(n, t) PVC m_r^b(t) dt \right\} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \left[\delta_n^i \int_0^1 PVC(n, t) M^p\left(t \ominus_{\mu_l} t_k\right) dt \right] \times \right. \\ &\times \left. \left[\delta_n^r \int_0^1 PVC(n, t) M^b\left(t \ominus_{\mu_l} t_k\right) dt \right] \right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\delta_n^i V_n^p) (\delta_n^r V_n^b) = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_r^n \sum_{j=-\infty}^{\infty} PVC V_{n+jN}^{p+b} = \delta_r^i PVC u_n^{p+b}, \end{aligned}$$

где $PVC(n, t)$ — континуальные функции ПВКФ; $PVC V_n^p$ — коэффициенты Фурье в базисе $PVC(n, t)$.

Из доказательства следует, что сплайны $PVC m_n^p(t)$ образуют ортогональный базис пространства $PVC G_n^p$.

Доказательство (3б):

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_k \overline{m_n^p(t_k)} m_r^b(t_k) &= \\ &= \sum PVC F_n(m_n^p(t_k)) PVC F_n(m_r^b(t_k)) = \\ &= \delta_n^r PVC u_n^p PVC u_r^b. \end{aligned}$$

Свойство 4.

Сплайны $PVC m_n^p \left(t \oplus \frac{p}{\mu_l} \right) / PVC u_n^p$ интерполируют $\overline{PVC}(n, t)$, а именно: $PVC m_n^p(l/N) = \overline{PVC}(n, l/N)$.
Доказательство:

$$PVC m_n^p \left(\frac{p}{2N} \oplus l/N \right) = PVC m_n^L \left(\frac{p}{2} \oplus l/N \right) = \overline{PVC}(n, l/N) PVC m_n^L \left(\frac{p}{2N} \right) = \overline{PVC}(n, l/N) PVC u_n^p.$$

Свойство 5.

Свертка $PVC m_n^p \cdot PVC m_r^b(t) = PVC m_n^{p+b} \delta_n^r$.

Доказательство непосредственно следует из (3а).

Доказанные выше свойства показывают, что (1) есть разложение сигнала $PVC S^p(t)$ по базисным функциям $PVC m_n^p(t)$ или $PVC U_n^p(t)$.

Теорема 1.

Сплайны $PVC m_n^p(t) / \sqrt{PVC u_n^{2p}}$ образуют ортонормированный базис пространства G_n^p .

Доказательство:

Из (3а) следует

$$\int_0^1 \overline{PVC m_n^p(t)} / \sqrt{PVC u_n^{2p}} PVC m_r^p(t) / \sqrt{PVC u_r^{2p}} dt = \delta_n^r.$$

Следствие 1. При $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_{l-1} = \mu_l, N = \mu^l$ справедливо $PVC S^p(t) = Pal S^p(t) = \sum_n Pal c_n Pal U_n^p(t)$.

Доказательство: При равенстве модулей разрядов представления чисел μ_l ПВКФ переходят в ВКФ:

$$PVC(n, k) = \exp \left(j 2\pi \sum_{i=1}^l \frac{n_i k_i}{\mu_l} \right) = W^{\sum_{i=1}^l n_i k_i} = Pal(n, k),$$

где $W = \exp \left(j \frac{2\pi}{\mu_l} \right)$, откуда и следует искомый результат.

Следствие 2. При $\mu = N, l = 1, W = \exp(j\pi / N)$ справедливо

$$PVC S^p(t) = Pal S^p(t) = S^p(t) = \sum_n c_n U_n^p(t).$$

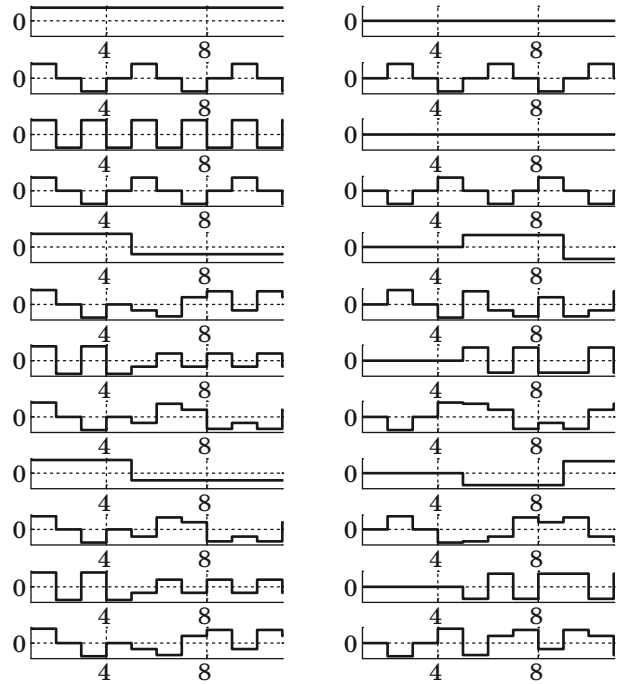
Доказательство следует из следствия 1 и следствия 1 теоремы 1 в работе [5].

Следствие 3. При $\mu = N, l = 1, p \rightarrow \infty$ имеем $\lim_{\substack{p \rightarrow \infty \\ \mu=N}} PVC S^p(t) = \sum_n c_n e^{2\pi j n t}$.

Доказательство следует из следствия 1, следствия 1 теоремы 1 в работе [5] и выражения (16) в работе [7].

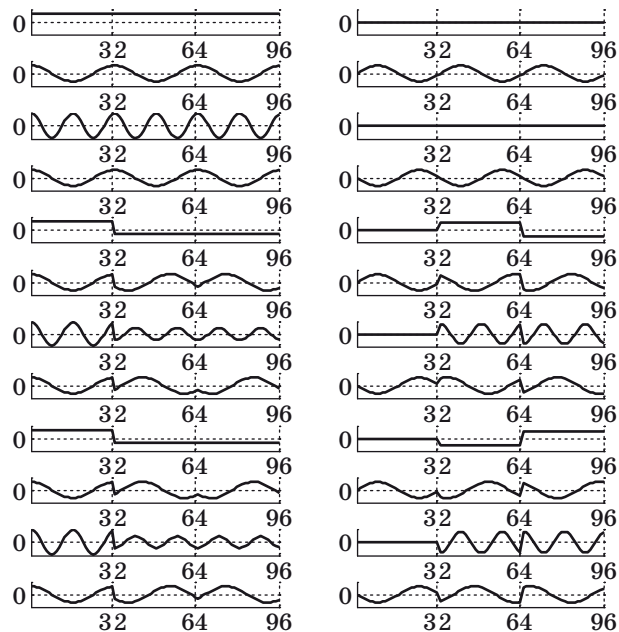
Следствие 4.

Из (2) при $\mu = N, l = 1, p \rightarrow \infty$ следует $S^1(t) = \sum_n c_n U_n^1(t)$.



■ Рис. 1. Функции Понтрягина — Виленкина — Крестенсона, длина функции $N = 12$ (слева реальная часть, справа мнимая часть)

Полученное выражение можно рассматривать как классическое дискретное разложение сигнала $S^p(t)$ (дискретный анализ Фурье) в базисе ступенчатых функций $U_n^1(t)$, которые в точках t_k со-



■ Рис. 2. Функции сплайн-Понтрягина — Виленкина — Крестенсона, длина функции с учетом интерполяции $N = 96$ (слева реальная часть, справа мнимая часть)

впадают с ДЭФ. Теорема 1 показывает, что при разложении сигнала минимума спектральных коэффициентов можно достичь в базисе, гладкость которого совпадает с гладкостью описывающей сигнал функции. В частности, из следствия 3 этой теоремы видно, что базисные функции $e^{2\pi jnt}$ оптимальны для бесконечно дифференцируемых сигналов. И чем больше отличаются степень дифференцируемости сигнала и гладкость базисных функций, тем больше спектральных коэффициентов потребуется для разложения анализируемого процесса.

На рис. 1 показана система ПВКФ, из которой получены базисные функции $\text{pvc}U_n^p(t)$ с модулем $\mu_1 = 3$, $\mu_2 = 4$, порядком сплайна дефекта 1 $p = 3$, пример системы таких функций приведен на рис. 2.

Анализ представленного теоретического материала показал, что на его основе можно строить функциональные базисы для синтеза аналитических моделей сигналов, реализация которых позволила бы использовать их в интересах инфокоммуникационного взаимодействия в целях обеспечения структурной скрытности.

Литература

1. Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л. Методы сплайн-функций. — М.: Наука, 1980. — 352 с.
2. Трахтман А. М., Трахтман В. А. Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах. — М.: Сов. радио, 1975. — 239 с.
3. Zheludev V. A. Periodic splines, harmonic analysis and wavelets in signal and image representation in combined spaces, wavelet // Anal. Appl. / ed. Y. Y. Zeevi and R. Coifman. San Diego, CA: Academic Press, 1998. N 7. P. 477–509.
4. Желудев В. А. Периодические сплайны и быстрое преобразование Фурье // Вычислительная математика и математическая физика. 1992. Т. 32. № 2. С. 179–198.
5. Агиевич С. Н. Сплайн-Виленкина — Крестенсона функции в представлении сигналов // Научное приборостроение. 2002. Т. 12. № 1. С. 79–89.
6. Понтрягин Л. С. Непрерывные группы. 3-е изд., испр. — М.: Наука, 1973. — 519 с.
7. Агиевич С. Н., Алексеев А. А., Глушанков Е. И. Модели сигналов в базисах сплайнов дефекта 1 и оценивание параметров радиоизлучений // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1995. Т. 38. № 4. С. 3–16.