

УДК 621.196.96

ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ТОЧНОСТЬ ОЦЕНКИ ВРЕМЕННЫХ ПАРАМЕТРОВ КОГЕРЕНТНЫХ СИГНАЛОВ

Т. П. Мишура,

канд. техн. наук, доцент

Л. А. Литвинчук,

канд. техн. наук, доцент

Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения

Получено аналитическое выражение для среднеквадратического отклонения оценки задержки коррелированных сигналов на основе максимума апостериорной вероятности и границы Крамера—Рао. Рассчитаны зависимости среднеквадратического отклонения от разности задержек для двух и трех сигналов с различными спектрами для различных отношений сигнал/шум и соотношений начальных фаз.

Ключевые слова — сверхрелеевское разрешение по времени, обработка сигналов.

Введение

Проблема повышения разрешающей способности (РС) по временному параметру продолжает оставаться актуальной, несмотря на большое количество полученных в этом направлении результатов [1–6]. Когда расширение полосы сигнала до величины, необходимой для обеспечения заданной РС, ограничено, приходится исследовать поведение сигналов в области сверхрелеевского разрешения. Для этой области существенным становится зависимость РС от значений разрешаемых параметров, отношения сигнал/шум (ОСШ), пространственно-временных и частотных характеристик сигналов. Задача усложняется при сверхразрешении когерентных сигналов, поскольку в этом случае добавляется зависимость РС от соотношений их амплитуд и фаз.

Оценка потенциальной точности разрешения когерентных сигналов по временному параметру

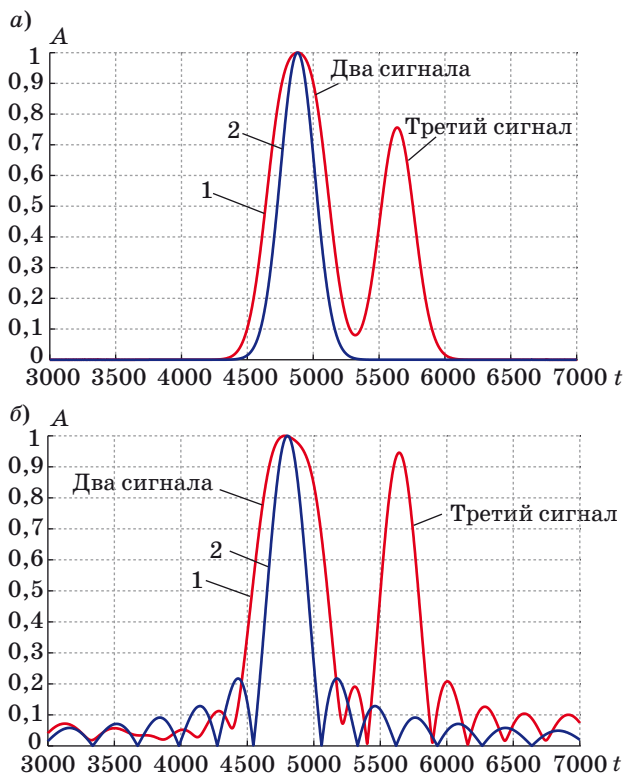
Рассмотрим задачу оценки времени прихода каждого из суммы нескольких сигналов, разнесенных во времени. Сигнал на входе системы выделения информации в общем виде можно записать следующим образом:

$$\xi(t) = \sum_{k=1}^N e_k s(t - \tau_k) + n(t),$$

где N — число сигналов; e_k — неизвестная комплексная амплитуда k -го сигнала; разность фаз между сигналами $\Delta\varphi_{ki} = \arg e_k - \arg e_i$ сохраняется

во всей зоне перекрытия k -го и i -го сигналов в течение всего времени обработки, поэтому сигналы можно считать когерентными, а при переходе от одной пары сигналов к другой она может изменяться в пределах $-\pi \leq \Delta\varphi_{ki} \leq \pi$; τ_k — неизвестное время задержки k -го сигнала; $s(t)$ — детерминированный сигнал с известным спектром; $n(t)$ — белый шум на входе приемного устройства, распределенный по нормальному закону с нулевым средним и спектральной плотностью $N_0/2$. Разность задержек может изменяться в пределах $0 \leq \tau_k - \tau_i \leq \tau_{\max}$, где τ_{\max} — максимальная разность времени прихода сигналов. Например, на рис. 1, а приведена результирующая кривая 1 на выходе согласованного фильтра (СФ) при действии на вход трех сигналов с гауссовой огибающей и одинаковой фазой заполнения. Задержка между двумя из них меньше ширины автокорреляционной функции (АКФ) сигнала, и в сумме они дают отклик с одним максимумом. Третий сигнал задержан на время, большее ширины АКФ, и лежит в области релеевского разрешения по отношению к первым двум сигналам.

Аналогичная картина приведена на рис. 1, б, линия 1, для трех прямоугольных импульсов с линейно-частотно-модулированным (ЛЧМ) заполнением на выходе СФ. Для сравнения в области перекрывающихся сигналов построена АКФ одного сигнала с совмещенным расположением максимумов (см. рис. 1, линии 2). Ширина отклика для двух перекрывающихся сигналов больше, чем ширина АКФ одного сигнала. Первый этап разрешения сигналов будет заключать-



■ Рис. 1. Суммарный отклик на выходе СФ для трех сигналов: а — гауссовы сигналы; б — ЛЧМ-сигналы

ся в определении на выходе СФ разрешаемых по Релею откликов сигналов, а затем откликов, полученных от суммы больше чем одного сигнала. В результате будет получена информация о числе и средней временной задержке откликов от суммы не разрешаемых по Релею сигналов, которая может быть использована в качестве априорной информации при сверхрелеевском разрешении.

Таким образом, задачу оценки времени приходится каждого из сигналов следует разделять на две.

1. Суммарный отклик сигналов на выходе системы обработки имеет максимумы, и надо оценить число и временное положение каждого из максимумов. Эта задача относится к области релеевского разрешения и достаточно подробно изучена.

2. Суммарный выходной отклик имеет один максимум, и необходимо оценить число сигналов и их временное положение. Эту задачу называют задачей сверхрелеевского разрешения.

В обоих случаях задача оценки временной задержки сигналов решается с помощью определения максимума апостериорной вероятности для суммы входных сигналов на фоне белого шума. Однако в случае релеевского разрешения положение сигналов может быть произвольным на

временной оси, т. е. априорная вероятность распределения оцениваемого параметра оказывается равномерной. Тогда для оптимальной оценки параметров можно воспользоваться максимумом функции правдоподобия. В случае сверхрелеевского разрешения вся группа разрешаемых сигналов расположена в пределах ширины отклика с одним экстремумом, т. е. априорная вероятность распределения оцениваемых параметров определяется протяженностью этого отклика, которая связана с шириной АКФ разрешаемых сигналов. Разрешение сводится к определению положения максимума отклика и применению специальной обработки для оценки положения формирующих этот отклик сигналов. Таким образом, дисперсия для плотности априорной вероятности распределения параметров сигналов ограничена и практически совпадает с шириной области сверхрелеевского разрешения, т. е. необходимо определить нижнюю границу для дисперсии оценки разности задержек сигналов в пределах сверхрелеевской области, получаемой из условия Крамера—Рао на основе плотности апостериорной вероятности

$$p(\Theta / \xi) = p(\Theta)p(\xi / \Theta) / p(\xi),$$

где $\Theta(e_k, e_k^*, \tau_k)$ — вектор оцениваемых параметров $\theta_k, k = 1...N$; ξ — вектор наблюдаемых значений; $p(\Theta/\xi)$ — апостериорная вероятность распределения параметров; $p(\Theta)$ — априорная вероятность распределения параметров; $p(\xi/\Theta) = L(\Theta)$ — функция правдоподобия; $p(\xi)$ — распределение вектора наблюдаемых значений.

Граница Крамера—Рао для минимальной дисперсии определяется на основании максимума апостериорной плотности вероятности. Информационная матрица в этом случае имеет вид

$$\mathbf{J} = \left\{ - \left\langle \frac{\partial^2 \ln L(\Theta)}{\partial \theta_m \partial \theta_n} \right\rangle \right\}_{m,n=1}^{3N} + \left\{ - \left\langle \frac{\partial^2 \ln p(\Theta)}{\partial \theta_m \partial \theta_n} \right\rangle \right\}_{m,n=1}^{3N}.$$

Предположим, что априорное распределение зависит только от задержек сигналов и имеет нормальную плотность распределения с нулевым средним и среднеквадратическим отклонением (СКО) d , совпадающим с шириной АКФ одного сигнала. Тогда общая дисперсия оценки временной задержки сигнала определяется выражением

$$D_{\hat{\tau}} = \left(\frac{1}{D_{\hat{\tau}_{\phi,\pi}}} + \frac{1}{D_0} \right)^{-1} = \frac{D_0 D_{\hat{\tau}_{\phi,\pi}}}{D_0 + D_{\hat{\tau}_{\phi,\pi}}} = D_3,$$

где $D_{\hat{\tau}_{\phi,\pi}}$ — дисперсия оценки временного параметра по максимуму функции правдоподобия; D_0 — дисперсия априорной плотности распределения задержек сигналов в пределах области сверхрелеевского разрешения; D_3 — эквивалентная дисперсия.

Граница Крамера—Рао для $D_{\hat{\tau}_{\Phi, n}}$ определяется на основании выражения для функционала правдоподобия в частотной области

$$L(\Theta) = \exp \left\{ -\frac{1}{\pi N_0} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \Xi(\omega) - \sum_{k=1}^N e_k S(\omega) e^{-i\omega\tau_k} \right|^2 d\omega \right\}, \quad (1)$$

где $\Xi(\omega)$ и $S(\omega)$ — мгновенный спектр реализации $\xi(t)$ и спектральная функция сигнала $s(t)$.

Вычисляются вторые производные от логарифма функции правдоподобия (1), составляется информационная матрица Фишера и определяется обратная ей матрица. Элементы на главной диагонали обратной матрицы дадут выражения для дисперсии оценки $D_{\hat{\tau}_{\Phi, n}}$ соответствующего оцениваемого параметра. Для N сигналов число оцениваемых параметров в рассматриваемой задаче равно $3N$, что определяет размерность матрицы Фишера. Элементы обратной матрицы представляют собой отношение алгебраического дополнения к определителю матрицы, т. е. в общем случае отношение $(3N - 1)!$ к $3N!$ слагаемых. Такое быстрое увеличение количества слагаемых в зависимости от N заставляет при получении строгого аналитического выражения для дисперсии оценки временного параметра ограничиться двумя сигналами. Однако соотношения, получаемые в этом случае, дают достаточно полное представление о характере поведения дисперсии в области сверхразрешения. В работе [3] было получено выражение для нижней границы дисперсии $D_{\hat{\tau}_{\Phi, n}}(x) = D(x)$ оценки временных задержек (когерентных) сигналов в зависимости от параметра разрешения $x = |x_1 - x_2|$ и разности фаз $\Delta\varphi$ несущей частоты, где $x_1 = \Delta\omega\tau_1$, $x_2 = \Delta\omega\tau_2$ (τ_1, τ_2 — задержки сигналов, $\Delta\omega$ — полоса сигнала по уровню 0,5). Выражение для нижней границы дисперсии оценки задержки каждого из двух сигналов имеет вид

$$D_{\hat{\tau}_{\Phi, n}k} \geq \frac{1}{2q_k^2} \times \frac{\left(-r_{20} - \frac{|r_1|^2}{1-|r|^2} \right)}{\left(-r_{20} - \frac{|r_1|^2}{1-|r|^2} \right)^2 - \cos^2 \Delta\varphi \left| r_2 + \frac{r^* r_1^2}{1-|r|^2} \right|^2}, \quad k = 1, 2, \quad (2)$$

где $r = r(\tau)$, $r_1(\tau) = r'(\tau)$, $r_2(\tau) = r''(\tau)$ — АКФ сигнала и ее первая и вторая производные; $\tau = \tau_1 - \tau_2$ — разность времен задержек; $\Delta\varphi_{ki} = \arg e_k - \arg e_i$ — разность фаз сигналов; $q_k^2 = |e_k|^2$ — ОСШ для k -го сигнала. Из выражения (2) следует, что при

$\cos^2 \Delta\varphi = 0$, $\Delta\varphi = \pi/2$ дисперсия имеет минимальное значение, а при $\cos^2 \Delta\varphi = 1$, $\Delta\varphi = 0$ — максимальное. Введем безразмерный параметр разрешения $x = \Delta\omega\tau$ и положим $q_1^2 = q_2^2 = q^2$. Выражения для минимальной и максимальной дисперсий будут иметь вид

$$D_{\min}(x) = \frac{F_{\min}(x)}{2q^2}; \quad D_{\max}(x) = \frac{F_{\max}(x)}{2q^2},$$

где функции $F_{\min}(x)$ и $F_{\max}(x)$ определяются формой АКФ или энергетического спектра сигналов. Например, для гауссовых сигналов функции $F_{\min}(x)$ и $F_{\max}(x)$ можно аппроксимировать выражениями

$$F_{\min}(x) \approx \frac{1}{\sin^2(x)}, \quad F_{\max}(x) \approx \frac{3}{\sin^4(x)}$$

при $0 \leq x \leq \pi/2$.

Можно показать, что выражение для дисперсии, полученное усреднением по случайной разности фаз $\Delta\varphi$ в пределах $[-\pi, +\pi]$, точно совпадает с величиной $D_{\text{ср}} = \sqrt{D_{\min} D_{\max}}$. Дисперсии и СКО, полученные из выражения (2) при малых значениях $x \leq 0,2$ для гауссовых сигналов, имеют вид

$$D_{\min}(x) \geq \frac{2}{q^2 x^2};$$

$$D_{\text{ср}}(x) = \sqrt{D_{\min}(x) D_{\max}(x)} \geq \frac{2\sqrt{3}}{q^2 x^3}; \quad D_{\max}(x) \geq \frac{6}{q^2 x^4};$$

$$d_{\min} \geq \frac{\sqrt{2}}{qx}; \quad d_{\text{ср}} \geq \frac{(2\sqrt{3})^{1/2}}{qx^{3/2}}; \quad d_{\max} \geq \frac{\sqrt{6}}{qx^2}.$$

Подставляя $D(x)$ в выражение для D_0 и полагая, что нормированная к квадрату ширины АКФ дисперсия D_0 примерно равна единице, получим

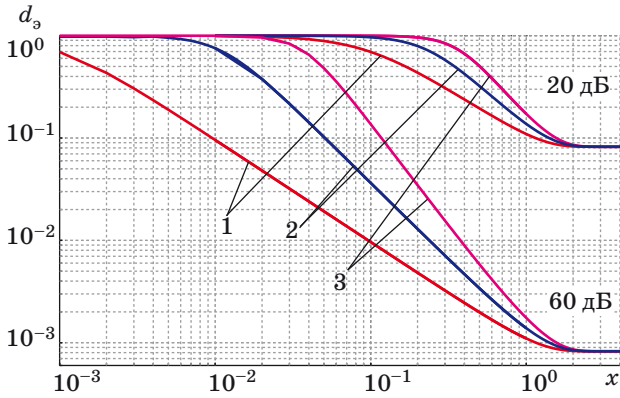
$$D_0(x, q) = \frac{F(x)}{2q^2 + F(x)}$$

или для нормированного эквивалентного СКО

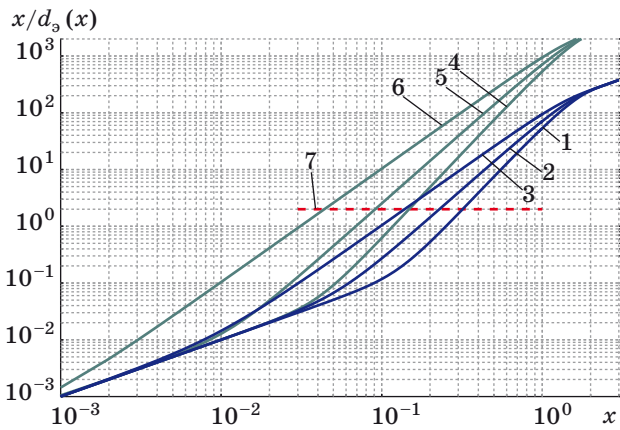
$$d_0(x, q) = \sqrt{\frac{F(x)}{2q^2 + F(x)}}.$$

На рис. 2 приведена зависимость минимального, среднего и максимального эквивалентного СКО от параметра разрешения $x = |x_1 - x_2|$ для гауссова сигнала при двух значениях ОСШ.

При стремлении x к нулю эквивалентное нормированное СКО стремится к 1, а при стремлении x к 1 СКО стремится к $\sim 1/q$. Разрешающую способность определим как наименьшее значение параметра разрешения, при котором выполняется условие $x \geq 2d_0(x)$. Это выражение связывает РС с точностью оценки задержки сигналов. Введем обозначение $t(x, q^2, \Delta\varphi) = x/d_0(x)$. Эта зависи-



■ Рис. 2. Зависимость минимального (1), среднего (2) и максимального (3) эквивалентного СКО от параметра разрешения для гауссова сигнала с $q^2 = 20$ и 60 дБ



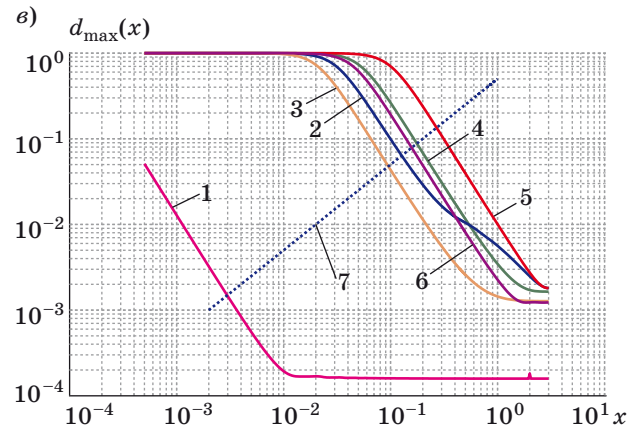
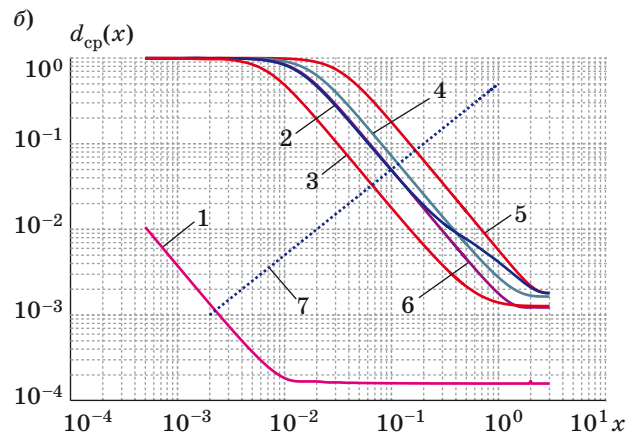
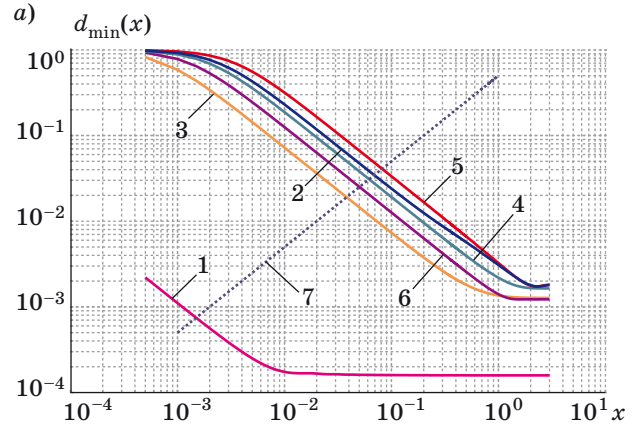
■ Рис. 3. Теоретическая зависимость $x/d_s(x)$ от параметра разрешения для гауссова сигнала: 1, 2, 3 — d_{min}, d_{cp}, d_{max} , $q^2 = 40$ дБ; 4, 5, 6 — d_{min}, d_{cp}, d_{max} , $q^2 = 60$ дБ; 7 — пороговый уровень разрешения

мость для гауссова сигнала представлена на рис. 3 для различных ОСШ и $\Delta\varphi$. РС соответствует точкам пересечения семейства кривых с линией $t = 2$ (см. рис. 3, линия 7). При реальных измерениях задержек сигналов на выходе измерителя получим оценки

$$\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x} = |\hat{x}_1 - \hat{x}_2| \text{ и } \hat{d}_s(x) = \sqrt{(\hat{D}_{1s}(x) + \hat{D}_{2s}(x))/2}.$$

Поэтому необходимо ввести определение РС с позиций статистической теории. В этом случае $t(x) = \hat{x} / \hat{d}_s(x)$ выражается через оценки и становится случайной величиной. Замечаем, что $t(x)$ совпадает с двухвыборочной статистикой Стьюдента для проверки гипотез: $H_0 - x_1 = x_2$ (задержки одинаковы, сигналы не разрешаются); $H_1 - x_1 \neq x_2$ (оценки принимаются в качестве истинных задержек).

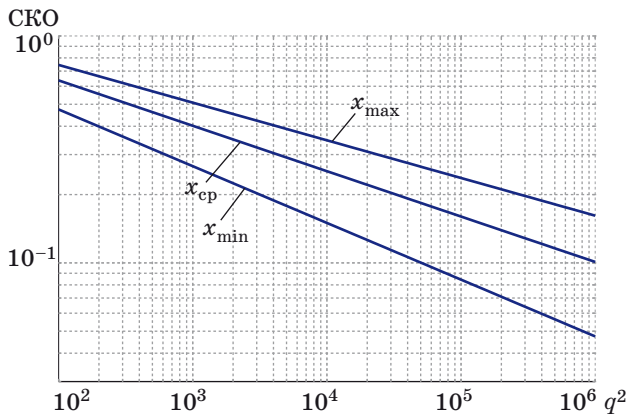
При размере выборки $n \geq 20$ и уровне значимости $0,05$ пороговое значение $t(x) = 2$. При $t(x) < 2$



■ Рис. 4. Минимальное (а), среднее (б) и максимальное (в) эквивалентное СКО для исследуемых спектров: 1 — $\sin x/x$; 2 — ЛЧМ; 3 — экспоненциальный; 4 — гауссов; 5 — прямоугольный; 6 — треугольный; 7 — пороговый уровень разрешения $x \geq 2d_s(x)$

принимается гипотеза H_0 , при $t(x) > 2$ — гипотеза H_1 .

Следует отметить, что для сигналов, наиболее интересных с точки зрения сверхрелеевого разрешения, d_s приходится рассчитывать численными методами. На рис. 4, а–в показаны зависимости эквивалентных СКО от x при $q^2 = 60$ дБ.



■ Рис. 5. Зависимость параметра разрешения от q^2 для гауссова сигнала

Воспользовавшись условием разрешения $x \geq 2d_g(x)$ и соотношениями, связывающими СКО и параметр разрешения, можем записать в общем виде зависимость разрешающей способности от ОСШ (рис. 5):

$$x_{\min} \geq \frac{c}{q^{1/2}}; x_{\text{cp}} \geq \frac{c_1}{q^{2/5}}; x_{\max} \geq \frac{c_2}{q^{1/3}},$$

где c, c_1, c_2 — постоянные, зависящие от формы спектра сигнала. Они могут быть определены из графиков рис. 4. Например, для гауссова сигнала $c = 1,5, c_1 = 1,6, c_2 = 1,6$.

Рассмотрим теперь случай трех сигналов в области сверхрелеевого разрешения. Как уже отмечалось, размерность вектора оцениваемых параметров и матрицы Фишера в этом случае равна $3N = 9$. Если матрица Фишера не содержит нулей, то выражение для дисперсии будет представлять собой отношение сумм из $(3N - 1)! = 8! \sim 40\,000$ слагаемых в числителе и $9! \sim 400\,000$ в знаменателе. Следует заметить, что обычно матрица Фишера оказывается достаточно разреженной и симметричной. В этом случае приближенное количество слагаемых в определителе можно найти из соотношения $n \approx N!/2M$, где M — число нулей в матрице, при $M \leq N^2/2$. Например, в работе [3] показано, что для двух сигналов матрица Фишера имеет размерность $N = 6$ и число нулей $M = 16$, т. е. примерно половина всех членов матрицы.

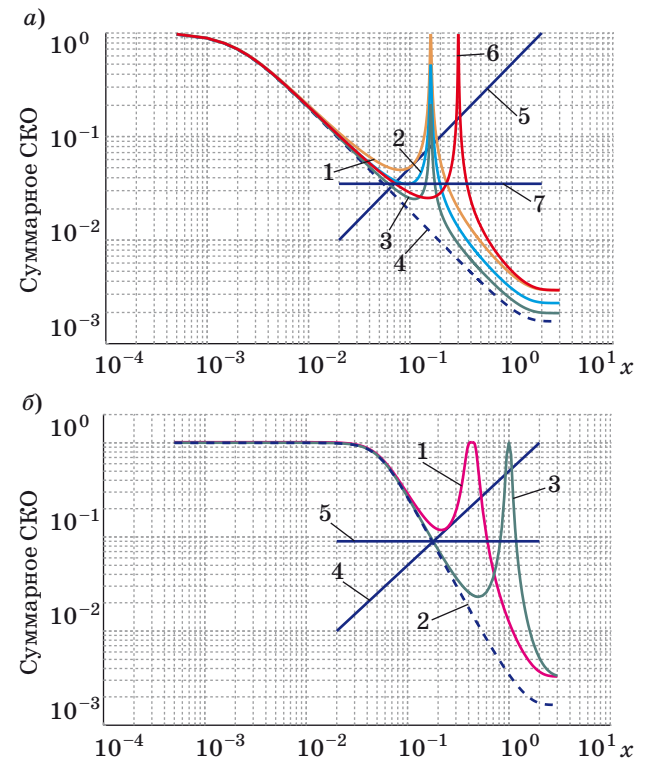
Точное число слагаемых в знаменателе 18 (приближенная оценка дает $n \approx 6!/2 \cdot 16 \approx 22$). Число членов в алгебраическом дополнении при числе нулей в нем $M = 12$ примерно равно $n \approx 5!/2 \cdot 12 \approx 5$ (точное значение 5). Поскольку и для трех сигналов почти половина всех членов матрицы Фишера равна 0, то в выражении для дисперсии число слагаемых в числителе и знаменателе уменьшится примерно в $N^2 = 81$ раз, т. е. получим ~ 400 слагаемых в числителе и ~ 4000 в знаменателе.

Преобразование такого выражения к обозримому виду не представляется возможным.

Попробуем несколько упростить задачу. Предположим, что фазы сигналов известны и равны нулю, амплитуды неизвестны, но одинаковы: $e_1 = e_2 = e_3 = e$. В этом случае размерность вектора параметров и матрицы Фишера равна 6. Сама матрица Фишера имеет вид

$$\mathbf{J} = |e|^2 \times \begin{pmatrix} 1 & r(\tau_{12}) & r(\tau_{13}) & 0 & -r_1(\tau_{12}) & -r_1(\tau_{13}) \\ r(\tau_{12}) & 1 & r(\tau_{23}) & r_1(\tau_{12}) & 0 & -r_1(\tau_{23}) \\ r(\tau_{13}) & r(\tau_{23}) & 1 & r_1(\tau_{13}) & r_1(\tau_{23}) & 0 \\ 0 & r_1(\tau_{12}) & r_1(\tau_{13}) & 1 & -r_2(\tau_{12}) & -r_2(\tau_{13}) \\ -r_1(\tau_{12}) & 0 & r_1(\tau_{23}) & -r_2(\tau_{12}) & 1 & -r_2(\tau_{23}) \\ -r_1(\tau_{13}) & -r_1(\tau_{23}) & 0 & -r_2(\tau_{13}) & -r_2(\tau_{23}) & 1 \end{pmatrix},$$

где $r(\tau_{nm}), r_1(\tau_{nm}), r_2(\tau_{nm})$ — функция автокорреляции, ее первая и вторая производные; τ_{nm} — разность задержек соответствующих сигналов, $n, m = 1 \dots 3$.



■ Рис. 6. График СКО для трех гауссовых сигналов при $q^2 = 60$ дБ: а — минимальное СКО при: 1 — $x_2 - x_1 = x_3 - x_2 \leq 0,08$; 2 — $x_2 - x_1 = (x_3 - x_1)/4$; 3 — $x_2 - x_1 = (x_3 - x_1)/6$; 4 — $x_2 - x_1 = 0$; 5 — пороговый уровень; 6 — $x_3 - x_1 = 0,3$; 7 — уровень, определяющий область разрешения третьего сигнала; б — максимальное СКО при: 1 — $x_2 - x_1 = x_3 - x_2 \leq 0,2$; 2 — $x_2 - x_1 = 0$; 3 — $x_3 - x_1 = 1$; 4 — пороговый уровень; 5 — уровень, определяющий область разрешения третьего сигнала

Выражения для дисперсии оценок задержки каждого из сигналов содержат 20 слагаемых в числителе (приближенная оценка дает $5!/8 = 15$) и 130 слагаемых в знаменателе (по приближенной оценке $6!/12 = 60$). Видим, что и в этом случае аналитические выражения очень сложно упрощать и интерпретировать. Подойдем к задаче сверхразрешения трех сигналов следующим образом. Будем считать, что в сверхрелеевской области находятся три сигнала, причем задержка между первым и вторым совпадает с задержкой между вторым и третьим сигналами (рис. 6, а, б).

При уменьшении задержки СКО будет увеличиваться за счет сближения второго сигнала как с первым, так и с третьим. СКО оценки для второго сигнала определяется суммарным минимальным СКО при сдвиге фаз первого и третьего сигнала относительно второго на $\pi/2$ (см. рис. 6, а) и максимальным СКО при равенстве фаз всех сигналов (см. рис. 6, б). Если график суммарного СКО в интервале между первым и третьим сигналами лежит выше порогового уровня, сигналы не разрешаются. Смещение второго сигнала в этой области в сторону первого или третьего сигнала приводит к разрешению только двух сигналов из трех. Этот графический способ определения ха-

рактеристик сверхразрешения можно распространить на случай четырех и более сигналов.

Заключение

Впервые получено аналитическое выражение для СКО оценки задержки двух когерентных сигналов с помощью максимума апостериорной вероятности и границы Крамера—Рао. Показано, что СКО стремится к ширине АКФ при стремлении разности задержек к нулю. Зависимость от соотношения фаз разрешаемых сигналов указывает, что СКО примерно в 6 раз больше при нулевой разности фаз, чем при разности фаз, равной $\pi/2$. При этом СКО уменьшается по мере перехода от одной формы спектра к другой в следующей последовательности: прямоугольный, треугольный, гауссов, спектр ЛЧМ-сигнала, экспоненциальный и $\sin(x)/x$. Зависимость наименьшего параметра разрешения от ОСШ для гауссова сигнала позволяет сделать вывод, что сверхрелеевское разрешение $x_{\text{ср}} = 0,4$ возможно при ОСШ 30 дБ, а $x_{\text{ср}} = 0,1$ — при ОСШ 60 дБ. Полученные аналитические соотношения для двух сигналов позволили разработать методику графического определения характеристик сверхразрешения для трех и более сигналов.

Литература

1. Хелстром К. Статистическая теория обнаружения сигналов. — М.: Иностранная литература, 1962. — 432 с.
2. Ширман Я. Д. Разрешение и сжатие сигналов. — М.: Сов. радио, 1974. — 360 с.
3. Монаков А. А., Мишура Т. П. Потенциальная разрешающая способность РЛС по дальности // Успехи современной радиоэлектроники. 2008. № 12. С. 31–36.
4. Чижев А. А. Сверхрелеевское разрешение: в 2 т. — М.: Красанд, 2010. — Т. 1. 96 с.; Т. 2. 104 с.
5. Слюсар В. И., Уткин Ю. В. Уплотнение каналов связи на основе сверхрелеевского разрешения сигналов по времени прихода // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 2003. № 5. С. 40–48.
6. Ермолаев В. Т., Флакман А. Г. Методы оценивания параметров источников сигналов и помех, принимаемых антенной решеткой / ННГУ им. Н. И. Лобачевского. — Нижний Новгород, 2007. — 98 с.