

УДК 519.7

РОБАСТНАЯ СИНХРОНИЗАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ СЕТИ С ПЕРЕКЛЮЧАЮЩЕЙСЯ СТРУКТУРОЙ

И. Б. Фуртат,

канд. техн. наук, доцент

Астраханский государственный технический университет

Получен алгоритм робастного управления динамической сетью с переключающейся структурой, когда измерению доступны только выходы локальных подсистем, но не их производные. Предполагается, что математические модели подсистем сети описываются линейными дифференциальными уравнениями, подверженными действию внутренних и внешних неконтролируемых возмущений. Полученная схема управления обеспечивает синхронизацию сети с требуемой точностью. Работоспособность полученной схемы проиллюстрирована на численном примере сети, состоящей из четырех узлов.

Ключевые слова — динамическая сеть, орграф, граф, синхронизация сети, компенсация возмущений.

Введение

В последнее время наблюдается рост интереса к проблемам управления динамическими сетями [1–6], вызванный появлением новых задач в биологии, физике, робототехнике, энергетических и телекоммуникационных сетях и т. п. Одним из способов управления динамической сетью является консенсусное управление, цель которого состоит в поиске управляющего устройства, способного синхронизировать подсистемы сети, в которой нет лидера. При этом траектории локальных объектов стремятся к некоторой общей величине, зависящей от их параметров и межузловых связей.

На сегодняшний день уже предложено достаточное количество решений по проблеме управления динамическими сетями. Так, для обеспечения консенсуса в мультиагентных системах с измеряемыми векторами состояния локальных объектов предложен статический закон управления [1]. При измерении выходов локальных подсистем вводится наблюдатель, на базе оценок которого формируется динамический закон регулирования. Получены условия расчета настраиваемых параметров в регуляторе, учитывающие топологию графа и орграфа сети. На базе подхода H^∞ -оптимизации предложен способ синхронизации сети в предположении, что измерению доступны векторные входы и выходы каждой подсистемы [2]. Однако для расчета регулятора необходимо решить матричное уравнение Риккати,

зависящее от параметров параметрически неопределенных локальных объектов. Было впервые исследовано статическое консенсусное управление по выходу сетевыми объектами произвольного порядка [3]. Для решения задачи использовалась теорема о пассивации [7] и результаты работы [1].

Особый интерес представляет управление сетью, топология которой может изменяться в процессе ее функционирования. Такие задачи возникают, например, при управлении группой мобильных роботов [6], связь между которыми ограничена, или при управлении электроэнергетической сетью [8], где связь между электрическими генераторами зависит от параметров линий передачи и нагрузки. Так, в работах [4, 5] консенсус в сети, состоящей из интеграторов или устойчивых линейных дифференциальных уравнений, предложено осуществлять с использованием статического закона регулирования и в предположении, что граф сети сбалансированный. В статье [6] описано решение для сети интеграторов при условии, что орграф, ассоциированный с сетью, содержит ориентированное остовное дерево. Под ориентированным остовным деревом понимается ориентированное дерево, составленное из ребер орграфа и такое, что в нем существует путь из корня в любую другую вершину [6, 9]. Стоит отметить, что многие результаты, касающиеся свойств орграфа с ориентированным остовным деревом [6], были получены ранее [9].

Как правило, в вышеперечисленных работах не рассматривались вопросы управления сетью неидентичных объектов, когда измерению доступны только скалярные выходы подсистем. На практике задачи управления неидентичными объектами возникают, например, при управлении сетью электрических генераторов различных мощностей. Возможность измерения только скалярных выходов подсистем сети связана с отсутствием соответствующих измерительных устройств. Так, авторы работы [8] отмечают, что при управлении сетью электрических генераторов устойчивыми измерениями, особенно в аварийных ситуациях, являются измерения только относительных угловых скоростей вращения роторов генераторов.

В настоящей статье предложено робастное управление динамической сетью с переключающейся структурой, где каждая ее подсистема описывается линейным дифференциальным уравнением, подверженным действию внутренних и внешних неконтролируемых возмущений. Предполагается, что измерению доступны только выходы локальных подсистем. При решении задается орграф, каждая вершина которого ассоциирована с соответствующей подсистемой сети. Для компенсации неконтролируемых возмущений используется подход [10], основанный на введении вспомогательного контура, позволяющего выделить неконтролируемые возмущения в замкнутой системе. Полученный алгоритм обеспечивает синхронизацию сети с требуемой точностью. Показано, что результаты, предложенные для сети, ассоциированной с орграфом, справедливы и для сети, ассоциированной с графом.

Постановка задачи

Рассмотрим орграф $\Gamma_l = (V, E_l)$, ассоциированный с сетью S , где каждой вершине орграфа Γ_l соответствует подсистема S_i , $i = 1, \dots, k$; $V = \{v_1, \dots, v_k\}$ — множество вершин; $E_l \subseteq V \times V$ — множество ребер. Пусть $C = (c_{ij}) \in R^k$ — взвешенная матрица смежности орграфа Γ_l такая, что $c_{ij} > 0$, если $j \in N_i$, иначе $c_{ij} = 0$, $N_i = \{v_j \in V: (v_i, v_j) \in E_l\}$ — множество смежных вершин для узла v_i . Запись $(v_i, v_j) \in E_l$ означает, что информация поступает от подсистемы S_j к подсистеме S_i [11]. Считается, что в процессе функционирования системы структура связей орграфа может изменяться. Обозначим $\Gamma = \{\Gamma_l: l = 1, \dots, m\}$ — множество возможных значений топологий орграфа сети.

Например, при решении задач управления сетью электрических генераторов предполагается, что в каждом узле сети расположен генератор. При введении орграфа, ассоциированного с се-

тью, полагается, что каждый узел сети (электрический генератор) ассоциирован с вершиной орграфа. Линии связи между генераторами сети ассоциированы с дугами орграфа.

Рассмотрим подсистему S_i , соответствующую i -й вершине орграфа Γ_l сети S , динамические процессы в которой описываются следующим уравнением:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_i(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}_i(t) + \mathbf{B}_i u_i(t) + \mathbf{D}_i f_i(t), \\ y_i(t) &= \mathbf{L}\mathbf{x}_i(t), \quad \mathbf{x}_i(0) = \mathbf{x}_{0i}, \quad i = 1, \dots, k, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\mathbf{x}_i(t) \in R^n$ — вектор состояния i -й подсистемы; $u_i(t)$ и $y_i(t)$ — скалярные вход и выход, доступные измерению; $f_i(t)$ — неконтролируемое внешнее ограниченное возмущение; элементы матрицы $\mathbf{A} \in R^{n \times n}$ и векторов $\mathbf{B}_i \in R^n$, $\mathbf{D}_i \in R^n$ — неизвестные числа; $\mathbf{L} = [1, 0, \dots, 0]$ — матрица соответствующей размерности; \mathbf{x}_{0i} — неизвестные начальные условия. Так, при описании электроэнергетической сети модели электрических генераторов могут быть представлены уравнениями (1). Например, в работе [8] $\mathbf{x}_i(t) = [\delta_i(t), \omega_i(t), P_i(t)]^T$, где $\delta_i(t)$ — угол поворота ротора i -го генератора относительно синхронной оси вращения [рад]; $\omega_i(t)$ — относительная скорость ротора i -го генератора [рад/с]; $P_i(t)$ — разность электрической входной мощности, поступающей на i -й генератор, и входной механической мощности i -го генератора [отн. ед.].

Требуется синтезировать непрерывный закон управления, обеспечивающий ε -синхронизацию [12, 13] сети S с заданной точностью, т. е. необходимо обеспечить выполнение условия

$$|y_i(t) - y_j(t)| < \varepsilon \quad (2)$$

по истечении времени $t = T$, где ε — заданное число. При управлении электроэнергетической сетью целевое условие (2) является условием синхронизации сети генераторов. Решим сформулированную задачу при следующих *предположениях*.

1. Орграфы Γ_l , $l = 1, \dots, m$ содержат ориентированное остовное дерево.

2. Неизвестные элементы матриц \mathbf{A} , \mathbf{B}_i , \mathbf{D}_i и \mathbf{C} зависят от вектора неизвестных параметров $\zeta \in \Xi$, где Ξ — известное множество. Пары $(\mathbf{A}, \mathbf{B}_i)$ управляемы и пара (\mathbf{L}, \mathbf{A}) наблюдаема.

3. Выполнены условия: $\mathbf{A} = \mathbf{A}_N + \mathbf{B}_N \mathbf{h}^T(\zeta)$, $\mathbf{B}_i = \mathbf{B}_N + \mathbf{B}_N \tau_i(\zeta)$, $\mathbf{D}_i = \mathbf{B}_N k_i(\zeta)$, где $\mathbf{A}_N \in R^{n \times n}$, $\mathbf{B}_N \in R^n$ — известные номинальные постоянные матрицы, причем \mathbf{A}_N — гурвицева; $\mathbf{h}(\zeta) \in R^n$, $\tau_i(\zeta) \in R$, $k_i(\zeta) \in R$ — неизвестные вектор и числа.

4. Локальные подсистемы (1) сети S — минимально фазовые объекты.

Метод решения

Принимая во внимание предположение 3, составим уравнение для ошибки

$$\tilde{\mathbf{x}}_i(t) = \sum_{j \in N_i} c_{ij} (\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t))$$

в виде

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_i(t) &= \mathbf{A}_N \tilde{\mathbf{x}}_i(t) + \mathbf{B}_N \sum_{j \in N_i} c_{ij} [u_i(t) + \varphi_{ij}(t)], \\ \tilde{\mathbf{y}}_i(t) &= \mathbf{L} \tilde{\mathbf{x}}_i(t), \end{aligned} \quad (3)$$

где $\varphi_{ij}(t) = \mathbf{h}^T(\boldsymbol{\zeta})(\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t)) + \tau_i(\boldsymbol{\zeta})u_i(t) - (\tau_j(\boldsymbol{\zeta}) + 1) \times \times u_j(t) + k_i(\boldsymbol{\zeta})f_i(t) - k_j(\boldsymbol{\zeta})f_j(t)$ — функция, содержащая в себе неопределенности i -й подсистемы и смежных ей подсистем.

Чтобы выделить данные неопределенности [10], введем вспомогательный контур

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_{ai}(t) &= \mathbf{A}_N \mathbf{x}_{ai}(t) + \alpha \mathbf{B}_N u_i(t), \\ \mathbf{y}_{ai}(t) &= \mathbf{L} \mathbf{x}_{ai}(t), \quad \mathbf{x}_{ai}(0) = \mathbf{x}_{ai0}, \\ & i = 1, \dots, k. \end{aligned} \quad (4)$$

Принимая во внимание уравнения (3) и (4), составим функцию рассогласования $\sigma_i(t) = \tilde{\mathbf{x}}_i(t) - \mathbf{x}_{ai}(t)$ в виде

$$\dot{\sigma}_i(t) = \mathbf{A}_N \sigma_i(t) + \mathbf{B}_N \psi_i(t), \quad \zeta_i(t) = \mathbf{L} \sigma_i(t). \quad (5)$$

Здесь $\psi_i(t) = \sum_{j \in N_i} c_{ij} [u_i(t) + \varphi_{ij}(t)] - \alpha u_i(t)$ — новая функция возмущения, содержащая в себе неопределенности i -й локальной подсистемы и смежных ей подсистем, а также неопределенности связей между ними. Преобразуем уравнение рассогласования (5) к форме вход-выход

$$\mathbf{Q}_N(p) \zeta_i(t) = \mathbf{R}_N(p) \psi_i(t), \quad (6)$$

где $\mathbf{Q}_N(p)$, $\mathbf{R}_N(p)$ — линейные стационарные дифференциальные операторы, полученные при переходе от (5) к (6), $\deg \mathbf{Q}_N(p) = n$, $\deg \mathbf{R}_N(p) = m$, $p = d/dt$ — оператор дифференцирования. Ради простоты положим $\mathbf{Q}_N(p) = \mathbf{Q}_m(p) \mathbf{R}_N(p)$.

Из уравнения (6) видно, что сигнал $\zeta_i(t)$ содержит информацию о возмущениях, которые присутствуют в функции $\psi_i(t)$. Если бы производные входа и выхода каждой локальной подсистемы были доступны измерению, то закон управления $u_i(t) = -1/\alpha_i \mathbf{Q}_m(p) \zeta_i(t) = -1/\alpha_i \psi_i(t)$, $i = 1, \dots, k$ обеспечил бы точную компенсацию возмущений. Однако из постановки задачи производные сигналов $y_i(t)$ и $u_i(t)$ не доступны измерению. Поэтому управляющее воздействие $u_i(t)$ сформируем в виде

$$u_i(t) = -\alpha^{-1} \mathbf{Q}_m(p) \bar{\zeta}_i(t), \quad i = 1, \dots, k. \quad (7)$$

Здесь $\bar{\zeta}_i(t)$ — оценка функции $\zeta_i(t)$. Принимая во внимание идеальное управление $u_i(t) = -1/\alpha_i \mathbf{Q}_m(p) \zeta_i(t)$ и реальное уравнение (7), перепишем (3) в виде

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_i(t) = \mathbf{A}_N \tilde{\mathbf{x}}_i(t) + \mathbf{B}_N \bar{\Delta}_i(t), \quad \tilde{\mathbf{y}}_i(t) = \mathbf{L} \tilde{\mathbf{x}}_i(t), \quad (8)$$

где $\bar{\Delta}_i(t) = \bar{\zeta}_i(t) - \zeta_i(t)$.

Для оценки производных сигнала $\bar{\zeta}_i(t)$ в (7) рассмотрим наблюдатель [14]

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_i(t) &= \mathbf{G}_0 \xi_i(t) + \mathbf{D}_0 (\bar{\zeta}_i(t) - \zeta_i(t)), \\ \bar{\zeta}_i(t) &= \mathbf{L} \xi_i(t), \quad i = 1, \dots, k, \end{aligned} \quad (9)$$

где $\xi_i(t) \in R^\gamma$, $\gamma = n - m$; $\mathbf{G}_0 = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I}_{\gamma-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{I}_{\gamma-1}$ — единичная матрица порядка $\gamma - 1$; $\mathbf{D}_0 = -[d_1 \mu^{-1}, d_2 \mu^{-2}, \dots, d_\gamma \mu^{-\gamma}]^T$, коэффициенты $d_1, d_2, \dots, d_\gamma$ выбираются так, чтобы матрица $\mathbf{G} = \mathbf{G}_0 - \mathbf{D}\mathbf{L}$ была гурвицевой, $\mathbf{D} = [d_1, d_2, \dots, d_\gamma]^T$, $\mu > 0$ — достаточно малая величина.

Введем вектор $\bar{\eta}_i(t) = \bar{\mathbf{D}}(\xi_i(t) - \theta_i(t))$, который характеризует точность оценки производных сигнала $\zeta_i(t)$, где $\bar{\mathbf{D}} = \text{diag}\{\mu^{\gamma-1}, \mu^{\gamma-2}, \dots, \mu, 1\}$, $\theta_i(t) = [\zeta_i(t), \dot{\zeta}_i(t), \dots, \zeta_i^{(\gamma)}(t)]^T$. Продифференцировав $\bar{\eta}_i(t)$ по времени с учетом уравнения (9), получим $\dot{\bar{\eta}}_i(t) = \mu^{-1} \mathbf{G} \bar{\eta}_i(t) + \bar{\mathbf{b}} \zeta_i^{(\gamma)}(t)$; $\bar{\Delta}_i(t) = \mu^{\gamma-1} \mathbf{L} \bar{\eta}_i(t)$, где $\bar{\mathbf{b}} = [0; \dots; 0, 1]^T$. Преобразуем предпоследние уравнения в эквивалентные относительно выхода $\bar{\Delta}_i(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_i(t) &= \mu^{-1} \mathbf{G} \eta_i(t) + \mathbf{b} \dot{\zeta}_i(t); \\ \bar{\Delta}_i(t) &= \mu^{\gamma-1} \mathbf{L} \eta_i(t). \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь $\eta_i(t) \in R^\gamma$, причем первые компоненты векторов $\eta_i(t)$ и $\bar{\eta}_i(t)$ равны $\mathbf{b} = [1, 0, \dots, 0]^T$.

Принимая во внимание (10), перепишем (8) как

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_i(t) &= \mathbf{A}_N \tilde{\mathbf{x}}_i(t) + \mu^{\gamma-1} \mathbf{B}_N \mathbf{g}^T \Delta_i(t); \\ \tilde{\mathbf{y}}_i(t) &= \mathbf{L} \tilde{\mathbf{x}}_i(t), \end{aligned} \quad (11)$$

где $\Delta_i(t) = [\eta_i^1(t), \dot{\eta}_i^1(t), \dots, (\eta_i^1(t))^{(\gamma)}]^T$; \mathbf{g} — вектор, составленный из коэффициентов оператора $\mathbf{Q}_N(p)$, записанных в обратном порядке.

Утверждение. Пусть выполнены предположения 1–4. Тогда система управления (4), (7), (9) при $\mu \leq \mu_0$ обеспечивает выполнение ε -синхронизации (2), где $\mu_0 > 0$ и

$$\begin{aligned} \mu_0 < \min \left\{ \|\mathbf{Q}_2\|^{-1} \|\mathbf{H}\mathbf{b}\|^2; \right. \\ \left. \gamma^{-1} \sqrt{0,125(k-1)^{-1} \rho \varepsilon^{-1} c} \|\mathbf{Q}_1\| \|\mathbf{P}\mathbf{B}_N \mathbf{g}^T\|^{-2} \right\}, \end{aligned} \quad (12)$$

где $\rho = \min_{l=1, \dots, m} \{\lambda_2(\mathbf{L}(\Gamma_l))\}$, $\lambda_2(\mathbf{L}(\Gamma_l))$ — наименьшее ненулевое собственное число (алгебраиче-

ская связность [11]) нормированного симметризованного лапласиана $L(\Gamma_l)$ орграфа Γ_l , матрицы P и H являются решением уравнений

$$A_N^T P + P A_N = -Q_1, \quad G^T H + H G = -Q_2,$$

$$Q_1 = Q_1^T > 0, \quad Q_2 = Q_2^T > 0. \quad (13)$$

Под нормированным симметризованным лапласианом понимается симметризованный лапласиан, соответствующий орграфу Γ_l , у которого $c_{ij} = 1$, если $j \in N_i$, иначе $c_{ij} = 0$. Понятие симметризованного лапласиана $L(\Gamma_l)$ и его свойства подробно рассмотрены в работе [11].

Следствие. Утверждение справедливо, если $\Gamma_l, l = 1, \dots, m$ — графы, у которых есть остовное дерево. Причем параметр μ_0 можно выбирать из условия

$$\mu_0 < \min \left\{ \|Q_2\|^{-1} \|Hb\|^2; \right.$$

$$\left. \gamma^{-1} \sqrt{0,125(k-1)^{-1} \tilde{\rho} \underline{c}^{-1} \bar{c} \|Q_1\| \|PB_N G^T\|^{-2}} \right\}, \quad (14)$$

где $\tilde{\rho} = \lambda_2(L(\Gamma_{ls}))$, Γ_{ls} — любой подграф из множества графов Γ_l , содержащий остовное дерево и состоящий из k вершин и $k - 1$ ребер.

Пример

Рассмотрим орграфы $\Gamma_l, l = 1, \dots, 6$ (рис. 1), описывающие информационные связи сети S , состоящей из четырех подсистем $S_i, i = 1, \dots, 4$.

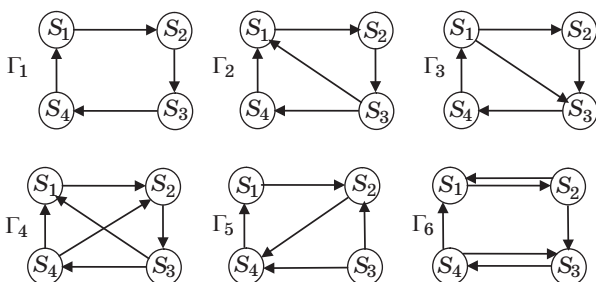
Рассмотрим подсистему S_i , которая описывается следующим уравнением:

$$\dot{x}_i(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix} x_i(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ b_i \end{bmatrix} u_i(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ d_i \end{bmatrix} f_i(t);$$

$$y_i(t) = [1 \quad 0] x_i(t), \quad i = 1, \dots, 4.$$

Класс неопределенности Ξ задан неравенствами: $|a_j| \leq 10; j = 1, 2; 0 < b_i \leq 10; |d_i| \leq 10; |f_i(t)| \leq 10; 0,1 < c_{ij} \leq 10$.

Цель управления состоит в синтезе алгоритма, обеспечивающего выполнение ε -синхронизации (2).



■ Рис. 1. Орграфы Γ_l сети S

Выберем в (4) $\alpha = 1, A_N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, B_N = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

и сформируем вспомогательный контур в виде

$$\dot{x}_{ai}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} x_{ai}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_i(t);$$

$$y_{ai}(t) = [1 \quad 0] x_{ai}(t), \quad x_{ai}(0) = 0, \quad i = 1, \dots, 4.$$

Пусть в (9) $D = [2 \quad 1]^T$. Для выбора параметра μ в (9) воспользуемся условиями (12) и (13). Пусть в (13) $Q_1 = Q_2 = 0,1I_2$. Из структур орграфов сети S (см. рис. 1) наименьшая алгебраическая связность ρ соответствует орграфу Γ_1 и равна 1,708. Из условий (12) и (13) определим интервал для μ_0 : $\mu_0 < 0,05$. Выберем $\mu = 0,01$. Тогда уравнения наблюдателя производных сигнала $\zeta_i(t)$ примут вид

$$\dot{\xi}_i^1(t) = \xi_i^2(t) - 2 \cdot 100 (\xi_i^1(t) - \zeta_i(t));$$

$$\dot{\xi}_i^2(t) = -100^2 (\xi_i^1(t) - \zeta_i(t)),$$

$$\xi_i(0) = 0, \quad i = 1, \dots, 4.$$

В результате закон управления (7) можно сформировать как

$$u_i(t) = -(\xi_i^2 + 2\xi_i^1 + \xi_i^0), \quad i = 1, \dots, 4.$$

Рассмотрим пример [2–5], где каждый узел сети S задан двойным интегратором, т. е. $a_1 = a_2 = 0$. Остальные параметры для каждой подсистемы $S_i, i = 1, \dots, 4$ сети S выберем следующими:

$$S_1: b_1 = 1, d_1 = 1, f_1(t) = 1 + \sin t, x_1(0) = [1 \quad 1]^T;$$

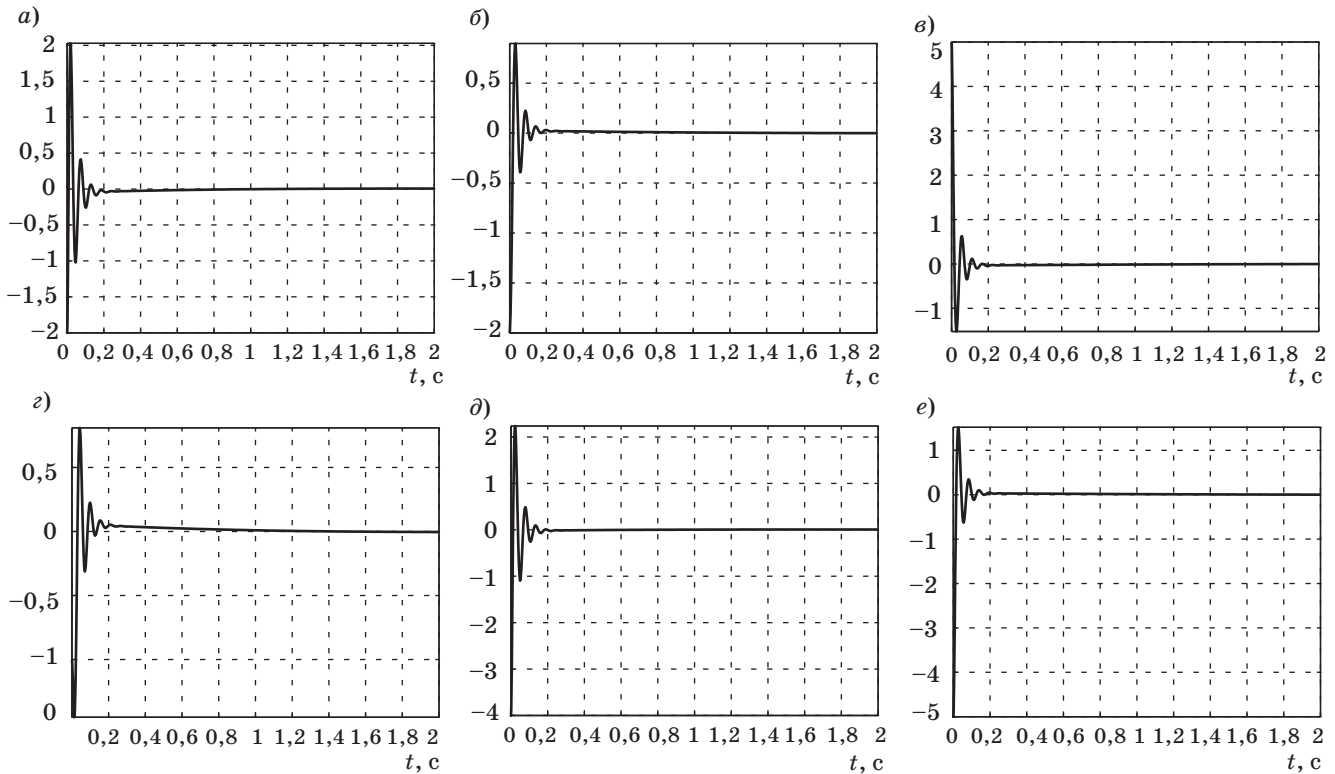
$$S_2: b_2 = 2, d_2 = 3, f_2(t) = 2 + \sin 2t, x_2(0) = [-1 \quad 2]^T;$$

$$S_3: b_3 = 3, d_3 = 2, f_3(t) = 1 + 2\sin 1,2t, x_3(0) = [-2 \quad 3]^T;$$

$$S_4: b_4 = 2, d_4 = 5, f_4(t) = 1 + 3\sin 0,8t, x_4(0) = [3 \quad 4]^T.$$

Пусть в процессе функционирования системы топология сети S (см. рис. 1) изменяется последовательно каждые 0,3 с. Элементы взвешенной матрицы смежности C зададим в виде $c_{ij} = 0,4ij(0,2 + 0,1 \sin(ijt))$. На рис. 2, $a-e$ представлены результаты переходных процессов по ошибкам $\tilde{y}_{12}(t) = y_1(t) - y_2(t), \tilde{y}_{13}(t) = y_1(t) - y_3(t), \tilde{y}_{14}(t) = y_1(t) - y_4(t), \tilde{y}_{23}(t) = y_2(t) - y_3(t), \tilde{y}_{24}(t) = y_2(t) - y_4(t)$ и $\tilde{y}_{34}(t) = y_3(t) - y_4(t)$ соответственно.

Результаты моделирования показали, что предложенная система управления обеспечивает условие ε -синхронизации с заданной точностью. Причем с уменьшением числа μ в наблюдателе (9) уменьшается значение ε в целевом условии (2), что подтверждает результаты аналитических расчетов.



■ Рис. 2. Переходные процессы: а — по $\tilde{y}_{12}(t)$; б — по $\tilde{y}_{13}(t)$; в — по $\tilde{y}_{14}(t)$; г — по $\tilde{y}_{23}(t)$; д — по $\tilde{y}_{24}(t)$; е — по $\tilde{y}_{34}(t)$

Заключение

Предложен алгоритм робастного управления динамической сетью с переключающейся структурой. Каждая подсистема сети описывается линейным дифференциальным уравнением, подверженным действию внутренних и внешних неконтролируемых возмущений. Предполагалось, что измерению доступны только выходы локальных подсистем, но не их производные. При решении рассматривался орграф, вершины которого ассоциированы с соответствующими подсистемами сети. На базе метода вспомогательного контура [10] синтезирован алгоритм, позволяющий обеспечить синхронизацию сети с заданной точностью ϵ , которая зависит от выбора параметров в системе управления.

Получены условия, позволяющие выбирать параметр μ в наблюдателе производных (9) с учетом топологии орграфа сети. Алгоритм обобщен на случай, если узлы сети ассоциированы с вершинами графа.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство утверждения

Для доказательства утверждения рассмотрим две вспомогательные леммы.

Лемма 1. Пусть задан орграф Γ_l , у которого есть ориентированное остовное дерево. Рассмотрим квадратичную форму

$$W(t) = \sum_{i=1}^k \sum_{j \in N_i} (\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t))^T (\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t)) = 0,5 \mathbf{x}^T(t) (\mathbf{B}^T \otimes \mathbf{I}_n) (\mathbf{B} \otimes \mathbf{I}_n) \mathbf{x}(t), \quad (П1)$$

где $\mathbf{x}_i(t) \in R^n$; $\mathbf{x}(t) = [x_1^T(t), x_2^T(t), \dots, x_k^T(t)]^T \in R^{kn}$; \mathbf{B} — лапласиан орграфа Γ_l ; \otimes — произведение Кронекера (прямое произведение). Тогда для $k > 1$ квадратичную форму (П1) можно оценить снизу и сверху:

$$W(t) \geq 0,25(k-1)^{-1} \lambda_2(L(\Gamma_l)) \times \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k (\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t))^T (\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t));$$

$$W(t) \leq \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k (\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t))^T (\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t)). \quad (П2)$$

Понятия лапласиана, произведения Кронекера и их свойства подробно рассмотрены в работах [6, 9, 11, 15].

Доказательство леммы 1: Докажем сначала оценку снизу. Для этого осуществим преобразование

$$W(t) = 0,5\mathbf{x}^T(t)(\mathbf{B}^T \otimes \mathbf{I}_n)(\mathbf{B} \otimes \mathbf{I}_n)\mathbf{x}(t) = 0,5\mathbf{x}^T(t)(L(\Gamma_l) \otimes \mathbf{I}_n)\mathbf{x}(t).$$

Известно [6, 9, 11], что симметризованный лапласиан $\mathbf{L}(\Gamma) = \mathbf{B}^T\mathbf{B}$ — неотрицательная матрица. Так как орграф $\mathbf{L}(\Gamma)$ содержит ориентированное остовное дерево, то $0 = \lambda_1(\mathbf{L}(\Gamma)) < \lambda_2(\mathbf{L}(\Gamma)) \leq \dots \leq \lambda_k(\mathbf{L}(\Gamma))$, т. е. наименьшее собственное число $\lambda_1(\mathbf{L}(\Gamma)) = 0$ имеет единичную кратность [6, 9, 11]. Тогда последнее выражение для $W(t)$ оценим снизу как

$$0,5\mathbf{x}^T(t)(L(\Gamma_l) \otimes \mathbf{I}_n)\mathbf{x}(t) \geq 0,5\lambda_2(\mathbf{L}(\Gamma_l))\mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t). \quad (\text{П3})$$

Для $k > 1$, воспользовавшись неравенством

$$\mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t) \geq 0,5(k-1)^{-1} \times \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k (\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t))^T (\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t))$$

и подставив его в (П3), получим оценку снизу (П2) для квадратичной формы (П1).

Оценка сверху очевидна, так как это равносильно введению в орграфе дополнительных ребер, которые соединяют все пары вершин, т. е. орграф Γ_l дополнен до полного орграфа.

Лемма 2. Пусть орграф Γ_l содержит ориентированное остовное дерево. Рассмотрим квадратичную форму

$$W(t) = \sum_{i=1}^k \sum_{j \in N_i} c_{ij} (\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t))^T \mathbf{K} (\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t)), \quad (\text{П4})$$

где $\mathbf{K} = \mathbf{K}^T$; $0 < \underline{c} < c_{ij} < \bar{c}$. Тогда для $k > 1$ справедливы следующие оценки снизу и сверху:

$$W(t) \geq 0,25\underline{c}(k-1)^{-1}\lambda_2(\mathbf{L}(\Gamma_l)) \times \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k (\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t))^T \mathbf{K} (\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t));$$

$$W(t) \leq \bar{c} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k (\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t))^T \mathbf{K} (\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t)). \quad (\text{П5})$$

Доказательство леммы 2: Докажем оценку

снизу. Введем преобразование $\mathbf{x}_i(t) = \mathbf{K}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{w}_i(t)$ и подставим его в (П4):

$$W(t) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k c_{ij} (\mathbf{w}_i(t) - \mathbf{w}_j(t))^T \times \mathbf{K}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{K} \mathbf{K}^{-\frac{1}{2}} (\mathbf{w}_i(t) - \mathbf{w}_j(t)) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k c_{ij} (\mathbf{w}_i(t) - \mathbf{w}_j(t))^T (\mathbf{w}_i(t) - \mathbf{w}_j(t)).$$

Тогда с учетом (П1) и (П2)

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j \in N_i} c_{ij} (\mathbf{w}_i(t) - \mathbf{w}_j(t))^T (\mathbf{w}_i(t) - \mathbf{w}_j(t)) \geq \underline{c} \sum_{i=1}^k \sum_{j \in N_i} (\mathbf{w}_i(t) - \mathbf{w}_j(t))^T (\mathbf{w}_i(t) - \mathbf{w}_j(t)) \geq 0,25\underline{c}(k-1)^{-1}\lambda_2(\mathbf{L}(\Gamma_l)) \times \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k (\mathbf{w}_i(t) - \mathbf{w}_j(t))^T (\mathbf{w}_i(t) - \mathbf{w}_j(t)).$$

Осуществив в последнем выражении обратную замену $\mathbf{w}_i(t) = \mathbf{K}^{\frac{1}{2}}\mathbf{x}_i(t)$, получим

$$0,25\underline{c}(k-1)^{-1}\lambda_2(\mathbf{L}(\Gamma_l)) \times \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k (\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t))^T \mathbf{K}^{\frac{1}{2}} \mathbf{K}^{\frac{1}{2}} (\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t)) \geq 0,25\underline{c}(k-1)^{-1}\lambda_2(\mathbf{L}(\Gamma_l)) \times \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k (\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t))^T \mathbf{K} (\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t)).$$

Как и в лемме 1, оценка сверху следует из того, что орграф дополнен до полного орграфа.

Перейдем теперь к доказательству утверждения. Рассмотрим систему, составленную из уравнений (10), (11) и записанную в виде

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_i(t) = \mathbf{A}_N \tilde{\mathbf{x}}_i(t) + \mu_2^{\gamma-1} \mathbf{B}_N \mathbf{g}^T \Delta_i(t),$$

$$\mu_1 \dot{\boldsymbol{\eta}}_i(t) = \mathbf{G} \boldsymbol{\eta}_i(t) + \mu_2 \mathbf{b} \zeta_i(t). \quad (\text{П6})$$

Для исследования поведения ее решений воспользуемся первой леммой [16]. Согласно [16], положим в (П6) $\mu_2 = 0$. Очевидно, что в этом случае система (П6) асимптотически устойчива в силу матриц \mathbf{A}_N и \mathbf{G} . Следовательно, векторы $\tilde{\mathbf{x}}_i(t)$, $\boldsymbol{\eta}_i(t)$ ограничены вместе со своими первыми производными. Тогда в (П6) ограничены сигналы $\Delta_i(t)$, $\zeta_i(t)$ [16]. Из ограниченности $\Delta_i(t)$ следует, что в (9) $|\xi_i(t)| < \infty$, а значит из (7) $|u_i(t)| < \infty$. Однако необходимо определить μ_0 , при котором исходная система будет диссипативной. Пусть $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$. Выберем функцию Ляпунова

$$V(t) = \sum_{i=1}^k \tilde{\mathbf{x}}_i^T(t) \mathbf{P} \tilde{\mathbf{x}}_i(t) + \sum_{i=1}^k \boldsymbol{\eta}_i^T(t) \mathbf{H} \boldsymbol{\eta}_i(t). \quad (\text{П7})$$

Принимая во внимание (13), возьмем от (П7) производную по времени вдоль траекторий (П6):

$$\dot{V}(t) = \sum_{i=1}^k \left[-\tilde{\mathbf{x}}_i^T(t) \mathbf{Q}_1 \tilde{\mathbf{x}}_i(t) + 2\mu_0^{\gamma-1} \tilde{\mathbf{x}}_i^T(t) \mathbf{P} \mathbf{B}_N \mathbf{g}^T \Delta_i(t) \right] + \sum_{i=1}^k \left[-\mu_0^{-1} \boldsymbol{\eta}_i^T(t) \mathbf{Q}_2 \boldsymbol{\eta}_i(t) + \boldsymbol{\eta}_i^T(t) \mathbf{H} \mathbf{b} \zeta_i(t) \right]. \quad (\text{П8})$$

Для оценки первого и второго слагаемых в (П8) воспользуемся (П5):

$$\begin{aligned} -\sum_{i=1}^k \tilde{\mathbf{x}}_i^T(t) \mathbf{Q} \tilde{\mathbf{x}}_i(t) &= -\sum_{i=1}^k \sum_{j \in N_i} c_{ij} \tilde{\mathbf{x}}_{ij}^T(t) \mathbf{Q} \tilde{\mathbf{x}}_{ij}(t) \leq \\ &\leq -0,25c(k-1)^{-1} \rho \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \tilde{\mathbf{x}}_{ij}^T(t) \mathbf{Q} \tilde{\mathbf{x}}_{ij}(t), \end{aligned}$$

где $\tilde{\mathbf{x}}_{ij}(t) = \mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t)$;

$$\begin{aligned} 2\mu_0^{\gamma-1} \sum_{i=1}^k \tilde{\mathbf{x}}_i^T(t) \mathbf{P} \mathbf{B}_N \mathbf{g}^T \Delta_i(t) &\leq 2\mu_0^{\gamma-1} \times \\ &\times \sum_{i=1}^k \left[\tilde{\mathbf{x}}_i^T(t) \mathbf{P} \mathbf{B}_N \mathbf{g}^T \mathbf{g} \mathbf{B}_N^T \mathbf{P} \tilde{\mathbf{x}}_i(t) + |\Delta_i(t)|^2 \right] \leq \\ &\leq 2\mu_0^{\gamma-1} \sum_{i=1}^k \sum_{j \in N_i} c_{ij} \tilde{\mathbf{x}}_{ij}^T(t) \mathbf{P} \mathbf{B}_N \mathbf{g}^T \mathbf{g} \mathbf{B}_N^T \mathbf{P} \tilde{\mathbf{x}}_{ij}(t) + \\ &+ 2\mu_0^{\gamma-1} \sum_{i=1}^k |\Delta_i(t)|^2 \leq 2\bar{c} \mu_0^{\gamma-1} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \tilde{\mathbf{x}}_{ij}^T(t) \mathbf{P} \mathbf{B}_N \mathbf{g}^T \times \\ &\times \mathbf{g} \mathbf{B}_N^T \mathbf{P} \tilde{\mathbf{x}}_{ij}(t) + 2\mu_0^{\gamma-1} \sum_{i=1}^k |\Delta_i(t)|^2. \end{aligned}$$

Четвертое слагаемое в (П8) оценим в виде

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \eta_i^T(t) \mathbf{H} \mathbf{b} \dot{\zeta}_i(t) &\leq \\ &\leq \sum_{i=1}^k \left[\mu_0^{-1} \eta_i^T(t) \mathbf{H} \mathbf{b} \mathbf{b}^T \mathbf{H} \eta_i(t) + \mu_0 |\dot{\zeta}_i(t)|^2 \right]. \end{aligned}$$

Примем $\chi = \sup_t \left\{ 2\mu_0^{\gamma-2} |\Delta_i(t)|^2 + |\dot{\zeta}_i(t)|^2 \right\}$. Тогда

выражение (П8) можно переписать как

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq -\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \tilde{\mathbf{x}}_{ij}^T(t) \left(0,25c(k-1)^{-1} \rho \mathbf{Q}_1 - \right. \\ &\quad \left. - 2\bar{c} \mu_0^{\gamma-1} \mathbf{P} \mathbf{B}_N \mathbf{g}^T \mathbf{g} \mathbf{B}_N^T \mathbf{P} \right) \tilde{\mathbf{x}}_{ij}(t) - \\ &\quad - \mu_0^{-1} \sum_{i=1}^k \eta_i^T(t) \left(\mathbf{Q}_2 - \mathbf{H} \mathbf{b} \mathbf{b}^T \mathbf{H} \right) \eta_i(t) + k\mu_0 \chi. \end{aligned}$$

Очевидно, если выполнено условие (12) и $\mathbf{Q}_2 - \mathbf{H} \mathbf{b} \mathbf{b}^T \mathbf{H} > 0$, то $\dot{V}(t) \leq -\beta V(t) + k\mu_0 \chi$, $\beta > 0$. Пусть

$$\begin{aligned} 0,25c(k-1)^{-1} \rho \mathbf{Q}_1 - 2\bar{c} \mu_0^{\gamma-1} \times \\ \times \mathbf{P} \mathbf{B}_N \mathbf{g}^T \mathbf{g} \mathbf{B}_N^T \mathbf{P} = \mathbf{R}_1 > 0 \end{aligned}$$

и $\mathbf{Q}_2 - \mathbf{H} \mathbf{b} \mathbf{b}^T \mathbf{H} = \mathbf{R}_2 > 0$. Перепишем последнее неравенство как

$$\dot{V}(t) \leq -\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \tilde{\mathbf{x}}_{ij}^T(t) \mathbf{R}_1 \tilde{\mathbf{x}}_{ij}(t) - \mu_0^{-1} \times$$

$$\times \sum_{i=1}^k \eta_i^T(t) \mathbf{R}_2 \eta_i(t) + k\mu_0 \chi. \quad (\text{П9})$$

В силу (П5) оценим функцию (П7) в виде

$$\begin{aligned} V(t) &= \sum_{i=1}^k \sum_{j \in N_i} \tilde{\mathbf{x}}_{ij}^T(t) \mathbf{P} \tilde{\mathbf{x}}_{ij}(t) + \sum_{i=1}^k \eta_i^T(t) \mathbf{H} \eta_i(t) \leq \\ &\leq \bar{c} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \tilde{\mathbf{x}}_{ij}^T(t) \mathbf{P} \tilde{\mathbf{x}}_{ij}(t) + \sum_{i=1}^k \eta_i^T(t) \mathbf{H} \eta_i(t). \quad (\text{П10}) \end{aligned}$$

Выберем число β из условия

$$\begin{aligned} \beta &= \min \left\{ \bar{c} \lambda_{\max}^{-1}(\mathbf{P}) \lambda_{\min}(\mathbf{R}_1), \right. \\ &\quad \left. \mu_0^{-1} \lambda_{\max}^{-1}(\mathbf{H}) \lambda_{\min}(\mathbf{R}_2) \right\}. \end{aligned}$$

Тогда, с учетом (П9), перепишем (П10) как $\dot{V}(t) \leq -\beta V(t) + k\mu_0 \chi$. Решив последнее неравенство, получим $V(t) \leq V(0)e^{-\beta t} + (1 - e^{-\beta t})k\mu_0 \chi$, откуда для фиксированного значения времени $t = T$ следует оценка величины ε в целевом условии (2):

$$\begin{aligned} \varepsilon &\leq \sqrt{\lambda_{\min}^{-1}(\mathbf{P}) V(T)} \leq \\ &\leq \sqrt{\lambda_{\min}^{-1}(\mathbf{P}) \left[V(0)e^{-\beta T} + (1 - e^{-\beta T})k\mu_0 \chi \right]}. \quad (\text{П11}) \end{aligned}$$

Оценки (12) и (П11) достаточно грубые. Но из них видно, что уменьшением числа μ_0 можно получить требуемую точность ε в (2).

Доказательство следствия: Действительно, граф, у которого есть остовное дерево, можно ассоциировать с симметричным оргграфом, у которого есть ориентированное остовное дерево. Поэтому система управления (4), (7), (9), (11) с расчетом параметра μ в (12) справедлива в случае, если сеть ассоциирована с графами Γ_l , $l = 1, \dots, m$.

Известно [11], для того чтобы граф Γ_l , состоящий из k вершин, содержал остовное дерево, необходимо, чтобы он содержал как минимум $k - 1$ ребер. Пусть $\Gamma_{l_1}, \dots, \Gamma_{l_r}$ — подграфы графа Γ_l , содержащие k вершин, $k - 1$ ребер и остовное дерево графа Γ_l . Лапласианы, а значит и симметризованные лапласианы подграфов $\Gamma_{l_1}, \dots, \Gamma_{l_r}$ — симметричные матрицы, отличающиеся только расположением соответствующих строк. Следовательно, их характеристические многочлены идентичны, т. е. они имеют одинаковые собственные числа. Причем алгебраическая связность графов $\Gamma_{l_1}, \dots, \Gamma_{l_r}$ не превосходит алгебраической связности любых подграфов графа Γ_l , которые содержат остовное дерево, k вершин и более чем $k - 1$ ребер (лемма 13.6.1 [11]). Следовательно, для расчета числа μ_0 можно воспользоваться выражением (14).

Работа выполнена в Учреждении Российской академии наук Институт проблем машиноведения РАН (г. Санкт-Петербург) при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 09-08-00237, 10-08-90707) и при поддержке Федеральной целе-

вой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг., проводимой в Российском государственном университете нефти и газа им. И. М. Губкина (г. Москва).

Литература

1. Yoshioka C., Namerikawa T. Observed-based consensus control strategy for multi-agent system with communication time delay // 17th IEEE Intern. Conf. on Control Applications. San Antonio, 2008. P. 1037–1042.
2. Liu Y., Jia Y., Du J., Shiyong Y. Dynamic output feedback control for consensus of multi-agent systems: an H^∞ approach // American Control Conf. St. Louis, 2009. P. 4470–4475.
3. Джунусов И. А., Фрадков А. Л. Синхронизация по выходам в сетях линейных объектов // Устойчивость и колебания нелинейных систем управления: Сб. докл. XI Междунар. конф. / ИПУ им. В. А. Трапезникова. М., 2010. С. 1–2.
4. Scardovi L., Sepulchre R. Synchronization in networks of identical linear systems // Automatica. 2009. Vol. 45. P. 2557–2562.
5. Xie G., Liu H., Wang L., Jia Y. Consensus in networked multi-agent systems via sampled control: switching topology case // American Control Conf. St. Louis, 2009. P. 4525–4530.
6. Ren W., Beard R. W. Consensus seeking in multi-agent systems under dynamically changing interaction topologies // IEEE Trans. on Automatic Control. 2005. Vol. 50. N 5. P. 655–661.
7. Фрадков А. Л. Квадратичные функции Ляпунова в задаче адаптивной стабилизации линейного динамического объекта // Сиб. мат. журн. 1976. № 2. С. 436–446.
8. Dib W., Barabanov A., Ortega R., Lamnabhi-Lagarigue F. On transient stability of multi-machine power systems: a «globally» convergent controller for structure-preserving models // Proc. of the 17th World Congress IFAC. Seoul, 2008. P. 9398–9403.
9. Агаев Р. П., Чеботарев П. Ю. Матрица максимальных исходящих лесов орграфа и ее применения // Автоматика и телемеханика. 2000. № 9. С. 15–43.
10. Цыкунов А. М. Алгоритмы робастного управления с компенсацией ограниченных возмущений // Автоматика и телемеханика. 2007. № 7. С. 103–115.
11. Godsil C., Royle G. Algebraic graph theory. – N. Y.: Springer-Verlag, 2001. – 232 p.
12. Фрадков А. Л. Кибернетическая физика: принципы и примеры. – СПб.: Наука, 2003. – 208 с.
13. Фрадков А. Л., Андриевский Б. Р., Андриевский А. Б. Оценка состояния пассивизируемых нелинейных систем при коммуникационных ограничениях // Информационно-управляющие системы. 2011. № 1. С. 28–33.
14. Atassi A. N., Khalil H. K. A separation principle for the stabilization of class of nonlinear systems // IEEE Trans. on Automatic Control. 1999. Vol. 44. N 9. P. 1672–1687.
15. Ланкастер П. Теория матриц. – М.: Наука, 1973. – 280 с.
16. Брусин В. А. Об одном классе сингулярно возмущенных адаптивных систем. 1 // Автоматика и телемеханика. 1995. № 4. С. 119–127.