

УДК 519.614

doi:10.31799/1684-8853-2020-6-2-11

## Окружности на решетках и матрицы максимума детерминанта

Н. А. Балонин<sup>а</sup>, доктор техн. наук, профессор, [orcid.org/0000-0001-7338-4920](https://orcid.org/0000-0001-7338-4920), [korbendfs@mail.ru](mailto:korbendfs@mail.ru)

М. Б. Сергеев<sup>а</sup>, доктор техн. наук, профессор, [orcid.org/0000-0002-3845-9277](https://orcid.org/0000-0002-3845-9277)

Дж. Себерри<sup>б</sup>, доктор наук, профессор, [orcid.org/0000-0002-9558-4293](https://orcid.org/0000-0002-9558-4293)

О. И. Сеницына<sup>а</sup>, аспирант, [orcid.org/0000-0002-2819-4682](https://orcid.org/0000-0002-2819-4682)

<sup>а</sup>Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения,

Б. Морская ул., 67, Санкт-Петербург, 190000, РФ

<sup>б</sup>Университет Вуллонгонг, Вуллонгонг, Новый Южный Уэльс 2522, Австралия

**Введение:** гипотеза Адамара о существовании матриц максимума детерминанта порядков, кратных четырем, тесно связана с проблемой Гаусса о числе точек с целыми координатами (точек на решетке  $Z^3$ ) на сфероида, конусе, параболоиде или параболе. Расположение точек Гаусса диктует количество и виды экстремальных матриц. **Цель:** выявить связь точек Гаусса на сечениях тел вращения с количеством и видами матриц максимума детерминанта с фиксированной структурой для нечетных порядков. Определить точную верхнюю границу значений максимумов детерминанта для бициклических матриц с каймой и порядки их превалирования над более простыми циклическими структурами. **Результаты:** приведена формула, уточняющая излишне оптимистическую границу Элича – Войтаса на случай матриц фиксированной структуры. Показана особая роль чисел Ферма для порядков  $4t + 1$ . Показано влияние чисел Барбы на формирование классов матриц максимального детерминанта, занимающих последовательно сменяющие друг друга области порядков  $4t + 3$ . Для бициклической структуры с каймой приведена оценка  $67$  для максимального порядка, на котором наблюдается оптимальное симметричное решение, и доказано превосходство детерминанта блочных матриц с каймой над детерминантами циклических матриц везде, за исключением особого 39-го порядка. **Практическая значимость:** связанные с точками решетки матрицы максимального для фиксированной структуры детерминанта имеют непосредственное практическое значение для задач помехоустойчивого кодирования, сжатия и маскирования видеoinформации.

**Ключевые слова** – точки Гаусса, проблема Гаусса, параболоид на решетке, ортогональные матрицы, матрицы Адамара, матрицы максимального детерминанта, бициклические матрицы с каймой.

**Для цитирования:** Балонин Н. А., Сергеев М. Б., Себерри Дж., Сеницына О. И. Окружности на решетках и матрицы максимума детерминанта. *Информационно-управляющие системы*, 2020, № 6, с. 2–11. doi:10.31799/1684-8853-2020-6-2-11

**For citation:** Balonin N. A., Sergeev M. B., Seberry J., Sinitsyna O. I. Circles on lattices, and maximum determinant matrices. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2020, no. 6, pp. 2–11 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2020-6-2-11

### Введение

Настоящая статья является продолжением работы [1], посвященной связи классических задач о поиске точек Гаусса (точек с целочисленными координатами) на окружностях, образованных сечениями тел вращения, и матриц большого или наибольшего детерминанта [2], в частности, матриц Адамара [3, 4]. Экстремальные по детерминанту ортогональные (и неортогональные) матрицы представляют большой научный и практический интерес [5, 6] ввиду сложности их поиска, отражающего нетривиальность объекта, являющегося источником уникальных кодов в прикладных задачах обработки цифровой информации и помехоустойчивого кодирования [7, 8].

Адамар [3], который более столетия назад занимался оцениванием детерминанта матрицы с ограниченными единицей (по модулю) элементами, установил, что его верхняя граница не пре-

восходит  $n^{n/2}$ . Серией последующих основополагающих работ эта граница была уточнена для матриц порядков, не кратных четырем [2] (на которых недостижима оптимистическая оценка) и нечетных порядков [9–11].

Первые компьютерные [12, 13] и теоретические исследования [14–19] привели к представлению о том, что широкий диапазон четных порядков разрешим относительно простыми оптимальными матрицами, состоящими из двух и более циклических блоков, чей размер пропорционален порядку [20, 21]. Матрицы нечетного порядка оказались структурно сложными даже при невысокой размерности задачи [22–24].

Эти исследования свелись постепенно к современному процессу, в ходе которого находились преимущественно оптимальные матрицы все более высоких четных порядков [25, 26]. Опыт показал, что рекорд можно наращивать привлечением алгоритмов теории полей и групп [27, 28].

Постепенно это привело к диспропорции в размерах известных матриц четных и нечетных порядков, вследствие чего последовательности значений детерминантов в OEIS [29] и размеры матриц каталога [30] весьма ограничены. Для того чтобы изменить положение, необходимо предлагать новые подходы и методы оценивания детерминантов и матриц, на которых оптимум достигается.

### Орнаменты экстремальных матриц

Впервые вопрос о существовании экстремальных матриц, отличных от силвестровых и существующих на порядках, кратных четырем, поставил Адамар [3]. Содержание так называемой гипотезы Адамара [31, 32] состоит в том, что ортогональные матрицы с элементами  $\pm 1$  существуют на всех порядках  $4t$ , где  $t$  — натуральное число. Заметим, что если экстремальная по детерминанту матрица не ортогональна, это не означает, что ее нельзя ортогонализировать вариацией значений элементов [33], не меняя узора матрицы (орнамента) — порядка расположения элементов в ней. Таким образом, при поиске параметров узоров различие между двумя названными видами матриц несущественно и не препятствует построению общей теории, сходной с изложенной в работе [1].

Различают одноблочную, двухблочную и четырехблочную конструкции ортогональных матриц порядка  $n$ :

$$A; \begin{pmatrix} A & B \\ B^T & -A^T \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} A & BR & CR & DR \\ CR & RD & -A & -RB \\ BR & -A & -RD & RC \\ DR & -RC & RB & -A \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где  $A, B, C$  и  $D$  — моноблоки размера  $v$ . Блоки характеризуются  $k_1, k_2, k_3, k_4$  — количествами элементов со значением  $-1$  в каждой строке, и количеством пар отрицательных элементов  $\lambda$  для каждой двух строк матрицы в целом;  $R$  — реверсная единичная матрица, содержащая (в отличие от  $I$ ) ненулевые элементы на другой ее диагонали.

Третья конструкция в (1) с симметричным блоком  $A$  удобна для симметрирования ее в целом путем приравнивания блоков  $B$  и  $C$ . Это отличает ее от массива Вильямсона [4] с симметричными блоками, но несимметричного в целом. Если блоки конструкций (1) циклические, то двухблочная конструкция называется бициклической, а последняя при  $B = C$  — трициклической, или

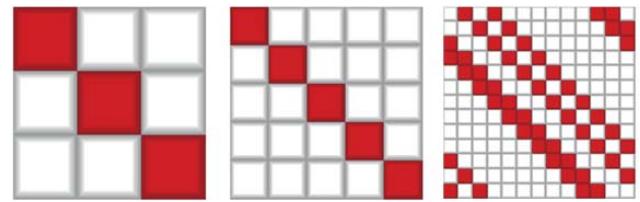
Пропуском [1] с тремя блоками  $A, B$  и  $D$  и параметрами, которые нумеруются  $k_1, k_2$  и  $k_3$ .

Известно, что циклическая симметричная матрица Адамара порядка, отличного от 1, согласно гипотезе Райзера [34] всего одна. Три циклические версии матриц порядков 3, 5 и 13 приведены на рис. 1 [35]. Здесь светлая клетка соответствует элементу матрицы со значением 1, а темная — со значением  $-1$ . Заметим, что последняя из трех матриц является несимметричной.

Детерминант остается высок и у матрицы порядка 19, но не является максимальным. Этот порядок у бициклических матриц с каймой выделяется аномально большим значением детерминанта, превышающим некоторую общую для всех таких матриц границу.

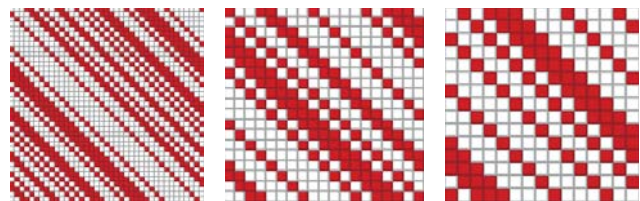
Известны и мультипликативные порядки 15 ( $3 \times 5$ ), 27 ( $3 \times 3 \times 3$ ) и 39 ( $3 \times 13$ ) циклических матриц с большим детерминантом, портреты которых приведены на рис. 2. Последний из указанных порядков примечателен тем, что на нем бициклическая матрица с каймой уступает по детерминанту несимметричной циклической матрице.

На этом преимущества моноциклических матриц заканчиваются. Перейдем к конструкциям из большего числа блоков. Нечетные порядки отличаются от четных тем, что на них структура матриц максимального детерминанта неограниченно усложняется — нет универсальной основы. Задача обрастает большим количеством субоптимальных решений в виде матриц большого (не наибольшего) детерминанта (МБД).



■ **Рис. 1.** Циклические матрицы максимума детерминанта порядков 3, 5, 13 [35]

■ **Fig. 1.** Maximum determinant circulant matrices of orders 3, 5, 13 [35]



■ **Рис. 2.** Циклические матрицы большого детерминанта порядков 19, 15 и 39

■ **Fig. 2.** Large determinant circulant matrices of orders 19, 15 and 39

Для практических приложений все равно, какую именно из них мы используем. Поэтому выделим в отдельный класс матрицы с экстремумом на заданной бициклической структуре, понимая в дальнейшем под МБД именно такие матрицы. Как общее, объединяющее все решения правило, отметим, что для симметричных матриц есть пороговый порядок, который отодвигается с увеличением числа используемых блоков, однако адамаровы трициклы существуют для всех порядков, кратных четырем [1].

### Уравнения орнаментов

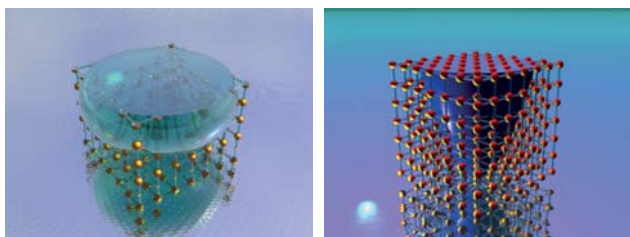
Уравнения, связывающие структурные (орнаментальные) инварианты  $v, k_1, k_2, k_3$  и  $\lambda$ , возникают вследствие того, что квадратная бинарная матрица ограничена в возможности содержать описываемый параметрами узор. Наиболее известно уравнение  $k(k - 1) = \lambda(v - 1)$ . Если блоков в матрице несколько, то слева будет сумма  $k_1(k_1 - 1) + k_2(k_2 - 1)$  или взвешенная сумма  $k_1(k_1 - 1) + 2k_2(k_2 - 1) + k_3(k_3 - 1)$ . Это является переходом к канонической форме, описывающей сфероид  $x^2 + 2y^2 + z^2 = n$  [1] или параболоид, представленные на рис. 3.

Правая часть канонического уравнения у матриц Адамара равна порядку  $n$ , при обобщении она усложняется до  $f(v) = n + \delta(v - 1)$ , где  $\delta$  — невязка матрицы наименьших квадратов (МНК) вида  $\mathbf{H}^T \mathbf{H}$ , размещенная за пределами ее диагонали и вне нулей внедиагональных блоков. Она равна нулю для ортогональных матриц порядков, кратным четырем, и различается знаком  $\delta = 2$  или  $\delta = -2$  для случаев сильного и слабого экстремумов матриц четных порядков  $n = 4t + 2$ .

**Теорема 1.** Орнаментальные инварианты  $k_1, k_2, k_3$  ортогональных и экстремальных по детерминанту матриц (1) определяются линейными функциями

$$k_1 = (v - x)/2, k_2 = (v - y)/2, k_3 = (v - z)/2 \quad (2)$$

от переменных канонического уравнения  $x^2 + 2y^2 + z^2 = f(v)$  или, при уменьшении числа бло-



■ **Рис. 3.** Срезы сфероида и параболоида на решетке  
 ■ **Fig. 3.** Sections of a spheroid and paraboloid on a lattice

ков, его усечений  $x^2 + y^2 = f(v)$ ,  $x^2 = f(v)$ . Здесь  $\lambda = k + (\delta - v)/4$  и  $k$  — параметры матрицы в целом, т. е.  $k = k_1 + 2k_2 + k_3$  или сумма  $k = k_1 + k_2$  для бициклической матрицы.

Доказательство восходит к квадратичному уравнению совместности, известному со времен разработки теории графов. Это нашло свое отражение в наименованиях с упоминанием абстрактного блочного дизайна [4].

Для ортогонального моноцикла при  $\delta = 0$  имеем  $\lambda = k - v/4$ . Тогда  $k(k - 1) = (k - v/4)(v - 1)$  или  $4(k^2 - kv) + v^2 = v$ . С учетом  $k = (v - x)/2$  это дает  $(v - x)^2 - 2(v - x)v + v^2 = v$ , которое немедленно приводит к нужному нам результату:  $x^2 = n$ . Экстремальные задачи для порядков  $n = 4t + 2$  связаны с делением матриц на парные блоки. Матриц Адамара ввиду ненулевого смещения  $\delta = \pm 2$  среди них нет. Изменение количества блоков ничего не меняет в приведенной схеме доказательства, регулируя лишь количество связываемых каноническим уравнением базовых переменных, входящих в определение  $k_1, k_2, k_3$ .

### Классификация точек параболоида

В расчетах орнаментальных инвариантов  $k_1 = (v - x)/2$  и  $k_2 = (v - y)/2$  может фигурировать любая точка Гаусса квадратичной поверхности, охватывая всю совокупность глобальных и локальных экстремумов (рис. 4). Например, в отличие от матриц Адамара с их наибольшим значением детерминанта, для дихотомичных по своей структуре экстремальных матриц порядков  $n = 2v$  с блоками **A** и **B** правая часть канонического уравнения  $x^2 + y^2 = n + \delta(v - 1)$  при  $\delta = -2$  сводится к константе  $x^2 + y^2 = 2$ . Это дает разнообразие значений  $k_1$  и  $k_2$  при смене размера  $v$  при одной на все решения точке Гаусса  $(x = 1, y = 1)$ ,



■ **Рис. 4.** Параболоид  $x^2 + y^2 = f(v)$  с точками Гаусса  
 ■ **Fig. 4.** Paraboloid  $x^2 + y^2 = f(v)$  with Gauss points



расположенной на постоянной минимальной высоте 2.

Этот слабый экстремум был замечен при поисках матриц Адамара бициклической конструкции с двойной каймой, т. е. при добавлении парной каймы решение переходит в строгий максимум. Кроме того, эта бициклическая матрица ортогонализуется понижением значения одного из двух возможных элементов матрицы, переходя в матрицу Эйлера [31, 32]. Это делает ее аналогом матриц Адамара на четных порядках, не кратных четырем.

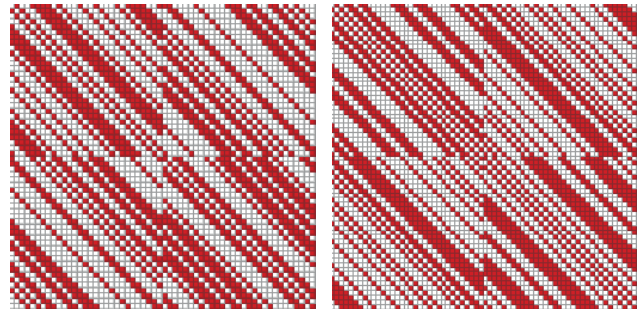
Такая бициклическая матрица существует всегда, поскольку платой за усложнение структуры является максимальный детерминант.

Эта характерная черта поясняет, почему при поиске бициклических матриц с одинарной каймой нет смысла искать строгие оптимумы их основ — бициклических матриц. Поскольку кайма одна, то точка Гаусса сходит с отмеченного на рис. 4 желтым цветом кольца матриц Эйлера, поднимаясь выше. Но, в отличие от строго оптимальных матриц, ведущая точка для расчетов орнаментальных инвариантов не следует за размером бициклической матрицы. Она, в отличие также от простейшего случая стабилизации на одном нижнем значении, отвечает не всем возможным четным порядкам, а их диапазону. Теория МБД позволяет вычислить эти диапазоны, указав, чем они различаются между собой.

Для начала перечислим видимые на рис. 4 координаты стартовых независимых точек Гаусса для порядков: 2 ( $x = 1, y = 1$ ), 6 (1, 3), 10 (3, 3), 14 (1, 5), 18 (3, 5), 22 (неразрешим), 26 (1, 7) и (5, 5), 30 (3, 7), 34 (неразрешим) и т. д. Порядки матриц максимума детерминанта принято разбивать на два семейства, когда оценка максимума детерминанта проходит через целочисленную точку и, следовательно, становится достижимой.

Первое семейство порядков  $n = 2v$ , для которых  $v = L + 1$ , где  $L = q(q + 1)$  и  $q$  — целое число, содержит порядки матриц Барбы [2] 2, 6, 14, 26, 42, 62, 86, 114, ..., отмеченные на рис. 4 синими кольцами. На них всегда имеются крайние точки с координатами  $x = 1$  и (или)  $y = 1$ , нулевых значений не бывает. Именно к ним относится точка с кольца Эйлера с координатами (1, 1). Из канонического уравнения для орнамента оптимальной матрицы  $x^2 + y^2 = 2n - 2$  следует, что если  $x = 1$ , то  $y^2 = 4L + 1$ .

Второе семейство порядков  $n = 2v$ , для которых  $v = 2L + 1$ , где  $L = q(q + 1)$  и  $q$  — целое число, содержит порядки 2, 10, 26, 50, 82, 122, 170, ... Оно описывает кольца, содержащие средние точки Гаусса с  $x = y$ ,  $x^2 = y^2 = n - 1 = 2v - 1 = 4L + 1$ . Эти множества точек на параболоиде, как видно из рис. 4, пересекаются, хотя численные значения показателя  $L$  для них не те же са-



■ Рис. 5. Портреты симметричных бициклических матриц порядков 58 и 66

■ Fig. 5. Symmetric two circulant matrices of orders 58 and 66

мые, поскольку  $L$  здесь иначе связан с размером блока.

Наиболее интересно первое семейство колец Барбы, поскольку ведущая точка Гаусса для расчета матрицы с каймой может быть связана только с одним кольцом, но не с обоими сразу — компьютерный анализ показывает превалирование структур для первого семейства. Условимся, что  $q$  — номер кольца Барбы — начинает отсчет с нуля. Кроме того, отметим, что  $L = q(q + 1)$  имеет смысл числа альтернансов: числа переключений знаков в диагональных блоках матриц МНК вида  $\mathbf{H}^T \mathbf{H}$  или  $\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{A} + \mathbf{B}^T \mathbf{B}$ . Матрицу  $\mathbf{N}$  будем называть *орнаментальной* матрицей.

Найденные симметричные бициклические матрицы порядков 58 и 66, портреты которых представлены на рис. 5, продолжают сет симметричных матриц порядков 6, 10, 14, 18, 22, 26, 34, нет 42 ( $42/2 = 21$  — не простое), 50 экстремальных матриц порядков  $n = 4t + 2$ , охваченных каймой.

На следующем ожидаемом порядке 74 ( $66 + 8$ ) симметричная бициклическая матрица не найдена ( $74/2 = 37$  — простое число), что позволяет предположить, что симметричные решения МБД ограничены порядком 66. Напомним, что у матриц Адамара эта граница почти вдвое меньше — 32 [34, 35].

### Формулы для расчета детерминантов

Детерминант  $\det(\mathbf{D}) = (1 + \sigma)\det(\mathbf{H})$  матрицы  $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & -\mathbf{A}^T \end{pmatrix}$  с каймой  $\mathbf{e}$  в виде вектора из единиц в  $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} -1 & \mathbf{e}^T \\ \mathbf{e} & \mathbf{H} \end{pmatrix}$  зависит от эксцесса [36]

$\sigma = \sigma(\mathbf{H}^{-1})$  — суммы элементов матрицы, обратной к  $\mathbf{H}$ .

Отступая при расчете орнаментальных инвариантов к точкам Гаусса не своего кольца, мы, безусловно, теряем в значении детерминанта бициклической матрицы основы  $\det(\mathbf{H})$ , но выигрываем в значении второго сомножителя с  $\sigma$ , что и объясняет стационарность точки Гаусса. Оценку детерминанта матрицы четного порядка, не делимого на 4, дает теорема, доказанная независимо в двух источниках, что отразилось в ее названии [9–11].

**Теорема 2 (Элича — Войтаса).** Оптимальная по детерминанту матрица  $\mathbf{H}$  порядка  $n = 4t + 2$  дихотомична, отвечает бициклической структуре, и ее детерминант  $\det(\mathbf{H}) \leq E(v)$ , где

$$E(v) = 2^v(2v - 1)(v - 1)^{(v-1)}.$$

Теорема доказывается рассмотрением детерминанта *орнаментальной матрицы*  $\mathbf{N} = \mathbf{A}^T\mathbf{A} + \mathbf{B}^T\mathbf{B}$ , который по абсолютному значению равен детерминанту  $\mathbf{H}$  и легко оценивается при монотонном характере заполнения внедиагональных элементов, повысить значения которых нельзя в силу ограничений на блоки  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$ .

Граница Элича — Войтаса является острой в том смысле, что она достижима на порядках  $n = 2v$ , на которых невязка МНК для диагональных блоков матрицы  $\mathbf{H}^T\mathbf{H}$  строго равна  $\delta = 2$  (за пределами диагонали). Компьютерное исследование показывает, что при нарушении монотонности в знаках орнаментальной матрицы  $\mathbf{N}$  с сохранением только  $L$  элементов со значениями  $\delta = 2$  в каждой строке оценка детерминанта падает на величину, оцениваемую множителем  $h(v) = 1 - (v/(L + 1) - 1)/K$ .

При  $L = v - 1$  множитель становится единичным. В диапазоне порядков блоков  $L < v < (L + 1) \times (K + 1)$  коэффициент  $K$ , регулирующий наклон этой линейной относительно размера  $v$  зависимости, стационарен и равен примерно 15.

Порядки колец Барбы  $n^* = 2v^*$ ,  $v^* = q(q + 1) + 1$ , где  $q$  — номер кольца, задают точки надлома характеристик, описывающих переход с 1 при  $L = v^* - 1$  на линейное уменьшение множителя детерминанта. Отсюда  $L = q(q + 1) = 0, 2, 6, 12, 20, \dots$

Величина эксцесса  $\sigma = \sigma(H^{-1}) = v \frac{\sqrt{4L+1}}{2L+1}$ , где

$\sqrt{4L+1} = 2q + 1$ , где  $q$  — номер кольца Барбы, линейно зависит от размера блока  $v$  при  $L$  альтернансах орнаментальной матрицы  $\mathbf{N}$ . Напомним, что из канонического уравнения для орнамента оптимальной матрицы  $x^2 + y^2 = 4v - 2$  следует, что если  $x = 1$  и  $v = L + 1$ , то  $y^2 = 4L + 1$ , т. е.  $\sigma = yv/(v^* + L)$ , где  $v^* = L + 1$  — размер оптимального для кольца Барбы блока, дополненный, как видно, числом альтернансов.

**Теорема 3.** Максимальное увеличение детерминанта матрицы  $\mathbf{H}$  с  $L$  альтернансами  $\det(\mathbf{D}) \cong d(v) \times E(v)$  при охвате матрицы каймой описывается квадратичной функцией (относительным по отношению к границе  $E(v)$  детерминантом)

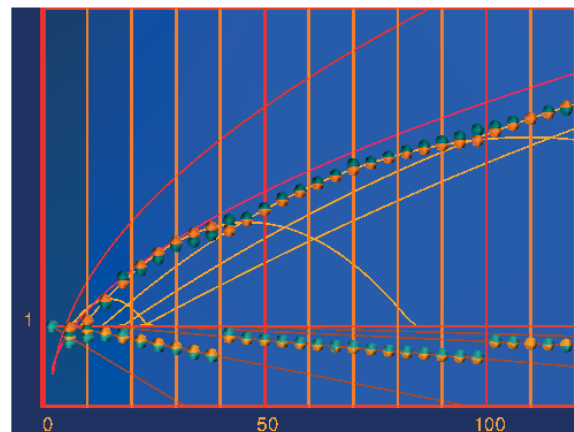
$$d(v) = (1 + \sigma(v))h(v) = \left(1 + v \frac{\sqrt{4L+1}}{2L+1}\right) \left(1 - (v/(L+1) - 1)/K\right)$$

с максимумом на порядке  $n^{**} = 2v = L(K + 1) + K$ . Это дает представление о тесной связи точки экстремума характеристики с наклоном  $K$  аппроксимирующей  $\det(\mathbf{H})$  прямой.

Доказательство элементарно вытекает из аналитических выражений для сомножителей  $\det(\mathbf{D}) = (1 + \sigma)\det(\mathbf{H})$ , линейно зависящих от  $v$ , что позволяет найти максимум аналитически по точке равенства нулю производной этой функции.

Формула для эксцесса выведена нами и подтверждена в большом количестве компьютерных экспериментов с альтернирующими матрицами, она точно описывает коэффициент усиления  $\det(\mathbf{H})$ , зависящий от соотношения размеров текущего и ведущего блоков с учетом отмеченной поправки.

Графоаналитическое исследование аналитических значений оценок линейного  $h(v)$  и квадратичного  $d(v)$  относительных детерминантов при изменении количества альтернансов  $L = q(q + 1) = 0, 2, 6, 12, 20$ , вызванных сменой номера ведущего кольца Барбы  $q = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ , представлено на рис. 6. Здесь пять линейных графиков  $h(v)$ , размещенных ниже 1, и пять ква-



■ **Рис. 6.** Результаты графоаналитического исследования детерминантов (масштаб графиков 1:3 выше 1 для сопоставимости результатов)

■ **Fig. 6.** The results of the graphic-analytical study of determinants (scale of graphs 1:3 is higher than 1 for comparability of results)

дратичных графиков  $d(v)$ , описывающих последствия усиления бициклической основы каймой. Детерминант  $\mathbf{H}$  оценивается по отношению к  $\mathbf{E}(v)$  и не может превосходить теоретическую верхнюю границу.

На графики нанесены желтые точки, соответствующие аналитическим оценкам детерминантов, и зеленые — значениям относительных детерминантов реальных матриц, найденных в процессе оптимизации детерминанта при заранее не заданных количествах альтернансов  $L$  и параметров орнамента  $k_1, k_2$  и  $\lambda$ . Проверка выполнена на матрицах до порядка 118.

Для упрощения общей качественной картины над квадратичными зависимостями можно разместить огибающую, описывающую границу детерминантов структурированных матриц бициклической конструкции с каймой, как

$$\det(\mathbf{D}) \leq (2v)^{v+1/2} \mathbf{E}(v).$$

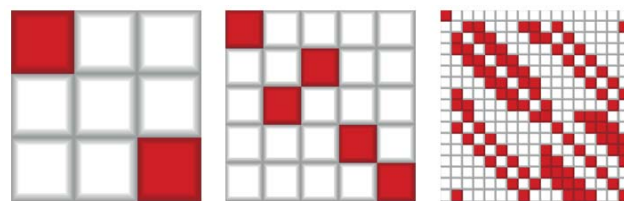
Она справедлива везде, кроме отмеченного  $v = 9$ , связанного с резонансом, когда две полосы равномерно распределяются между элементами орнаментальной матрицы. Выше этой зависимости, обозначенной на графике малиновым цветом, находится легко различимая оценка максимума детерминанта Барбы, не учитывающая структуру матрицы.

Для порядков матриц  $n = 4t + 3$  известно приближение Элича. Оно на рис. 6 не отображено, поскольку размещается между двумя кривыми — общей и адаптированной под структуру МБД. По краям образовавшихся при сравнении квадратичных функций диапазонов порядков возникают отклонения от линейного закона, но значения этих краевых эффектов нивелируются малым значением второго параметра  $s$ .

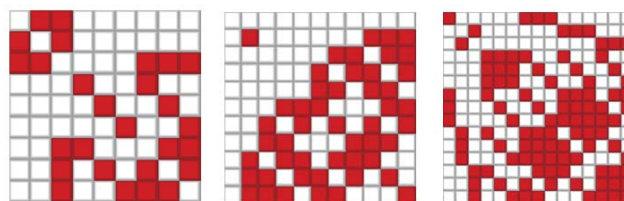
Отклонения объясняются, как и на порядке 18, повышением детерминанта матрицы  $\mathbf{H}$  при равномерном делении  $\mathbf{N}$  альтернансами. Эти отклонения не в состоянии изменить диапазоны стационарности  $L$  — метод устойчив для такой идентификации структур оптимальных матриц, когда сами матрицы не находятся. Для экспериментальной проверки результатов привлекались таблицы матриц большого детерминанта с фиксированной структурой [30, 37] наряду с найденными с использованием алгоритмов теории групп и полей образцами матриц более высоких порядков.

Отметим, что для альтернативных нечетных порядков  $n = 4t + 1$  интерес представляют бициклические матрицы с каймой (рис. 7) [35] размеров, выделенных простыми числами Ферма: 3, 5, 17, 257, 65 537, ... [38].

Здесь можно провести параллель с достижением Гаусса, который, построив с помощью циркуля и линейки правильный семнадцатигульник,



■ **Рис. 7.** Матрицы максимума детерминанта порядков 3, 5, 17 [35]  
 ■ **Fig. 7.** Maximum determinant matrices of orders 3, 5, 17 [35]



■ **Рис. 8.** Последовательное усложнение структур матриц порядков 9, 11, 15  
 ■ **Fig. 8.** Sequential complication of structures of matrices of orders 9, 11, 15

вышел на понимание уникальности этих чисел для простых геометрических фигур. Ровно также и матрицы максимума детерминанта упрощаемы до простой структуры на указанных порядках, не достигая излишне оптимистичной границы Барбы. Это держало долгое время в тени решения на числах Ферма. Ранее отмечалось, что упрощенные структуры в форме циклических блоков наблюдаются только для стартовых порядков 3, 5 и 13.

Отсутствие исследований, описывающих матрицы максимального детерминанта нечетных порядков, объясняется большой сложностью этой задачи. Можно упомянуть такие известные антагонисты чисел Ферма, как числа Мерсенна  $n = 2^k - 1 = 1, 3, 7, 15$  и 31 для подтверждения высказанного предположения об особой роли первых. Ведь экстремальная матрица на числах Мерсенна наблюдается для порядка, не превышающего 7. На всех остальных порядках матрицы максимума детерминанта не просто сложны, они существенно усложняются на каждом следующем порядке, что демонстрируется, например, портретами матриц порядков 9, 11, 15 (рис. 8).

### Классификация окружностей и точек Гаусса для матриц Адамара

Сферу и сфероид можно рассматривать как совокупность окружностей (или эллипсов) с варьируемым радиусом. Шанс получить на них

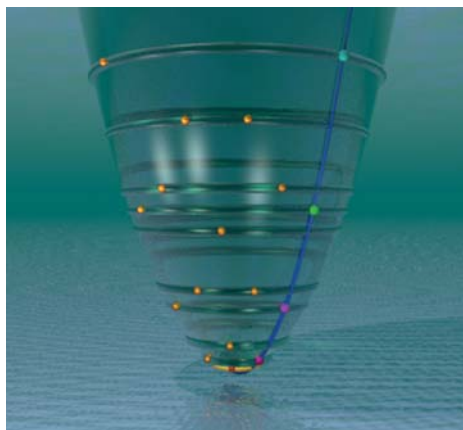


точку Гаусса высок: согласно базовой теореме он не нулевой для любого характерного для матриц Адамара порядка. Для бициклической матрицы характерно количество основных орнаментальных инвариантов, меньшее трех. Это подразумевает отсутствие ряда решений для порядков, для которых разложение  $n$  на сумму двух квадратов невозможно.

Первое кольцо на рис. 9, отмеченное желтым цветом, встречается на стартовом для матриц Адамара порядке 2. Оно имеет одну точку Гаусса с координатами (1, 1). Следующее кольцо для порядка 4 имеет пару точек с координатами (0, 2) и (2, 0), соответствующими двум матрицам с взаимно переставленными блоками А и В. Как видно, это первая точка, которая сидит также на пересечении колец сечений параболоида и вертикальной плоскости с образованием точек Гаусса на отмеченной синим цветом параболе.

Соответственно, на этом порядке существует регулярная матрица Адамара в виде моноблока с параметрами  $n = 4$ ,  $k = (n - x)/2 = 1$ ,  $\lambda = k - n/4 = 0$ . Этим условиям удовлетворяет циклическая матрица с единственным отрицательным элементом в каждой строке на ее диагонали. Далее следует кольцо с точкой с координатами (2, 2) для порядка 8. Выше идут кольца адамаровых порядков 16 (0, 4), 20 (2, 4), 32 (4, 4), 36 (0, 6), 40 (2, 6), 52 (4, 6), 64 (6, 6).

Для порядка 12 точек Гаусса нет, и это первый порядок матрицы, неразрешимый с помощью бициклической структуры. Далее идут пропуски 24, 28, 44, 48, 56, 60 и т. п. Признак неразложимости хорошо известен благодаря работам Ферма и Эйлера. Во всех таких случаях в составе делителей порядка наблюдается число  $3 \bmod 4 = 3, 7, 11, \dots$  или любая его нечетная степень. Для четных степеней этих делителей точек Гаусса даже тогда, когда они есть, могут отвечать моноблочные



■ **Рис. 9.** Параболоид  $x^2 + y^2 = n$  с точками Гаусса  
 ■ **Fig. 9.** Paraboloid  $x^2 + y^2 = n$  with Gauss points

структуры матриц, отличные от циклических. Первый такой порядок матрицы 36 ( $4 \times 9$ ).

## Заключение

Бициклические матрицы большого детерминанта, являясь матрицами четного порядка, регулируют детерминанты матриц с каймой нечетного, на единицу большего, порядка. Это означает, что на порядках, равных числам Ферма, их анализ позволит проверить очень важное предположение [38] о том, что именно они и только на этих порядках являются матрицами абсолютного максимума детерминанта. Этот класс матриц, по всей видимости, очень важен и имеет относительно стабильную орнаментальную матрицу, позволяющую проверять субоптимальность матриц бициклической конструкции, и их теорию необходимо развивать. Теория матриц Адамара оперирует кольцами, лежащими между кольцами матриц большого детерминанта, что объединяет обе теории в одну, касающуюся соответствия экстремальных матриц точкам Гаусса для квадратичных поверхностей на решетках [1]. Нами проведен обзор и вычислительный эксперимент, дополненный найденными матрицами бициклической конструкции с каймой, обладающими экстремально большим детерминантом. Эти матрицы значительно расширяют результаты численных исследований [30, 37] новыми решениями.

## Финансовая поддержка

Статья подготовлена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ, грант FSRF-2020-0004.

## Литература

1. Балонин Н. А., Сергеев М. Б., Себерри Дж., Синицына О. И. Окружности на решетках и матрицы Адамара. *Информационно-управляющие системы*, 2019, № 3, с. 2–9. doi:10.31799/1684-8853-2019-3-2-9
2. Barba G. Intorno al teorema di Hadamard sui determinanti a valore massimo. *Giorn. Mat. Battaglini*, 1933, vol. 71, pp. 70–86.
3. Hadamard J. Resolution d'une question relative aux determinants. *Bulletin des Sciences Mathematiques*, 1893, no. 17, pp. 240–246.
4. Seberry J., Yamada M. Hadamard matrices, sequences, and block designs. In: *Contemporary Design Theory: A Collection of Surveys*. J. H. Dinitz and D. R. Stinson, eds. John Wiley and Sons, Inc., 1992. Pp. 431–560.

5. Seberry J., Yamada M. Hadamard matrices constructed using number theory and algebra. John Wiley (to appear).
6. Horadam K. J. Hadamard matrices and their applications: Progress 2007–2010. *Cryptography and Communications*, 2010, no. 2, iss. 2, pp. 129–154.
7. Wang R. Introduction to orthogonal transforms with applications in data processing and analysis. Cambridge University Press, 2010. 504 p.
8. Ahmed N., Rao R. Orthogonal transforms for digital signal processing. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1975. 263 p.
9. Ehlich H. Determinantenabschätzungen für binäre Matrizen. *Mathematische Zeitschrift*, 1964, vol. 83, pp. 123–132.
10. Ehlich H. Determinantenabschätzungen für binäre Matrizen mit  $N \equiv 3 \pmod{4}$ . *Mathematische Zeitschrift*, 1964, vol. 84, pp. 438–447.
11. Wojtas M. On Hadamard's inequality for the determinants of order non-divisible by 4. *Colloq. Math.*, 1964, vol. 12, pp. 73–83. doi:10.4064/cm-12-1-73-83
12. Yang C. H. On designs of maximal  $(+1, -1)$ -matrices of order  $n \equiv 2 \pmod{4}$ . *Math. Comp.*, 1968, vol. 22, pp. 174–180.
13. Yang C. H. On designs of maximal  $(+1, -1)$ -matrices of order  $n \equiv 2 \pmod{4}$ . II. *Math. Comp.*, 1969, vol. 23, pp. 201–205.
14. Brenner J. The Hadamard maximum determinant problem. *The American Mathematical Monthly*, 1972, vol. 79, no. 6, pp. 626–630.
15. Yang C. H. Maximal binary matrices and sum of two squares. *Math. Comp.*, 1976, vol. 30, pp. 148–153.
16. Chadjipantelis Th., Kounias S. Supplementary difference sets and D-optimal designs for  $n \equiv 2 \pmod{4}$ . *Discrete Math.*, 1985, vol. 57, pp. 211–216.
17. Cohn J. H. E. On determinants with elements  $\pm 1$ . II. *Bull. London Math. Soc.*, 1989, vol. 21, pp. 36–42. doi.org/10.1112/blms/21.1.36
18. Djokovic D. Z. On maximal  $(1, -1)$ -matrices of order  $2n$ ,  $n$  odd. *Radovi Matematički*, 1991, vol. 7, pp. 371–378.
19. Brent R. P., Osborn J. H. On minors of maximal determinant matrices. arXiv preprint arXiv:1208.3819 [math.CO], 2012. <http://arxiv.org/abs/1208.3819> (дата обращения: 09.04.2020).
20. Chadjipantelis Th., Kounias S., Moysiadis C. Construction of D-optimal designs for  $n \equiv 2 \pmod{4}$  using block-circulant matrices. *J. Combin. Theory Ser. A*, 1985, vol. 40, pp. 125–135.
21. Kharaghani H. A construction of D-optimal designs for  $N = 2 \pmod{4}$ . *J. Combin. Theory Ser. A*, 1987, vol. 46, pp. 156–158.
22. Chadjipantelis Th., Kounias S., Moysiadis C. The maximum determinant of  $21 \times 21$   $(+1, -1)$ -matrices and D-optimal designs. *J. Statist. Plann. Inference*, 1987, vol. 16, pp. 167–178.
23. Brent R. P., Orrick W. P., Osborn J., Zimmermann P. Maximal determinants and saturated D-optimal designs of orders 19 and 37. arXiv preprint arXiv:1112.4160 [math.CO], 2011. <http://arxiv.org/abs/1112.4160> (дата обращения: 09.04.2020).
24. Orrick W. The maximal  $\{-1, 1\}$ -determinant of order 15. *Metrika*, 2005, vol. 62, pp. 195–219.
25. Cohn J. H. E. A D-optimal design of order 102. *Discrete Math.*, 1992, vol. 102, pp. 61–65.
26. Fletcher R. J., Seberry J. New D-optimal designs of order 110. *Australas. J. Combin.*, 2001, vol. 23, pp. 214–225.
27. Djokovic D. Z. Some new D-optimal designs. *Australas. J. Combin.*, 1997, vol. 15, pp. 221–231.
28. Djokovic D. Z., Kotsireas I. S. New results on D-optimal designs. *J. Combin. Designs*, 2012, vol. 20, pp. 278–289.
29. Sloane N. J. A. The on-line encyclopedia of integer sequences. Published electronically: Sequences A003432/M0720, A003433/M1291, A051752, A051753, and A188895. <http://oeis.org/> (дата обращения: 19.03.2020).
30. Orrick Will, and Solomon Bruce. The Hadamard maximal determinant problem. <http://www.indiana.edu/~maxdet/> (дата обращения: 10.03.2020).
31. Балонин Н. А., Сергеев М. Б. Как гипотезе Адамара помочь стать теоремой. Ч. 1. *Информационно-управляющие системы*, 2018, № 6, с. 2–13. doi:10.31799/1684-8853-2018-6-2-13
32. Балонин Н. А., Сергеев М. Б. Как гипотезе Адамара помочь стать теоремой. Ч. 2. *Информационно-управляющие системы*, 2019, № 1, с. 2–10. doi:10.31799/1684-8853-2019-1-2-10
33. Balonin N., Sergeev M. Quasi-orthogonal local maximum determinant matrices. *Applied Mathematical Sciences*, 2015, vol. 9, no. 8, pp. 285–293. doi:10.12988/ams.2015.4111000
34. Балонин Н. А., Джокович Д. Ж. Симметрия двуклических матриц Адамара и периодические пары Голея. *Информационно-управляющие системы*, 2015, № 3, с. 2–17. doi:10.15217/issn1684-8853.2015.3.2
35. Балонин Н. А., Сергеев М. Б. Расширение гипотезы Райзера на двуклические структуры и разрешимость матриц Адамара орнаментом в виде бицикла с двойной каймой. *Информационно-управляющие системы*, 2017, № 1, с. 2–10. doi:10.15217/issn1684-8853.2017.1.2
36. Farmakis N., Kounias S. The excess of Hadamard matrices and optimal designs. *Discrete Math.*, 1987, vol. 67, pp. 165–176.
37. Rokicki T. New records for maximal determinants, based on pairs of circulant matrices. <http://tomas.rokicki.com/newrec.html> (дата обращения: 10.03.2020).
38. Балонин Н. А., Сергеев М. Б., Востриков А. А. Простые числа Ферма и гипотеза о матрицах максимума детерминанта. *Информационно-управляющие системы*, 2020, № 2, с. 2–9. doi:10.31799/1684-8853-2020-2-2-9



UDC 519.614

doi:10.31799/1684-8853-2020-6-2-11

Circles on lattices, and maximum determinant matrices

N. A. Balonin<sup>a</sup>, Dr. Sc., Tech., Professor, orcid.org/0000-0001-7338-4920, korbendfs@mail.ru

M. B. Sergeev<sup>a</sup>, Dr. Sc., Tech., Professor, orcid.org/0000-0002-3845-9277

J. Seberry<sup>b</sup>, Dr. Sc., Tech., Honorary Professor, orcid.org/0000-0002-9558-4293

O. I. Sinitsyna<sup>a</sup>, Post-Graduate Student, orcid.org/0000-0002-2819-4682

<sup>a</sup>Saint-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, 67, B. Morskaja St., 190000, Saint-Petersburg, Russian Federation

<sup>b</sup>Department of Computing and Information Technology, University of Wollongong, NSW 2522, Australia

**Introduction:** The Hadamard conjecture about the existence of maximum determinant matrices in all orders multiple of 4 is closely related to Gauss's problem about the number of points with integer coordinates (Z3 lattice points) on a spheroid, cone, paraboloid or parabola. The location of these points dictates the number and types of extreme matrices. **Purpose:** Finding out how Gaussian points on sections of solids of revolution are related to the number and types of maximum determinant matrices with a fixed structure for odd orders. Specifying a precise upper bound of maximum determinant values for edged two-circulant matrices and the orders on which they prevail over simpler cyclic structures. **Results:** A newly proposed formula refines the overly optimistic Elich – Wojtas' upper bound for the case of matrices with a fixed structure. Fermat numbers have a special role for orders of  $4t + 1$ , and Barba numbers affect the formation of classes of maximum determinant matrices which occupy the areas of orders  $4t + 3$ , successively replacing each other. For a two-circulant structure with an edge, the maximum order of an optimal symmetric solution is estimated as 67. It is proved that the determinant of edged block matrices is superior to the determinants of circulant matrices everywhere except for a special order 39. **Practical relevance:** Maximum (for a fixed structure) determinant matrices related to lattice points have a direct practical significance for noise-resistant coding, compression and masking of video data.

**Keywords** — Gaussian points, Gaussian problem, paraboloid on a lattice, orthogonal matrices, Hadamard matrices, maximum determinant matrices, two-circulant edged matrices.

**For citation:** Balonin N. A., Sergeev M. B., Seberry J., Sinitsyna O. I. Circles on lattices, and maximum determinant matrices. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2020, no. 6, pp. 2–11 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2020-6-2-11

References

- Balonin N. A., Sergeev M. B., Seberry J., Sinitsyna O. I. Circles on lattices and Hadamard matrices. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2019, no. 3, pp. 2–9 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2019-3-2-9
- Barba G. Intorno al teorema di Hadamard sui determinanti a valore massimo. *Giorn. Mat. Battaglini*, 1933, vol. 71, pp. 70–86 (In Italian).
- Hadamard J. Resolution d'une question relative aux determinants. *Bulletin des Sciences Mathematiques*, 1893, no. 17, pp. 240–246 (In French).
- Seberry J., Yamada M. *Hadamard matrices, sequences, and block designs*. In: *Contemporary Design Theory: A Collection of Surveys*. J. H. Dinitz and D. R. Stinson, eds. John Wiley and Sons, Inc., 1992. Pp. 431–560.
- Seberry J., Yamada M. *Hadamard matrices constructed using number theory and algebra*. John Wiley (to appear).
- Horadam K. J. Hadamard matrices and their applications: Progress 2007–2010. *Cryptography and Communications*, 2010, no. 2, iss. 2, pp. 129–154.
- Wang R. *Introduction to orthogonal transforms with applications in data processing and analysis*. Cambridge University Press, 2010. 504 p.
- Ahmed N., Rao R. *Orthogonal transforms for digital signal processing*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1975. 263 p.
- Ehlich H. Determinantenabschätzungen für binäre Matrizen. *Mathematische Zeitschrift*, 1964, vol. 83, pp. 123–132 (In German).
- Ehlich H. Determinantenabschätzungen für binäre Matrizen mit  $N \equiv 3 \pmod 4$ . *Mathematische Zeitschrift*, 1964, vol. 84, pp. 438–447 (In German).
- Wojtas M. On Hadamard's inequality for the determinants of order non-divisible by 4. *Colloquium Mathematicum*, 1964, vol. 12, pp. 73–83. doi:10.4064/cm-12-1-73-83
- Yang C. H. On designs of maximal (+1, -1)-matrices of order  $n \equiv 2 \pmod 4$ . *Math. Comp.*, 1968, vol. 22, pp. 174–180.
- Yang C. H. On designs of maximal (+1, -1)-matrices of order  $n \equiv 2 \pmod 4$ . II. *Math. Comp.*, 1969, vol. 23, pp. 201–205.
- Brenner J. The Hadamard maximum determinant problem. *The American Mathematical Monthly*, 1972, vol. 79, no. 6, pp. 626–630.
- Yang C. H. Maximal binary matrices and sum of two squares. *Math. Comp.*, 1976, vol. 30, pp. 148–153.
- Chadjipantelis Th., Kounias S. Supplementary difference sets and D-optimal designs for  $n \equiv 2 \pmod 4$ . *Discrete Math.*, 1985, vol. 57, pp. 211–216.
- Cohn J. H. E. On determinants with elements  $\pm 1$ . II. *Bull. London Math. Soc.*, 1989, vol. 21, pp. 36–42. doi.org/10.1112/blms/21.1.36
- Djokovic D. Z. On maximal (1, -1)-matrices of order  $2n$ ,  $n$  odd. *Radovi Matematchki*, 1991, vol. 7, pp. 371–378.
- Brent R. P., Osborn J. H. On minors of maximal determinant matrices. arXiv preprint arXiv:1208.3819 [math.CO], 2012. Available at: <http://arxiv.org/abs/1208.3819> (accessed 9 April 2020).
- Chadjipantelis Th., Kounias S., Moyssiadis C. Construction of D-optimal designs for  $n \equiv 2 \pmod 4$  using block-circulant matrices. *J. Combin. Theory Ser. A*, 1985, vol. 40, pp. 125–135.
- Kharaghani H. A construction of D-optimal designs for  $N = 2 \pmod 4$ . *J. Combin. Theory Ser. A*, 1987, vol. 46, pp. 156–158.
- Chadjipantelis Th., Kounias S., Moyssiadis C. The maximum determinant of  $21 \times 21$  (+1, -1)-matrices and D-optimal designs. *J. Statist. Plann. Inference*, 1987, vol. 16, pp. 167–178.
- Brent R. P., Orrick W. P., Osborn J., Zimmermann P. Maximal determinants and saturated D-optimal designs of orders 19 and 37. arXiv preprint arXiv: 1112.4160 [math.CO], 2011. Available at: <http://arxiv.org/abs/1112.4160> (accessed 9 April 2020).
- Orrick W. The maximal  $\{-1, 1\}$ -determinant of order 15. *Metrika*, 2005, vol. 62, pp. 195–219.
- Cohn J. H. E. A D-optimal design of order 102. *Discrete Math.*, 1992, vol. 102, pp. 61–65.
- Fletcher R. J., Seberry J. New D-optimal designs of order 110. *Australas. J. Combin.*, 2001, vol. 23, pp. 214–225.
- Djokovic D. Z. Some new D-optimal designs. *Australas. J. Combin.*, 1997, vol. 15, pp. 221–231.
- Djokovic D. Z., Kotsireas I. S. New results on D-optimal designs. *J. Combin. Designs*, 2012, vol. 20, pp. 278–289.
- Sloane N. J. A. *The on-line encyclopedia of integer sequences*. Published electronically: Sequences A003432/M0720,

- A003433/M1291, A051752, A051753, and A188895. Available at: <http://oeis.org/> (accessed 19 March 2020).
30. Orrick Will, and Solomon Bruce. *The Hadamard maximal determinant problem*. Available at: <http://www.indiana.edu/~maxdet/> (accessed 10 March 2020).
  31. Balonin N. A., Sergeev M. B. Helping Hadamard conjecture to become a theorem. Part 1. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2018, no. 6, pp. 2–13 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2018-6-2-13
  32. Balonin N. A., Sergeev M. B. Helping Hadamard conjecture to become a theorem. Part 2. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2019, no. 1, pp. 2–10 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2019-1-2-10
  33. Balonin N., Sergeev M. Quasi-orthogonal local maximum determinant matrices. *Applied Mathematical Sciences*, 2015, vol. 9, no. 8, pp. 285–293. doi:10.12988/ams.2015.4111000
  34. Balonin N. A., Djokovic D. Z. Symmetry of two-circulant Hadamard matrices and periodic Golay pairs. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2015, no. 3, pp. 2–17 (In Russian). doi:10.15217/issn1684-8853.2015.3.2
  35. Balonin N. A., Sergeev M. B. Ryser's conjecture expansion for bicirculant structures and Hadamard matrix resolvability by double-border bicycle ornament. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2017, no. 1, pp. 2–10 (In Russian). doi:10.15217/issn1684-8853.2017.1.2
  36. Farmakis N., Kounias S. The excess of Hadamard matrices and optimal designs. *Discrete Math.*, 1987, vol. 67, pp. 165–176.
  37. Rokicki T. *New records for maximal determinants, based on pairs of circulant matrices*. Available at: <http://tomas.rokicki.com/newrec.html> (accessed 10 March 2020).
  38. Balonin N. A., Sergeev M. B., Vostricov A. A. Prime Fermat numbers and maximum determinant matrix conjecture. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2020, no. 2, pp. 2–9 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2020-2-2-9

### УВАЖАЕМЫЕ АВТОРЫ!

Научные базы данных, включая SCOPUS и Web of Science, обрабатывают данные автоматически. С одной стороны, это ускоряет процесс обработки данных, с другой — различия в транслитерации ФИО, неточные данные о месте работы, области научного знания и т. д. приводят к тому, что в базах оказывается несколько авторских страниц для одного и того же человека. В результате для всех по отдельности считаются индексы цитирования, что снижает рейтинг ученого.

Для идентификации авторов в сетях Thomson Reuters проводит регистрацию с присвоением уникального индекса (ID) для каждого из авторов научных публикаций.

Процедура получения ID бесплатна и очень проста, есть возможность провести регистрацию на 12-ти языках, включая русский (чтобы выбрать язык, кликните на зеленое поле сверху справа на стартовой странице): <https://orcid.org>